

Нестандартные методы решения неравенств.

Цель работы - подготовка к ЕГЭ.

Выполнила работу

Зарьянцева Виктория Павловна-учитель высшей категории

МОУ «СОШ№84» .

Метод замены множителей (МЗМ)

- Суть этого метода заключается в том, чтобы с помощью равносильных преобразований заменить каждый множитель в области его существования на более простой множитель рациональный и имеющий те же интервалы знака постоянства (на множитель равного знака).
- Решение задания 15 ЕГЭ для учащихся становится доступным и простым.

Неравенства ,содержащие модули.

Условия равносильности для МЗМ

1. $|f(x)| \geq 0 \Leftrightarrow f^2(x) \geq 0.$

2. $|f(x)| \geq |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) \geq g^2(x) \Leftrightarrow f^2(x) - g^2(x) \geq 0 \Leftrightarrow$
 $(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \geq 0.$

Метод замены множителей

Вывод: $|f(x)| - |g(x)| \vee 0 \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \vee 0.$

3. $(|f(x)| - |g(x)|) \cdot \varphi(x) \vee 0 \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \cdot \varphi(x) \vee 0.$

4. $|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow |f(x)| - g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \leq 0. \end{cases}$

5. $|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow |f(x)| - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) < 0, \\ |f(x)| - g(x) > 0 \end{cases} \quad \forall x \in D(f) \cap D(g).$$

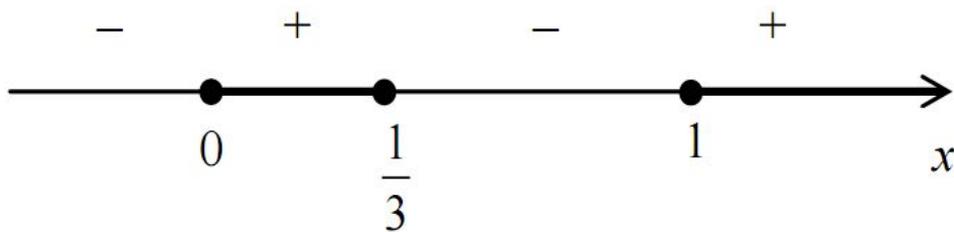
Пример 1. Решите неравенство $|x^2 - 7x + 2| \leq |x^2 + 5x - 2|$.

Решение. $|x^2 - 7x + 2| - |x^2 + 5x - 2| \leq 0$.

Применим *метод замены множителя* (МЗМ).

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 - 7x + 2 - x^2 - 5x + 2)(x^2 - 7x + 2 + x^2 + 5x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(-12x + 4)(2x^2 - 2x) \leq 0 \Leftrightarrow (3x - 1)(x - 1)x \geq 0$$



$$x \in \left[0; \frac{1}{3}\right] \cup [1; +\infty).$$

Пример 2. Решите неравенство

$$\left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \right| \leq 1.$$

Решение. $\frac{|x^2 - 5x + 4|}{|x^2 - 4|} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2 - 5x + 4| - |x^2 - 4| \leq 0, \\ x^2 - 4 \neq 0. \end{cases}$

Применим МЗМ.

$$\begin{cases} (x^2 - 5x + 4 - x^2 + 4)(x^2 - 5x + 4 + x^2 - 4) \leq 0, \\ x \neq -2, x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5x - 8)(2x - 5)x \geq 0, \\ x \neq -2, x \neq 2. \end{cases}$$



$$x \in [0; 1,6] \cup [2,5; +\infty).$$

Пример 3. Решите неравенство $|x^2 - 5x - 14| + 20 \geq 5|x + 2| + 4|x - 7|$.

Решение. Приведем исходное неравенство к каноническому виду.

$$|(x - 7)(x + 2)| + 20 - 5|x + 2| - 4|x - 7| \geq 0 \Leftrightarrow$$

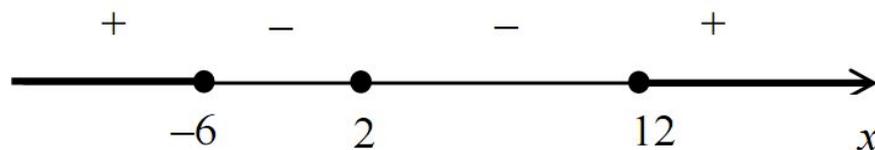
$$(|x - 7||x + 2| - 5|x + 2|) - (4|x - 7| - 20) \geq 0 \Leftrightarrow |x + 2|(|x - 7| - 5) - 4(|x - 7| - 5) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(|x - 7| - 5)(|x + 2| - 4) \geq 0 \tag{1}$$

Применим МЗМ.

$$(1) \Leftrightarrow (x - 7 - 5)(x - 7 + 5)(x + 2 - 4)(x + 2 + 4) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 12)(x - 2)^2(x + 6) \geq 0$$



$$x \in (-\infty; -6] \cup \{2\} \cup [12; +\infty).$$

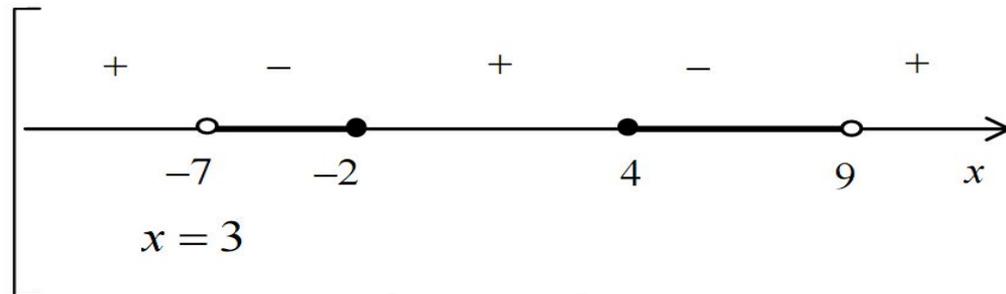
Пример 4. Решите неравенство

$$\frac{5|3-x|}{8-|x-1|} - |x-3| \geq 0.$$

Решение. $\frac{5|3-x|}{8-|x-1|} - |x-3| \geq 0 \Leftrightarrow |x-3| \left(\frac{5}{8-|x-1|} - 1 \right) \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{|x-3|(5-8+|x-1|)}{8-|x-1|} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|x-1|-3}{|x-1|-8} \leq 0, \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-1-3)(x-1+3)}{(x-1-8)(x-1+8)} \leq 0, \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{(x-4)(x+2)}{(x-9)(x+7)} \leq 0, \\ x=3. \end{cases}$$



$$x \in (-7; -2] \cup \{3\} \cup [4; 9).$$

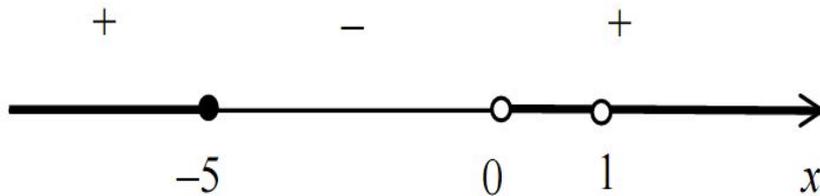
Пример 5. Решите неравенство

$$\frac{|2x+1|-|x-4|}{|3x-1|-|x+1|} \geq 0.$$

Решение. Применим МЗМ.

$$\frac{|2x+1|-|x-4|}{|3x-1|-|x+1|} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(2x+1-x+4)(2x+1+x-4)}{(3x-1-x-1)(3x-1+x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x+5)(x-1)}{(x-1)x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+5}{x} \geq 0, \\ x \neq 1 \end{cases}$$



$$x \in (-\infty; -5] \cup (0; 1) \cup (1; +\infty).$$

Пример 6. Решите неравенство

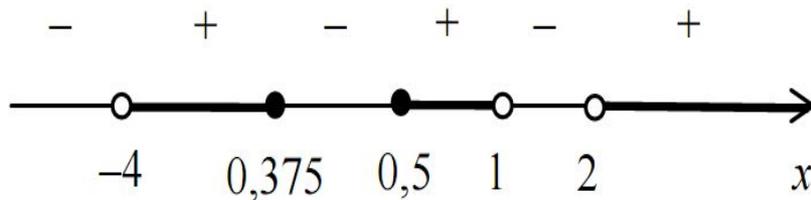
$$\frac{|5x-2|-|3x-1|}{|x^2-3x-3|-|x^2+7x-13|} \leq 0.$$

Решение. Применим МЗМ.

$$\frac{|5x-2|-|3x-1|}{|x^2-3x-3|-|x^2+7x-13|} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(5x-2-3x+1)(5x-2+3x-1)}{(x^2-3x-3-x^2-7x+13)(x^2-3x-3+x^2+7x-13)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(2x-1)(8x-3)}{(-10x+10)(2x^2+4x-16)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(2x-1)(8x-3)}{(x-1)(x+4)(x-2)} \geq 0$$



$$x \in (-4; 0,375] \cup [0,5; 1) \cup (2; +\infty).$$

Пример 7. Решите неравенство

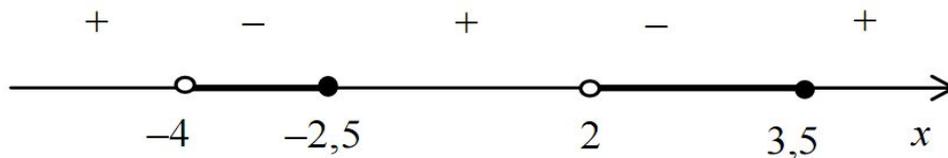
$$\frac{\|2x - 1| - 1| - 5}{\|x^2 + 2x| - 4| - 4} \leq 0.$$

Решение. Применим МЗМ.

$$\frac{\|2x - 1| - 1| - 5}{\|x^2 + 2x| - 4| - 4} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(\|2x - 1| - 1 - 5)(\|2x - 1| - 1 + 5)}{(\|x^2 + 2x| - 4 - 4)(\|x^2 + 2x| - 4 + 4)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(\|2x - 1| - 6)(\|2x - 1| + 4)}{(\|x^2 + 2x| - 8)\|x^2 + 2x|} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\|2x - 1| - 6}{\|x^2 + 2x| - 8} \leq 0, \\ \|x^2 + 2x| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{(2x - 1 - 6)(2x - 1 + 6)}{(x^2 + 2x - 8)(x^2 + 2x + 8)} \leq 0, \\ x \neq -2; x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(2x - 7)(2x + 5)}{(x + 4)(x - 2)} \leq 0, \\ x \neq -2; x \neq 0 \end{cases}$$



$$x \in (-4; -2,5] \cup (2; 3,5].$$

Пример 8. Решите неравенство $|5x^2 - 6|x| - 8| \leq 3|x^2 - 4|x| + 4|$.

Решение. $|5x^2 - 6|x| - 8| - |3x^2 - 12|x| + 12| \leq 0 \Leftrightarrow$

$$(5x^2 - 6|x| - 8 - 3x^2 + 12|x| - 12)(5x^2 - 6|x| - 8 + 3x^2 - 12|x| + 12) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(2|x|^2 + 6|x| - 20)(8|x|^2 - 18|x| + 4) \leq 0 \Leftrightarrow (|x|^2 + 3|x| - 10)(4|x|^2 - 9|x| + 2) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(|x| + 5)(|x| - 2)(4|x| - 1)(|x| - 2) \leq 0 \Leftrightarrow (|x| - 2)^2(4|x| - 1) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |x| = 2, \\ 4|x| - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ x = 2, \\ (4x - 1)(4x + 1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-2\} \cup [-0,25; 0,25] \cup \{2\}.$$

Пример 9. Решите неравенство

$$\frac{\left|2x^2 - x\right| - 3 - 2x^2 - x - 5}{\left|x - 1 - x^2\right| - \left|x^2 - 3x + 4\right|} \geq 0.$$

Решение.
$$\frac{\left|2x^2 - x\right| - 3 - (2x^2 + x + 5)}{\left|x - 1 - x^2\right| - \left|x^2 - 3x + 4\right|} \geq 0 \quad (1)$$

Так как $(2x^2 + x + 5) > 0 \quad \forall x \in R$ ($a = 2 > 0$, $D < 0$), то применим к неравенству (1) МЗМ.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\left(\left|2x^2 - x\right| - 3 - (2x^2 + x + 5)\right) \left(\left|2x^2 - x\right| - 3 + (2x^2 + x + 5)\right)}{(x - 1 - x^2 - x^2 + 3x - 4) (x - 1 - x^2 + x^2 - 3x + 4)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(\left|2x^2 - x\right| - (2x^2 + x + 8)\right) \left(\left|2x^2 - x\right| + (2x^2 + x + 2)\right)}{(2x^2 - 4x + 5) (2x - 3)} \geq 0 \quad (2)$$

Парабола расположена в верхней полуплоскости если дискриминант меньше 0 и ветви её направлены вверх.

Так как $(2x^2 + x + 8) > 0$, $(2x^2 + x + 2) > 0$, $(2x^2 - 4x + 5) > 0 \quad \forall x \in R$, то

$$(2) \Leftrightarrow \frac{|2x^2 - x| - (2x^2 + x + 8)}{2x - 3} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(2x^2 - x - 2x^2 - x - 8)(2x^2 - x + 2x^2 + x + 8)}{2x - 3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-(x + 4)(4x^2 + 8)}{2x - 3} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x + 4}{2x - 3} \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-4; 1,5).$$

Пример 10. Решите неравенство $\frac{(x+3)^2 + |x+3| - 20}{(|x-8|-6)(|2-x^2|-7)} \leq 0$.

Решение.

$$1) \frac{(x+3)^2 + |x+3| - 20}{(|x-8|-6)(|2-x^2|-7)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{(|x-8|-6)(|2-x^2|-7)} \leq 0, \quad (1)$$

где $f(x) = (x+3)^2 + |x+3| - 20$.

2) Заменяем функцию $f(x)$ на функцию равного знака.

Пусть $|x+3| = t$, $t \geq 0$, тогда $(x+3)^2 = |x+3|^2 = t^2$.

$$f(x) \vee 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + t - 20 \vee 0, \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t+5)(t-4) \vee 0, \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

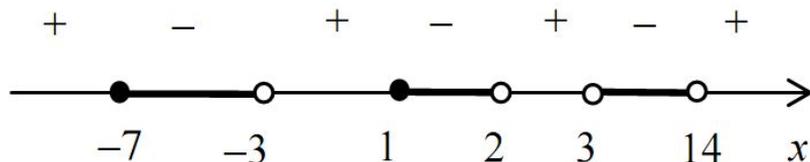
$$\begin{cases} t - 4 \vee 0, \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x+3| - 4 \vee 0.$$

Модуль положительного числа есть само это число

$$3) (1) \Leftrightarrow \frac{|x+3|-4}{(|x-8|-6)(|x^2-2|-7)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x+3-4)(x+3+4)}{(x-8-6)(x-8+6)(x^2-2-7)(x^2-2+7)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-1)(x+7)}{(x-14)(x-2)(x^2-9)(x^2+5)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+7)}{(x-14)(x-2)(x-3)(x+3)} \leq 0$$



$$x \in [-7; -3) \cup [1; 2) \cup (3; 14).$$

Пример 11. Решите неравенство $\left((-x+1)^{-1} - (-x+4)^{-1}\right)^2 \leq \frac{|x^2+6x|}{(x^2-5x+4)^2}$.

Решение.

1) Преобразуем левую часть неравенства.

$$\left((-x+1)^{-1} - (-x+4)^{-1}\right)^2 = \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{4-x}\right)^2 = \left(\frac{4-x-1+x}{(1-x)(4-x)}\right)^2 = \frac{9}{(1-x)^2(4-x)^2}.$$

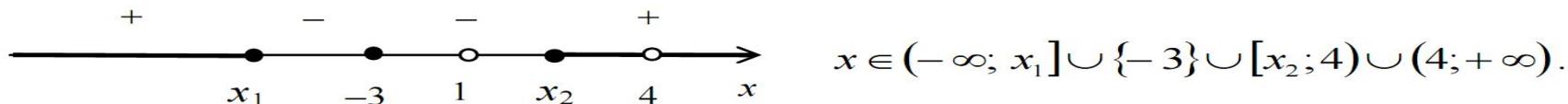
2) Тогда исходное неравенство примет вид:

$$\frac{|x^2+6x|}{(x-1)^2(x-4)^2} - \frac{9}{(x-1)^2(x-4)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2+6x|-9 \geq 0, \\ x \neq 1; x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x^2+6x-9)(x^2+6x+9) \geq 0, \\ x \neq 1; x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-x_1)(x-x_2)(x+3)^2 \geq 0, \\ x \neq 1; x \neq 4, \end{cases}$$

где x_1 и x_2 корни квадратного трехчлена (x^2+6x-9) :

$$x_1 = -3 - 3\sqrt{2}; \quad x_2 = -3 + 3\sqrt{2}.$$



Ответ: $(-\infty; -3 - 3\sqrt{2}] \cup \{-3\} \cup [-3 + 3\sqrt{2}; 4) \cup (4; +\infty).$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

Желаю успехов во всём!!!