

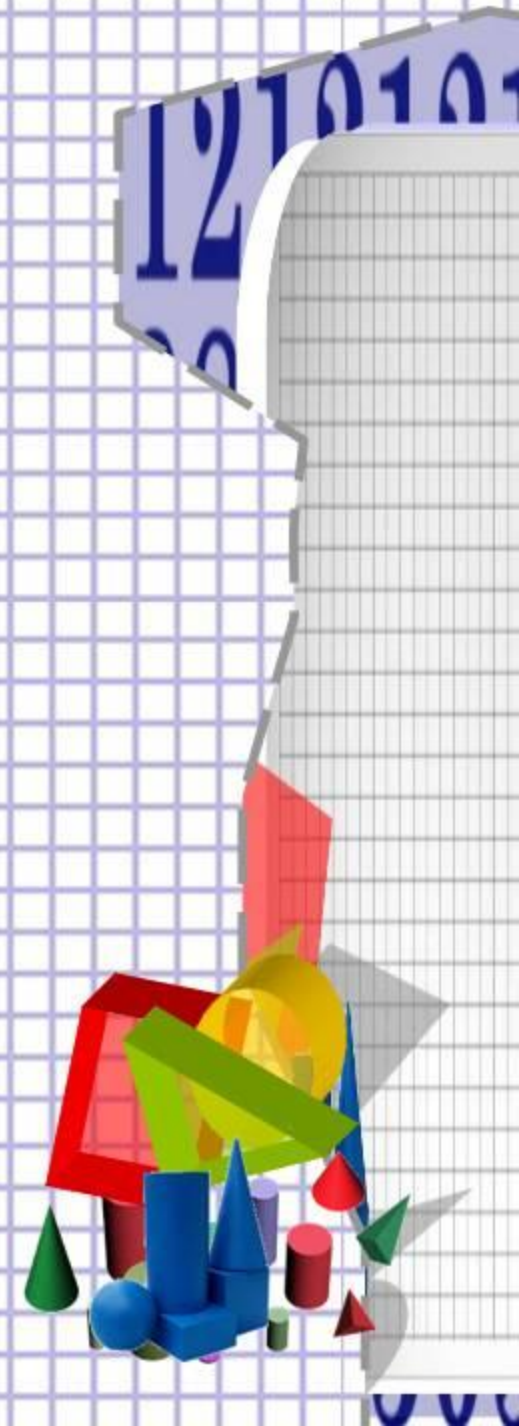
The background features a light blue grid pattern overlaid on a larger grid of numbers. The numbers are arranged in a repeating pattern: 1 2 1 0 1 0 1 0 1 0 1 2. In the bottom left corner, there are several 3D geometric shapes: a red square, a yellow square, a green square, a blue sphere, a blue cylinder, and a blue cone. The main title is centered on a white grid background.

ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

Подготовила:
Князева Ольга Николаевна

Числовые множества

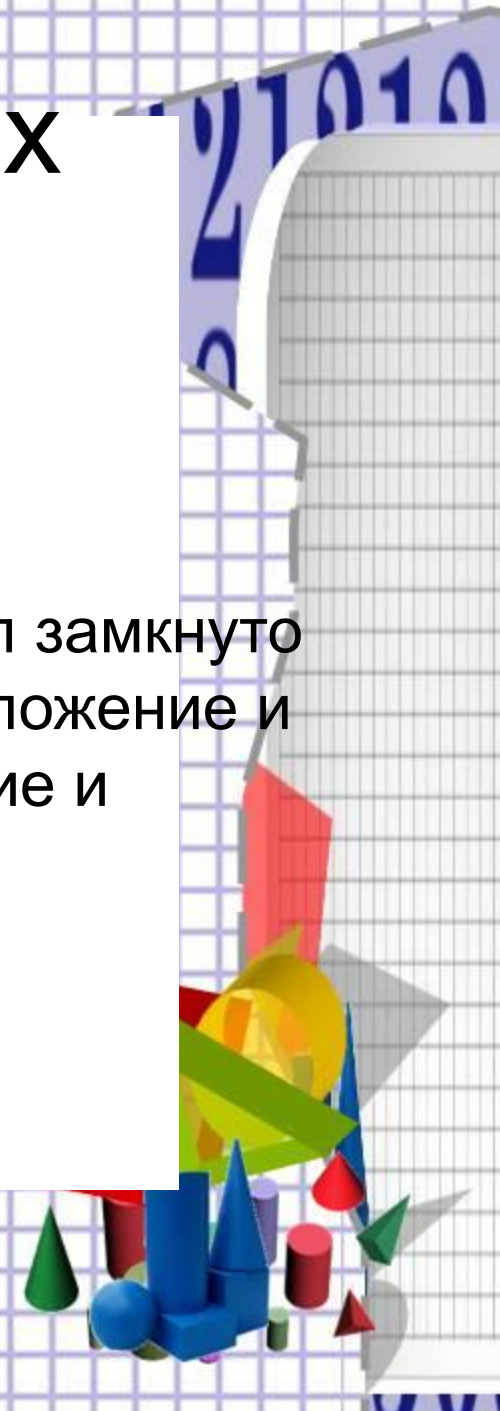
Обозначение	Название множества
\mathbb{N}	Множество натуральных чисел
\mathbb{Z}	Множество целых чисел
$\mathbb{Q} = m/n$	Множество рациональных чисел
$\mathbb{I} = R/Q$	Множество иррациональных чисел
\mathbb{R}	Множество вещественных чисел



Множество натуральных чисел

- Натуральные числа - это числа счета.
- $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$.
- Заметим, что множество натуральных чисел замкнуто относительно сложения и умножения, т.е. сложение и умножение выполняются всегда, а вычитание и деление в общем случае не выполняются

$$\forall n, m \in N \Rightarrow \begin{cases} n + m \\ n \cdot m \end{cases} \in N$$



Множество целых чисел.

- Введем в рассмотрение новые числа:
 - 1) число 0 (ноль),
 - 2) число $(-n)$, противоположное натуральному n .

При этом полагаем: $n + (-n) = (-n) + n = 0$,
 $-(-n) = n$.

Тогда множество целых чисел можно записать так:

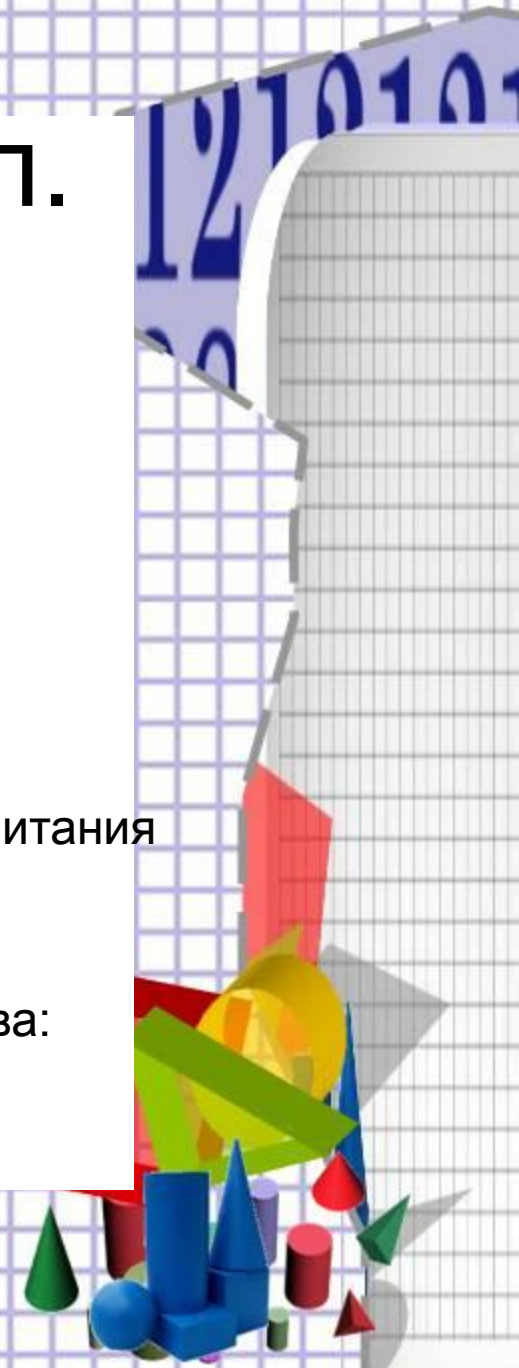
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}.$$

Заметим также, что:

Это множество замкнуто относительно сложения, вычитания и умножения, т.е.

Из множества целых чисел выделим два подмножества:

- 1) множество четных чисел $\{2 * k \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- 2) множество нечетных чисел $\{2 * k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$



Множество рациональных чисел.

- Множество рациональных чисел можно представить в виде:

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in Z, n \in Z \right\}$$

В частности, $\frac{m}{1} = m \in Z$ Таким образом, $Z \subset Q$

Множество рациональных чисел замкнуто относительно сложения, вычитания, умножения и деления (кроме случая деления на 0).

$$\forall p, q \in Q \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p + q, \\ p * q, \\ p - q, \\ \frac{p}{q}, q \neq 0 \end{array} \right\} \in Q$$

- Но в множестве рациональных чисел нельзя, например, измерить гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами $a = 1, b = 1$.

По теореме Пифагора гипотенуза будет равна $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$. Но число не будет рациональным, так как $\sqrt{2} \neq \frac{m}{n}$ ни для каких m и n .

- Нельзя решить уравнение $x^2 - 2 = 0$.
- Нельзя измерить длину окружности и т.д.

Заметим, что всякое рациональное число можно представить в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.

$$\frac{1}{8} = \frac{5^3}{2^3 * 5^3} = 0.125; \frac{2}{7} = 0.(285714); \frac{1}{3} = 0.(3)$$

Множество иррациональных чисел.

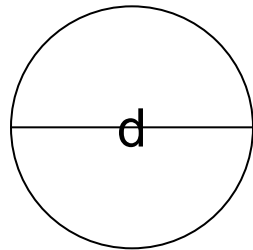
Числа, которые представляются бесконечной непериодической дробью, будем называть иррациональными.

Множество иррациональных чисел обозначим I .

Для иррациональных чисел нет единой формы обозначения. Отметим два иррациональных числа, которые обозначаются буквами – это числа π и e .

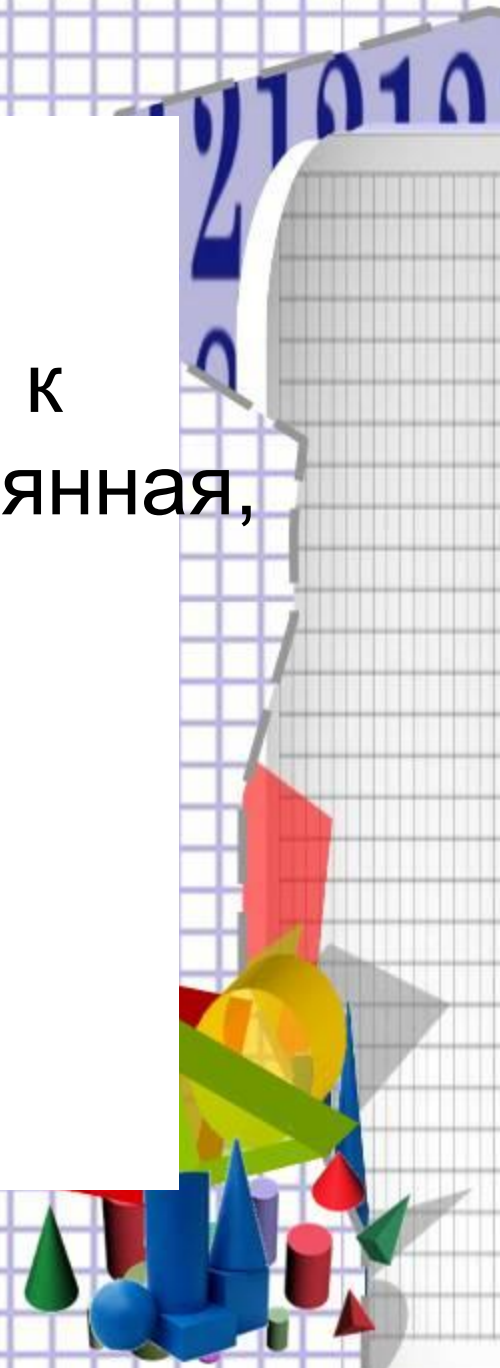
Число «пи» π

- Отношение длины окружности к диаметру есть величина постоянная, равная числу π



$$\pi = \frac{1}{d} \Rightarrow l = 2\pi r$$

l — длина



Число e .

- Если рассмотреть числовую последовательность:

$$2, \left(\frac{2}{3}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, \dots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \dots$$

с общим членом последовательности $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$,

то с ростом n значения будут возрастать, но никогда не будет больше 3.

- Это означает, что последовательность ограничена.
- Такая последовательность имеет предел, который равен числу e .

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,8$$



- Известно, что мощность иррациональных чисел больше мощности рациональных, т.е. Иррациональных чисел «больше», чем рациональных. Кроме того, как бы ни были близки два рациональных числа, между ними всегда есть иррациональное, т.е.

$$\forall p, q \in \mathbb{Q}, \exists r \in \mathbb{I} : p < r < q$$

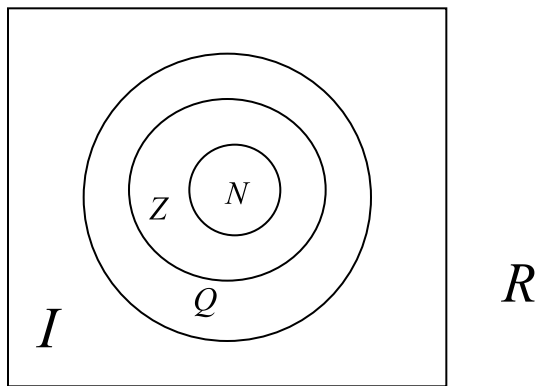


Множество вещественных (действительных) чисел.

- Множество вещественных чисел – это объединение множества рациональных чисел.

$$R = Q \cup I$$

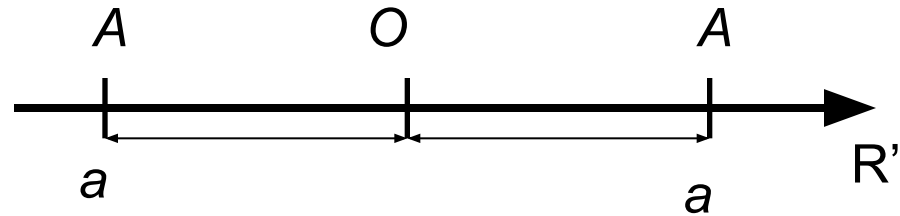
- Вывод: $N \subset Z \subset Q \subset R$



Определение модуля вещественного числа

- 1) Пусть на числовой оси точка A имеет координату a . Расстояние от точки начала отсчета O до точки A называется модулем вещественного числа a и обозначается $|a|$.

$$|a| = |OA|$$



- 2) Раскрытие модуля происходит по правилу:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

•Например:

$$|2,5| = 2,5 \quad \left| -3\frac{1}{3} \right| = -\left(-3\frac{1}{3}\right) = 3\frac{1}{3}$$

•**Замечание.**

Определение модуля можно расширить:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{где } f(x) \text{ — функция аргумента } x$$

•Пример. Раскрыть знак модуля.

$$|3x - 1| = \begin{cases} 3x - 1, & 3x - 1 \geq 0 \\ -(3x - 1), & 3x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow |3x - 1| = \begin{cases} 3x - 1, & x \geq \frac{1}{3} \\ -(3x - 1), & x < \frac{1}{3} \end{cases}$$

Основные свойства модуля

1) $|a| \geq 0$, при этом $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$,

2) $|a| = |-a|$

3) $|a + b| \leq |a| + |b|$

4) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

5) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

6) $|a^n| = |a|^n$

Решение примеров с использованием свойств модуля

- Пример 1. Вычислить

$$|2x - 3|, \text{ если } x = 1; x = 5; x = 1,5$$

- Пример 2. Раскрыть знак модуля

$$|4 - 7x|, \text{ если } x \leq \frac{4}{7}$$

- Пример 3.

- Вычислить 1) $|2x + 1| - |3 - 2x|$, если $x \in (1\frac{1}{2}, +\infty)$

- 2) $\sqrt{(5 - 3x)^2} - \sqrt{(x + 5)^2}$, если $x \in [0, 1]$

- 3) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{4x^2 + 12x + 9}$, если $x \in [-\pi, -2]$