Нестандартные методы решения неравенств.

Цель работы -подготовка к ЕГЭ.

Выполнила работу
Зарьянцева Виктория Павловна-учитель высшей категории
МОУ «СОШ№84» .

Метод замены множителей (МЗМ)

- Суть этого метода заключается в том, чтобы с помощью равносильных преобразований заменить каждый множитель в области его существования на более простой множитель рациональный и имеющий те же интервалы знакопостоянства (на множитель равного знака).
- Решение задания15 ЕГЭ для учащихся становится доступным и простым.

Неравенства ,содержащие модули.

Условия равносильности для МЗМ

1. $|f(x)| \vee 0 \Leftrightarrow f^2(x) \vee 0.$

2. $|f(x)| \vee |g(x)| \quad \Leftrightarrow f^2(x) \vee g^2(x) \quad \Leftrightarrow \quad f^2(x) - g^2(x) \vee 0 \quad \Leftrightarrow$

$\big(f(x) - g(x)\big)\big(f(x) + g(x)\big) \vee 0.$

Метод замены множителей

Вывод: $|f(x)|-|g(x)|\vee 0 \quad \Leftrightarrow \quad (f(x)-g(x))(f(x)+g(x))\vee 0.$

3. $(|f(x)|-|g(x)|)\cdot\varphi(x)\vee 0 \quad \Leftrightarrow \quad (f(x)-g(x))(f(x)+g(x))\cdot\varphi(x)\vee 0.$

4. $|f(x)|\le g(x) \quad \Leftrightarrow \quad |f(x)|-g(x)\le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(x)\ge 0, \\ (f(x)-g(x))(f(x)+g(x))\le 0. \end{cases}$

5. $|f(x)|\ge g(x) \quad \Leftrightarrow \quad |f(x)|-g(x)\ge 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} g(x)\ge 0, \\ (f(x)-g(x))(f(x)+g(x))\ge 0 \end{cases} \cup \begin{cases} g(x)<0, \\ |f(x)|-g(x)>0 \quad \forall x\in D(f)\cap D(g). \end{cases}$$

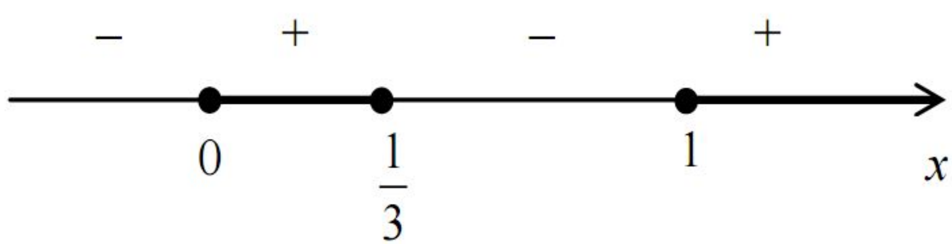
Пример 1. Решите неравенство $\left|x^2-7x+2\right| \le \left|x^2+5x-2\right|$.

Решение. $\left|x^2-7x+2\right| - \left|x^2+5x-2\right| \le 0$.

Применим ***метод замены множителя*** (МЗМ).

$$(1) \;\Leftrightarrow\; \left(x^2-7x+2-x^2-5x+2\right)\left(x^2-7x+2+x^2+5x-2\right) \le 0 \;\Leftrightarrow$$

$$(-12x+4)\left(2x^2-2x\right) \le 0 \;\Leftrightarrow\; (3x-1)(x-1)x \ge 0$$



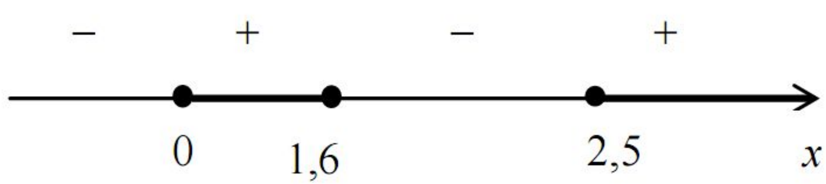
$$x \in \left[0;\ \frac{1}{3}\right] \cup [1; +\infty).$$

Пример 2. Решите неравенство $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| \le 1.$

Решение. $\dfrac{\left|x^2-5x+4\right|}{\left|x^2-4\right|}-1\le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left|x^2-5x+4\right|-\left|x^2-4\right|\le 0, \\ x^2-4\ne 0. \end{cases}$

Применим МЗМ.

$$\begin{cases} \left(x^2-5x+4-x^2+4\right)\left(x^2-5x+4+x^2-4\right)\le 0, \\ x\ne -2,\ \ x\ne 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (5x-8)(2x-5)x\ge 0, \\ x\ne -2,\ \ x\ne 2. \end{cases}$$



$x\in[0;\ 1{,}6]\cup[2{,}5;+\infty).$

Пример 3. Решите неравенство $\left|x^2-5x-14\right|+20\ge 5\left|x+2\right|+4\left|x-7\right|$.

Решение. Приведем исходное неравенство к каноническому виду.

$$\left|(x-7)(x+2)\right|+20-5|x+2|-4|x-7|\ge 0 \quad \Leftrightarrow$$

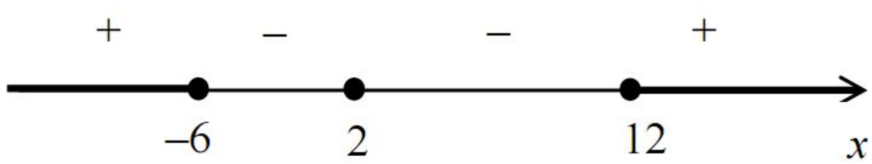
$$\left(|x-7||x+2|-5|x+2|\right)-\left(4|x-7|-20\right)\ge 0 \;\Leftrightarrow\; |x+2|\left(|x-7|-5\right)-4\left(|x-7|-5\right)\ge 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\left(|x-7|-5\right)\left(|x+2|-4\right)\ge 0 \qquad (1)$$

Применим МЗМ.

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad (x-7-5)(x-7+5)(x+2-4)(x+2+4)\ge 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x-12)(x-2)^2(x+6)\ge 0$$



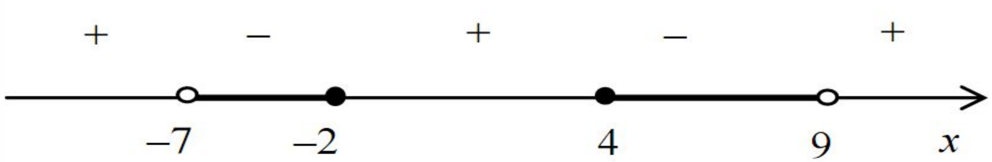
$x\in(-\infty;\,-6]\cup\{2\}\cup[12;\,+\infty)$.

Пример 4. Решите неравенство $\dfrac{5|3-x|}{8-|x-1|}-|x-3|\geq 0$.

Решение. $\dfrac{5|3-x|}{8-|x-1|}-|x-3|\geq 0 \iff |x-3|\left(\dfrac{5}{8-|x-1|}-1\right)\geq 0 \iff$

$$\frac{|x-3|(5-8+|x-1|)}{8-|x-1|}\geq 0 \iff \left[\begin{array}{l}\dfrac{|x-1|-3}{|x-1|-8}\leq 0,\\ x=3\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\dfrac{(x-1-3)(x-1+3)}{(x-1-8)(x-1+8)}\leq 0,\\ x=3\end{array}\right. \iff$$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{(x-4)(x+2)}{(x-9)(x+7)}\leq 0,\\ x=3.\end{array}\right.$$



$x=3$

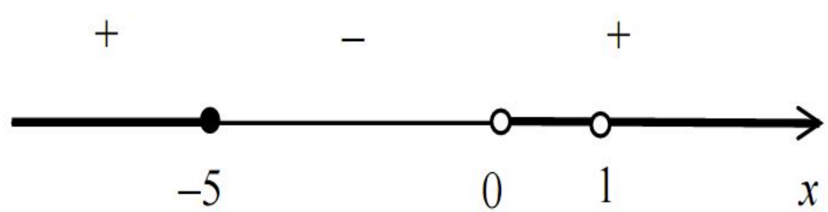
$x\in(-7;\,-2]\cup\{3\}\cup[4;\,9)$.

Пример 5. Решите неравенство $\dfrac{|2x+1|-|x-4|}{|3x-1|-|x+1|}\geq 0$.

Решение. Применим МЗМ.

$$\frac{|2x+1|-|x-4|}{|3x-1|-|x+1|}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(2x+1-x+4)(2x+1+x-4)}{(3x-1-x-1)(3x-1+x+1)}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x+5)(x-1)}{(x-1)x}\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+5}{x}\geq 0, \\ x\neq 1 \end{cases}$$



$x\in(-\infty;-5]\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$.

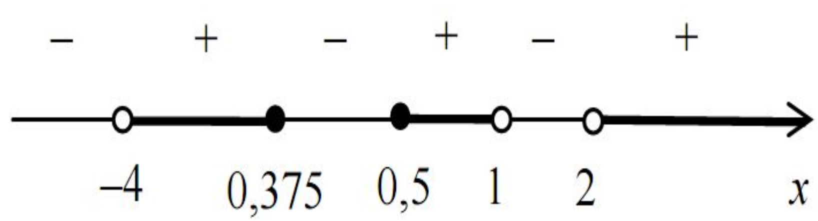
Пример 6. Решите неравенство $\dfrac{|5x-2|-|3x-1|}{|x^2-3x-3|-|x^2+7x-13|}\le 0$.

Решение. Применим МЗМ.

$$\frac{|5x-2|-|3x-1|}{|x^2-3x-3|-|x^2+7x-13|}\le 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{(5x-2-3x+1)(5x-2+3x-1)}{(x^2-3x-3-x^2-7x+13)(x^2-3x-3+x^2+7x-13)}\le 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{(2x-1)(8x-3)}{(-10x+10)(2x^2+4x-16)}\le 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(2x-1)(8x-3)}{(x-1)(x+4)(x-2)}\ge 0$$



$x\in(-4;\,0{,}375]\cup[0{,}5;\,1)\cup(2;\,+\infty)$.

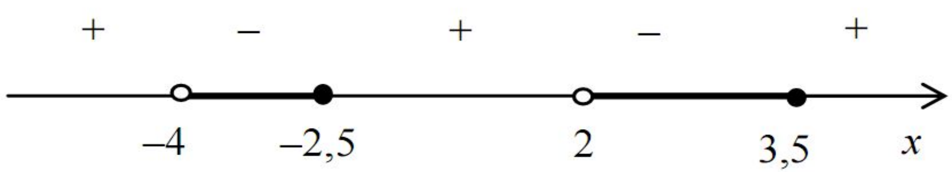
Пример 7. Решите неравенство $\dfrac{\left|\left|2x-1\right|-1\right|-5}{\left|\left|x^2+2x\right|-4\right|-4}\le 0.$

Решение. Применим МЗМ.

$$\frac{\left|\left|2x-1\right|-1\right|-5}{\left|\left|x^2+2x\right|-4\right|-4}\le 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\left(\left|2x-1\right|-1-5\right)\left(\left|2x-1\right|-1+5\right)}{\left(\left|x^2+2x\right|-4-4\right)\left(\left|x^2+2x\right|-4+4\right)}\le 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(\left|2x-1\right|-6\right)\left(\left|2x-1\right|+4\right)}{\left(\left|x^2+2x\right|-8\right)\left|x^2+2x\right|}\le 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \dfrac{\left|2x-1\right|-6}{\left|x^2+2x\right|-8}\le 0, \\ x^2+2x\ne 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{(2x-1-6)(2x-1+6)}{\left(x^2+2x-8\right)\left(x^2+2x+8\right)}\le 0, \\ x\ne -2;\ x\ne 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \dfrac{(2x-7)(2x+5)}{(x+4)(x-2)}\le 0, \\ x\ne -2;\ x\ne 0 \end{cases}$$



$x\in(-4;-2{,}5]\cup(2;\,3{,}5].$

Пример 8. Решите неравенство $\left|5x^2-6|x|-8\right|\le 3\left|x^2-4|x|+4\right|$.

Решение. $\left|5x^2-6|x|-8\right|-\left|3x^2-12|x|+12\right|\le 0 \iff$

$$\left(5x^2-6|x|-8-3x^2+12|x|-12\right)\left(5x^2-6|x|-8+3x^2-12|x|+12\right)\le 0 \iff$$

$$\left(2|x|^2+6|x|-20\right)\left(8|x|^2-18|x|+4\right)\le 0 \iff \left(|x|^2+3|x|-10\right)\left(4|x|^2-9|x|+2\right)\le 0 \iff$$

$$\left(|x|+5\right)\left(|x|-2\right)\left(4|x|-1\right)\left(|x|-2\right)\le 0 \iff \left(|x|-2\right)^2\left(4|x|-1\right)\le 0 \iff$$

$$\left[\begin{array}{l}|x|=2,\\ 4|x|-1\le 0\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x=-2,\\ x=2,\\ (4x-1)(4x+1)\le 0\end{array}\right. \iff x\in\{-2\}\cup[-0{,}25;\ 0{,}25]\cup\{2\}.$$

Пример 9. Решите неравенство $$\frac{\left|\left|2x^2-x\right|-3\right|-2x^2-x-5}{\left|x-1-x^2\right|-\left|x^2-3x+4\right|}\geq 0.$$

Решение. $$\frac{\left|\left|2x^2-x\right|-3\right|-\left(2x^2+x+5\right)}{\left|x-1-x^2\right|-\left|x^2-3x+4\right|}\geq 0 \qquad (1)$$

Так как $\left(2x^2+x+5\right)>0 \quad \forall x\in R \ \left(a=2>0,\ D<0\right)$, то применим к неравенству (1) МЗМ.

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\left(\left|2x^2-x\right|-3-\left(2x^2+x+5\right)\right)\left(\left|2x^2-x\right|-3+\left(2x^2+x+5\right)\right)}{\left(x-1-x^2-x^2+3x-4\right)\left(x-1-x^2+x^2-3x+4\right)}\geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(\left|2x^2-x\right|-\left(2x^2+x+8\right)\right)\left(\left|2x^2-x\right|+\left(2x^2+x+2\right)\right)}{\left(2x^2-4x+5\right)\left(2x-3\right)}\geq 0 \qquad (2)$$

Парабола расположена в верхней полуплоскости если дискрименант меньше 0 и ветви её направлены вверх.

Так как $(2x^2+x+8)>0, (2x^2+x+2)>0, (2x^2-4x+5)>0 \quad \forall x \in R$, то

$$(2) \Leftrightarrow \frac{|2x^2-x|-(2x^2+x+8)}{2x-3} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(2x^2-x-2x^2-x-8)(2x^2-x+2x^2+x+8)}{2x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-(x+4)(4x^2+8)}{2x-3} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x+4}{2x-3} \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-4; 1{,}5).$$

Пример 10. Решите неравенство $\dfrac{(x+3)^2+|x+3|-20}{(|x-8|-6)(|2-x^2|-7)}\le 0$.

Решение.

1) $\dfrac{(x+3)^2+|x+3|-20}{(|x-8|-6)(|2-x^2|-7)}\le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{f(x)}{(|x-8|-6)(|2-x^2|-7)}\le 0,$ (1)

где $f(x)=(x+3)^2+|x+3|-20$.

2) Заменим функцию *f(x)* на функцию равного знака.

Пусть $|x+3|=t,\ t\ge 0$, тогда $(x+3)^2=|x+3|^2=t^2$.

$$f(x)\vee 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t^2+t-20\vee 0, \\ t\ge 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (t+5)(t-4)\vee 0, \\ t\ge 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

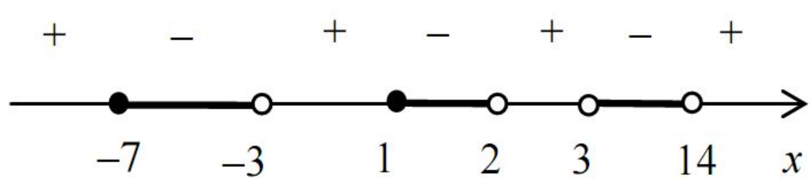
$$\begin{cases} t-4\vee 0, \\ t\ge 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad |x+3|-4\vee 0.$$

Модуль положительного числа есть само это число

$$3)\ (1)\ \Leftrightarrow\ \frac{|x+3|-4}{(|x-8|-6)\left(|x^2-2|-7\right)}\le 0\ \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x+3-4)(x+3+4)}{(x-8-6)(x-8+6)\left(x^2-2-7\right)\left(x^2-2+7\right)}\le 0\ \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-1)(x+7)}{(x-14)(x-2)\left(x^2-9\right)\left(x^2+5\right)}\le 0\ \Leftrightarrow\ \frac{(x-1)(x+7)}{(x-14)(x-2)(x-3)(x+3)}\le 0$$



$$x\in[-7;\,-3)\cup[1;\,2)\cup(3;\,14).$$

Пример 11. Решите неравенство $\left((-x+1)^{-1}-(-x+4)^{-1}\right)^2 \le \dfrac{\left|x^2+6x\right|}{\left(x^2-5x+4\right)^2}$.

Решение.

1) Преобразуем левую часть неравенства.

$$\left((-x+1)^{-1}-(-x+4)^{-1}\right)^2=\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{4-x}\right)^2=\left(\frac{4-x-1+x}{(1-x)(4-x)}\right)^2=\frac{9}{(1-x)^2\,(4-x)^2}.$$

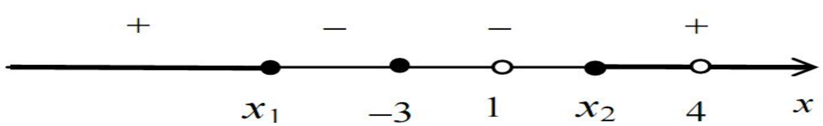
2) Тогда исходное неравенство примет вид:

$$\frac{\left|x^2+6x\right|}{(x-1)^2\,(x-4)^2}-\frac{9}{(x-1)^2\,(x-4)^2}\ge 0 \iff \begin{cases}\left|x^2+6x\right|-9\ge 0,\\ x\ne 1;\ x\ne 4\end{cases} \iff$$

$$\begin{cases}\left(x^2+6x-9\right)\left(x^2+6x+9\right)\ge 0,\\ x\ne 1;\ x\ne 4\end{cases} \iff \begin{cases}(x-x_1)(x-x_2)(x+3)^2\ge 0,\\ x\ne 1;\ x\ne 4,\end{cases}$$

где x_1 и x_2 корни квадратного трехчлена $\left(x^2+6x-9\right)$:

$x_1=-3-3\sqrt{2};\ x_2=-3+3\sqrt{2}$.



$x\in(-\infty;\ x_1]\cup\{-3\}\cup[x_2;4)\cup(4;+\infty)$.

Ответ: $\left(-\infty;-3-3\sqrt{2}\right]\cup\{-3\}\cup\left[-3+3\sqrt{2};4\right)\cup(4;+\infty)$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

Желаю успехов во всём!!!