Сочетание из n элементов по k ($k \le n$)

Объяснение нового материала.

«Сколькими способами можно смешать по три краски из имеющихся пяти?».

Р е ш е н и е

Обозначим имеющиеся краски буквами латинского алфавита *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. *Выпишем возможные варианты смешивания красок, учитывая, что от порядка расположения красок результат не зависит:*

abc, abd, abe, ace, ade,acd

bcd, bce, bde

cde

Мы указали различные способы смешивания красок, в которых по-разному сочетаются три краски из данных пяти. Говорят, что мы составили все возможные сочетания из 5 элементов по 3.

Определение.

Сочетанием из n элементов по k называют любое множество, составленное из k элементов, выбранных из данных n элементов.

Подчеркиваем, что, в отличие от размещений, в сочетаниях не имеет значения, в каком порядке указаны элементы. Два сочетания из *n элементов по k отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.*

Обозначение.

C_n^k (читается «*C из n по k*»).

В рассмотренном примере мы нашли, что C_5^3 = 10.

(по первой букве французского слова combination – сочетание).

Разница заключается в том, что если в размещении переставить местами элементы, то получится другое размещение, но сочетание не зависит от порядка входящих в него элементов.

Сочетания

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Пример 1.

Сколькими различными способами из семи участников математического кружка можно составить команду из двух человек для участия в олимпиаде?

$$C_7^2 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 5!} = \frac{6\cdot 7}{2} = 21$$

Пример 2.

Из перетасованной колоды, состоящей из 36 карт, наугад взяты 4 карты. Какова вероятность того, что все взятые карты тузы?

$$C_{36}^{4} = \frac{36!}{4!(36-4)!} = \frac{36!}{4!\cdot 32!} =$$

$$= \frac{32!\cdot 33\cdot 34\cdot 35\cdot 36}{32!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 58905$$

$$P = \frac{4}{58905}$$

Итоги урока.

– Что называется сочетанием из *n* *элементов по k?*
– Запишите формулу вычисления числа сочетаний из *n элементов по k.*
– В чем отличие сочетания из *n* *элементов по k от размещения из n* *элементов по k.*

№ 768.

Р е ш е н и е

Выбираем 2 учащихся из 7, порядок выбора не имеет значения (оба выбранных пойдут на олимпиаду как полностью равноправные); количество способов выбора равно числу сочетаний из 7 по 2:

$$C_7^2 = \frac{7!}{2!5!} = \frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 21$$

О т в е т: 21 способ.

№ 770.

Р е ш е н и е

Выбор 6 из 10 без учета порядка:

$$C_{10}^{6} = \frac{10!}{6!4!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$$

О т в е т: 210 способов.

№ 772.
Р е ш е н и е

Из 11 человек 5 должны поехать в командировку:

а) Заведующий едет, нужно выбрать еще 4 из 10 оставшихся:

$$C_{10}^{4} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$$

б) Заведующий остается, нужно выбрать 5 из 10 сотрудников:

$$C_{10}^{5} = \frac{10!}{5!5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252$$

О т в е т: а) 210 способов; б) 252 способа.

№ 773.
Р е ш е н и е

а) Словарь выбирается, нужно выбрать еще 2 книги из 11:

$$C_{11}^{2} = \frac{11!}{2!9!} = \frac{10 \cdot 11}{1 \cdot 2} = 55$$

б) Словарь не выбирается, выбираем 3 книги из 11:

$$C_{11}^{3} = \frac{11!}{3!8!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3.} = 165$$

О т в е т: а) 55 способов; б) 165 способов.

№ 774. Р е ш е н и е

Сперва выбираем 4 маляров из 12:

$$C_{12}^{4}=\frac{12!}{4!8!}=\frac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=495$$ способов.

Затем выбираем 2 плотников из 5:

$$C_{5}^{2}=\frac{5!}{2!3!}=\frac{4\cdot 5}{1\cdot 2}=10$$ способов.

Каждый из способов выбора маляров можно скомбинировать с каждым выбором плотников, следовательно, всего способов (по комбинаторному правилу умножения):

$495\cdot 10 = 4950.$

О т в е т: 4950 способов.

№ 775.
Р е ш е н и е

Нужно сделать два выбора: 3 книги из 10 (способов) и 2 журнала из 4 (способов) – порядок выбора значения не имеет. Каждый выбор книг может сочетаться с каждым выбором журналов, поэтому общее число способов выбора по правилу произведения равно:

$$C_{10}^{3} \cdot C_{4}^{2} = \frac{10! \cdot 4!}{3! \cdot 7! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 720$$

О т в е т: 720 способов.