

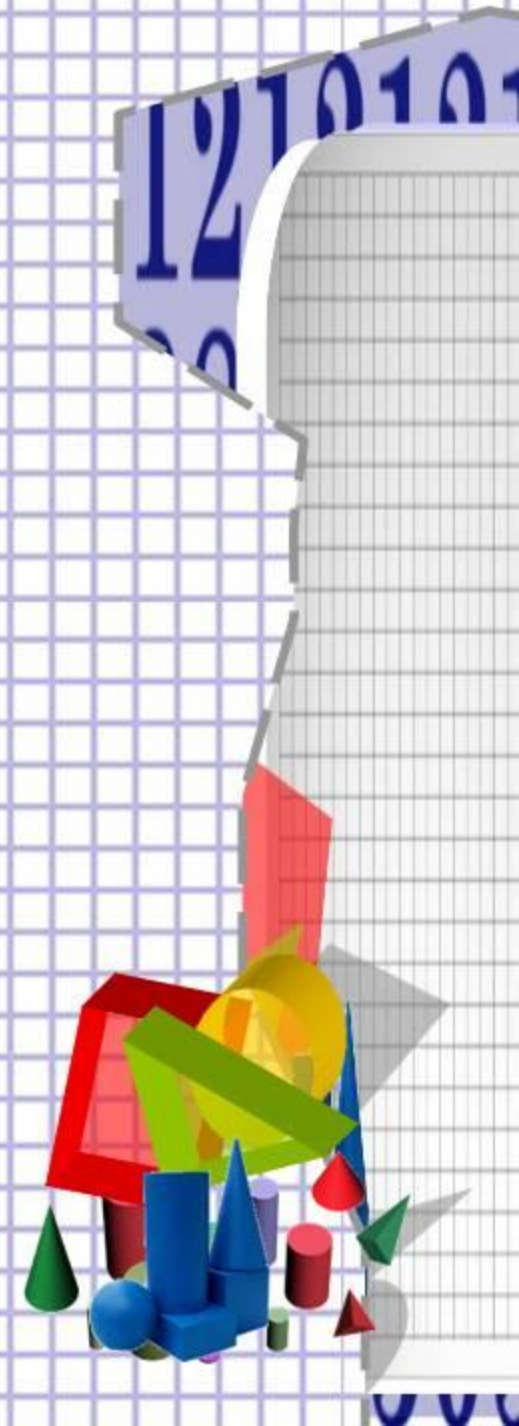
The background features a light blue grid pattern overlaid on a darker blue background with large, semi-transparent numbers (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) arranged in a grid. In the bottom-left corner, there are several 3D geometric shapes: a red square, a yellow square, a green square, a blue sphere, a blue cylinder, and a blue cone. The main title is centered on a white grid background that resembles a spiral notebook page.

# ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

Подготовила:  
Князева Ольга Николаевна

# Числовые множества

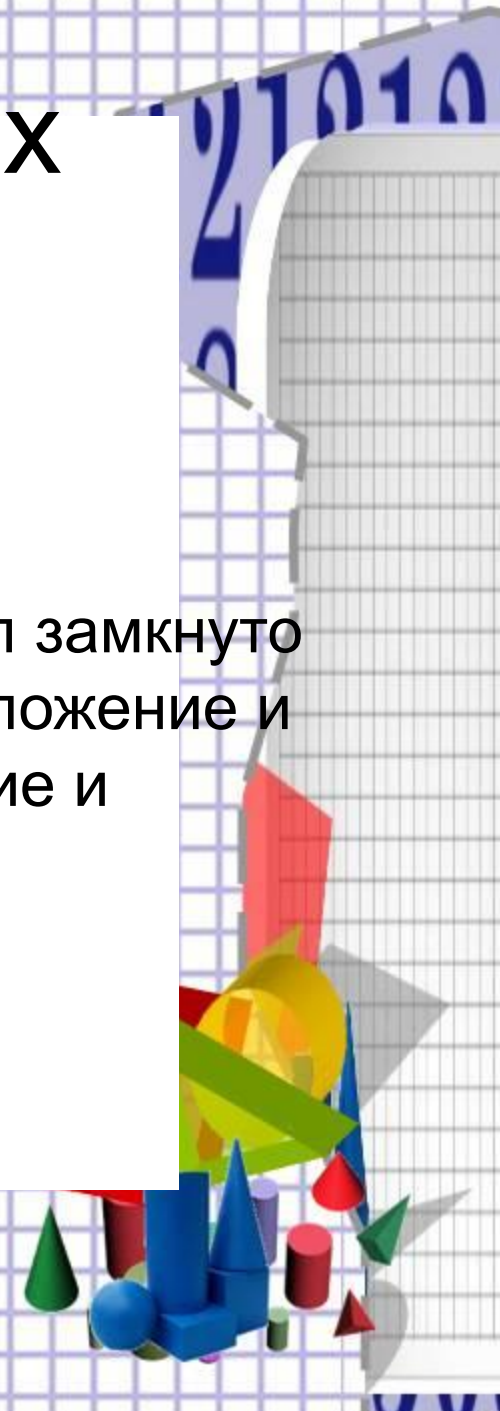
Обозначение	Название множества
$\mathbb{N}$	Множество натуральных чисел
$\mathbb{Z}$	Множество целых чисел
$\mathbb{Q} = m/n$	Множество рациональных чисел
$\mathbb{I} = R/Q$	Множество иррациональных чисел
$\mathbb{R}$	Множество вещественных чисел



# Множество натуральных чисел

- Натуральные числа - это числа счета.
- $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ .
- Заметим, что множество натуральных чисел замкнуто относительно сложения и умножения, т.е. сложение и умножение выполняются всегда, а вычитание и деление в общем случае не выполняются

$$\forall n, m \in N \Rightarrow \begin{cases} n + m \\ n \cdot m \end{cases} \in N$$



# Множество целых чисел.

- Введем в рассмотрение новые числа:
  - 1) число 0 (ноль),
  - 2) число  $(-n)$ , противоположное натуральному  $n$ .

При этом полагаем:  $n + (-n) = (-n) + n = 0$ ,  
 $-(-n) = n$ .

Тогда множество целых чисел можно записать так:

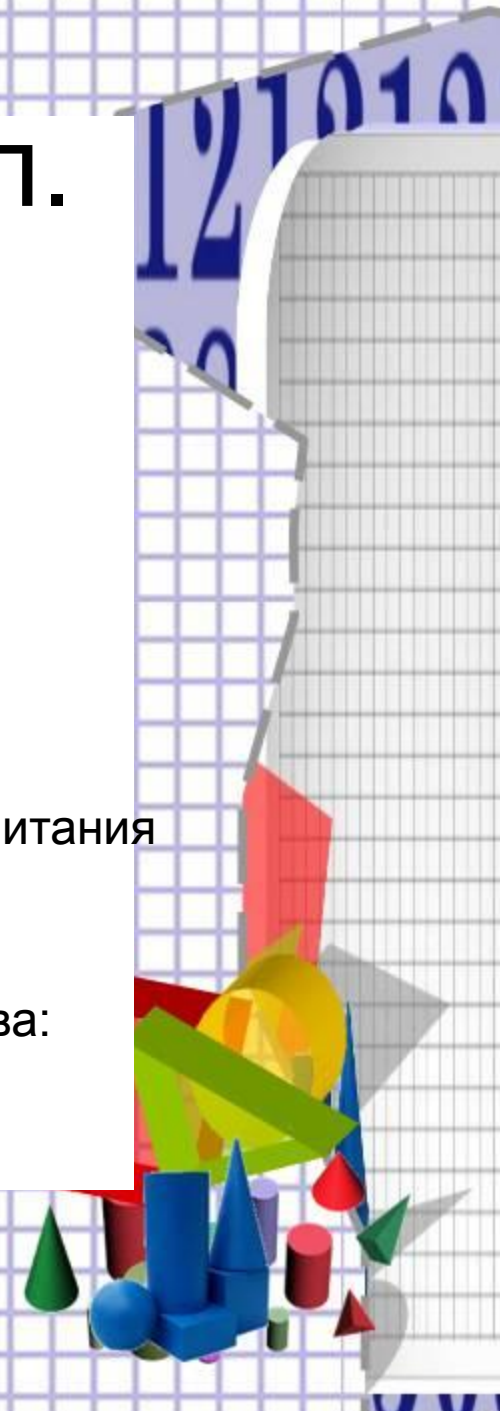
$$Z = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}.$$

Заметим также, что:

Это множество замкнуто относительно сложения, вычитания и умножения, т.е.

Из множества целых чисел выделим два подмножества:

- 1) множество четных чисел  $\{2 * k \mid k \in Z\}$
- 2) множество нечетных чисел  $\{2 * k + 1 \mid k \in Z\}$



# Множество рациональных чисел.

- Множество рациональных чисел можно представить в виде:

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in Z, n \in Z \right\}$$

В частности,  $\frac{m}{1} = m \in Z$  Таким образом,  $Z \subset Q$

Множество рациональных чисел замкнуто относительно сложения, вычитания, умножения и деления (кроме случая деления на 0).

$$\forall p, q \in Q \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p + q, \\ p * q, \\ p - q, \\ \frac{p}{q}, q \neq 0 \end{array} \right\} \in Q$$

- Но в множестве рациональных чисел нельзя, например, измерить гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами  $a = 1, b = 1$ .

По теореме Пифагора гипотенуза будет равна  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$ . Но число не будет рациональным, так как  $\sqrt{2} \neq \frac{m}{n}$  ни для каких  $m$  и  $n$ .

- Нельзя решить уравнение  $x^2 - 2 = 0$ .
- Нельзя измерить длину окружности и т.д.

Заметим, что всякое рациональное число можно представить в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.

$$\frac{1}{8} = \frac{5^3}{2^3 * 5^3} = 0.125; \frac{2}{7} = 0.(285714); \frac{1}{3} = 0.(3)$$

# Множество иррациональных чисел.

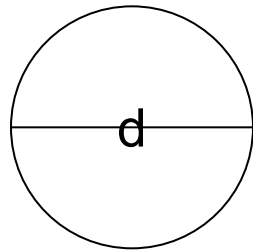
Числа, которые представляются бесконечной непериодической дробью, будем называть иррациональными.

Множество иррациональных чисел обозначим  $I$ .

Для иррациональных чисел нет единой формы обозначения. Отметим два иррациональных числа, которые обозначаются буквами – это числа  $\pi$  и  $e$ .

# Число «пи» $\pi$

- Отношение длины окружности к диаметру есть величина постоянная, равная числу  $\pi$



$$\pi = \frac{1}{d} \Rightarrow l = 2\pi r$$

$l$  — длина





# Число $e$ .

- Если рассмотреть числовую последовательность:

$$2, \left(\frac{2}{3}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, \dots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \dots$$

с общим членом последовательности  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,

то с ростом  $n$  значения будут возрастать, но никогда не будет больше 3.

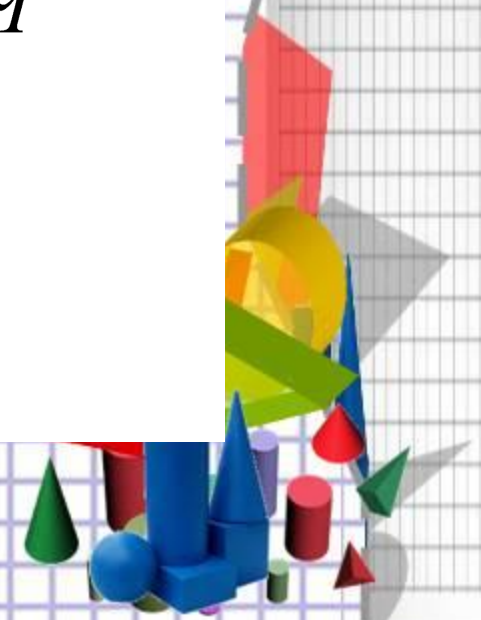
- Это означает, что последовательность ограничена.
- Такая последовательность имеет предел, который равен числу  $e$ .

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,8$$



- Известно, что мощность иррациональных чисел больше мощности рациональных, т.е. Иррациональных чисел «больше», чем рациональных. Кроме того, как бы ни были близки два рациональных числа, между ними всегда есть иррациональное, т.е.

$$\forall p, q \in \mathbb{Q}, \exists r \in \mathbb{I} : p < r < q$$

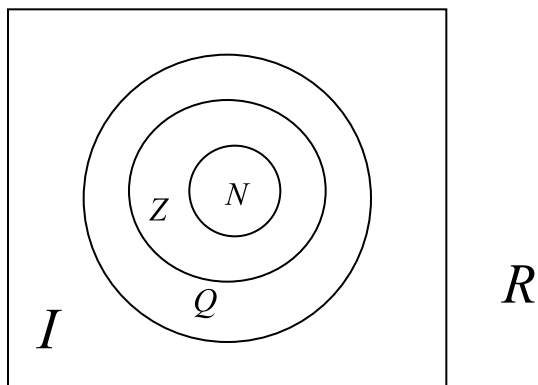


# Множество вещественных (действительных) чисел.

- Множество вещественных чисел – это объединение множества рациональных чисел.

$$R = Q \cup I$$

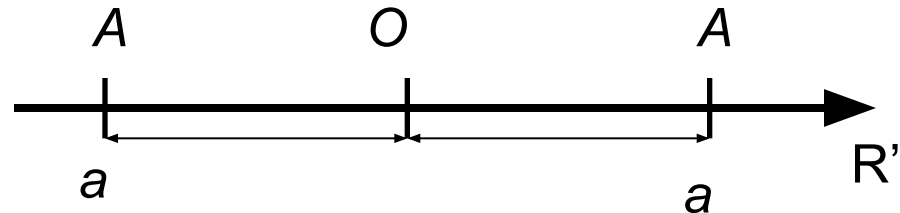
- Вывод:  $N \subset Z \subset Q \subset R$



# Определение модуля вещественного числа

- 1) Пусть на числовой оси точка  $A$  имеет координату  $a$ . Расстояние от точки начала отсчета  $O$  до точки  $A$  называется модулем вещественного числа  $a$  и обозначается  $|a|$ .

$$|a| = |OA|$$



- 2) Раскрытие модуля происходит по правилу:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

•Например:

$$|2,5| = 2,5 \quad \left| -3\frac{1}{3} \right| = -\left(-3\frac{1}{3}\right) = 3\frac{1}{3}$$

•**Замечание.**

Определение модуля можно расширить:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{где } f(x) \text{ — функция аргумента } x$$

•Пример. Раскрыть знак модуля.

$$|3x - 1| = \begin{cases} 3x - 1, & 3x - 1 \geq 0 \\ -(3x - 1), & 3x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow |3x - 1| = \begin{cases} 3x - 1, & x \geq \frac{1}{3} \\ -(3x - 1), & x < \frac{1}{3} \end{cases}$$

# Основные свойства модуля

1)  $|a| \geq 0$ , при этом  $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ,

2)  $|a| = |-a|$

3)  $|a + b| \leq |a| + |b|$

4)  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

5)  $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

6)  $|a^n| = |a|^n$

# Решение примеров с использованием СВОЙСТВ МОДУЛЯ

- Пример 1. Вычислить

$$|2x - 3|, \text{ если } x = 1; x = 5; x = 1,5$$

- Пример 2. Раскрыть знак модуля

$$|4 - 7x|, \text{ если } x \leq \frac{4}{7}$$

- Пример 3.

- Вычислить 1)  $|2x + 1| - |3 - 2x|$ , если  $x \in (1\frac{1}{2}, +\infty)$

- 2)  $\sqrt{(5 - 3x)^2} - \sqrt{(x + 5)^2}$ , если  $x \in [0, 1]$

- 3)  $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{4x^2 + 12x + 9}$ , если  $x \in [-\pi, -2]$