

Уравнения и неравенства

Теорема Виета

Квадратные уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

x – переменная

a, b, c – некоторые числа

$$a \neq 0$$

a, b – коэффициенты квадратного уравнения

c – свободный член

Приведенное квадратное уравнение

$$1 \cdot x^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$p = \frac{b}{a}, q = \frac{c}{a}$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$a = 1, b = -1, c = -6$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 > 0$$

$$p = \frac{-1}{1} = -1, q = \frac{-6}{1} = -6$$

$$p = \frac{b}{a}, q = \frac{c}{a}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_1 = -\frac{-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - (-6)} = 0,5 + \sqrt{6,25} = 0,5 + 2,5 = 3$$

$$x_2 = -\frac{-1}{2} - \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - (-6)} = 0,5 - \sqrt{6,25} = 0,5 - 2,5 = -2$$

Ответ: -2; 3.

Теорема Виета:

Если x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$,
то:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

Обратная теорема:

Если числа x_1, x_2, p, q связаны условиями

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 \cdot x_2 = q; \end{cases}$$

то x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Решить уравнение $x^2 + 7x + 10 = 0$

$$D = 7^2 - 4 \cdot 10 = 49 - 40 = 9 > 0;$$

$$p = 7, q = 10;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -7; \\ x_1 \cdot x_2 = 10; \end{cases}$$

$$10 = -1 \cdot (-10);$$

$$10 = -2 \cdot (-5);$$

$$-1 + (-10) = -11;$$

$$-2 + (-5) = -7;$$

Ответ: $-2; -5$.

Если x_1 и x_2 — корни
приведенного квадратного
уравнения $x^2 + px + q = 0$,
то:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

Решить уравнение $x^2 - 2x - 24 = 0$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot (-24) = 4 + 96 > 0$$

$$p = -2, q = -24$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2; \\ x_1 \cdot x_2 = -24; \end{cases} \quad \begin{cases} |x_1| - |x_2| = 2; \\ |x_1| \cdot |x_2| = 24; \end{cases}$$

$$24 = 24 \cdot 1 \quad 24 - 1 = 23$$

$$24 = 12 \cdot 2 \quad 12 - 2 = 10$$

$$24 = 8 \cdot 3 \quad 8 - 3 = 5$$

$$24 = 6 \cdot 4 \quad 6 - 4 = 2$$

Ответ: $-4; 6$.

Если x_1 и x_2 — корни
приведенного квадратного
уравнения $x^2 + px + q = 0$,
то:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

$$2x^2 - 24x + 22 = 0$$

$$D = (-24)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 22 = 576 - 176 = 400 > 0$$

$$2x^2 - 24x + 22 = 0 | : 2 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 11 = 0$$

$$p = -12, q = 11$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 12 \\ x_1 \cdot x_2 = 11 \end{cases}$$

$$11 = 11 \cdot 1$$

$$11 + 1 = 12$$

Ответ: 1; 11.

Если x_1 и x_2 — корни
приведенного квадратного
уравнения $x^2 + px + q = 0$,
то:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

Теорема Виета для квадратного уравнения общего вида:

Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни $x_1 = -5$ и $x_2 = -1$. Найти q .

$$q = x_1 \cdot x_2$$

$$q = (-5) \cdot (-1)$$

$$q = 5$$

Если x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

Ответ: 5.

Используя теорему Виета, проверьте, являются ли корнями уравнения $m^2 + m - 6 = 0$ числа $m_1 = -3$ и $m_2 = 2$.

$$D = 1^2 - 4 \cdot (-6) = 1 + 24 > 0$$

$$p = 1, q = -6$$

$$m_1 + m_2 = -3 + 2 = -1 = -p$$

$$m_1 \cdot m_2 = -3 \cdot 2 = -6 = q$$

Ответ: да.

Если числа x_1, x_2, p, q связаны условиями

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 \cdot x_2 = q; \end{cases}$$

то x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Если уравнение $x^2 - 5x - 24 = 0$ имеет корни, то найти их произведение и сумму.

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot (-24) = 25 + 96 > 0$$

$$p = -5, q = -24$$

$$x_1 \cdot x_2 = q = -24$$

$$x_1 + x_2 = -p = -(-5) = 5$$

Ответ: 5; -24.

Если x_1 и x_2 – корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$,

то:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

Найти $x_1^2 + x_2^2$, где x_1 и x_2 – корни уравнения
 $x^2 - 9x - 17 = 0$.

$$D = (-9)^2 - 4 \cdot (-17) = 81 + 68 > 0$$

$$p = -9, q = -17$$

$$x_1 + x_2 = -(-9) = 9$$

$$x_1 \cdot x_2 = -17$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 9^2 - 2 \cdot (-17) = 81 + 34 = 115$$

Ответ: 115.

Если x_1 и x_2 – корни
приведенного квадратного
уравнения $x^2 + px + q = 0$,

то:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

Приведенное квадратное уравнение

$$1 \cdot x^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$p = \frac{b}{a}, q = \frac{c}{a}$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Теорема Виета:

Если x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$,
то:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

Обратная теорема:

Если числа x_1, x_2, p, q связаны условиями

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 \cdot x_2 = q; \end{cases}$$

то x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.