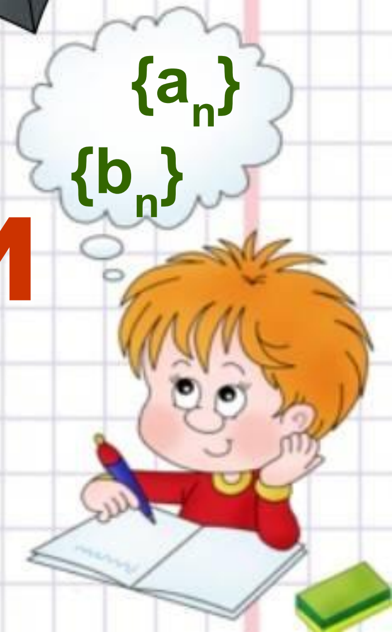
Прогрессии формулы



- **Арифметическая прогрессия**
- **Разность прогрессии**
- **Общий член прогрессии**
- **Характеристическое свойство прогрессии**
- **Сумма 2-х членов прогрессии**
- **Сумма Сумма n-Сумма n-первых членов АП**

- **Геометрическая прогрессия**
- **Знаменатель прогрессии**
- **Общий член прогрессии**
- **Характеристическое свойство прогрессии**
- **Произведение 2-х членов прогрессии**
- **Сумма Сумма n-Сумма n-первых членов ГП**
- **Сумма бесконечно убывающей ГП**

Арифметическая прогрессия

- $\{a_n\}$ или $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$
- **Разность прогрессии**
- Число, которое надо прибавить к любому члену АП, чтобы получить последующий, называется разностью АП
- $d = a_n - a_{n-1}$

$$\begin{cases} d > 0, \{a_n\} \uparrow \\ d = 0, \{a_n\} - const \\ d < 0, \{a_n\} \downarrow \end{cases}$$

Арифметическая прогрессия

- Общий член прогрессии
- $a_n = a_1 + d(n-1)$
- Любой член АП, начиная со II, равен I ее члену, сложенному с произведением разности прогрессии на число членов, предшествующих определяемому
- или

$$\begin{cases} a_n = a_1 + dn - d = dn + (a_1 - d) \\ \exists\, d = k, \quad a_1 - d = b, \text{то } \mathrm{a}_\mathrm{n} = kn + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \dfrac{a_n - a_1}{n-1} \\ n = \dfrac{a_n - a_1}{d} + 1 \end{cases}$$

Арифметическая прогрессия

- Характеристическое свойство прогрессии

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

- Всякий член прогрессии, начиная со II, есть среднее арифметическое предыдущего и и последующего членов (соседних с ним)

$$a_n = \frac{a_{n-m} + a_{n+m}}{2}$$

- Всякий член АП, начиная со II, есть среднее арифметическое членов, равноудаленных от него

Арифметическая прогрессия

- Сумма 2-х членов прогрессии

- Во всякой АП $\begin{cases} a_n + a_m = a_k + a_p \\ \exists\, n + m = k + p \end{cases}$

- В частности, если прогрессия имеет конечное число членов, то сумма 2-х членов, равноотстоящих от ее концов, равна сумме крайних членов

- $a_1 + a_n = a_m + a_{n-m+1}$

Арифметическая прогрессия

- **Сумма n-первых членов АП**

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{2S_n}{n} - a_n \\ \textit{для } n: \quad dn^2 + (2a_1 - d)n - 2S_n = 0 \end{cases}$$

Геометрическая прогрессия

- ÷÷ $\{b_n\}$ или ÷÷ $b_1, b_2, b_3, \dots b_n, \dots$

- **Знаменатель прогрессии**
- число, на которое надо умножить любой член ГП, чтобы получить последующий, называется знаменателем ГП

$$q = \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

$$q - const \begin{cases} q > 1, \{b_n\} \uparrow \\ q < 1, \{b_n\} \downarrow \\ q < 0, \{b_n\} - знакопеременная \end{cases}$$

Геометрическая прогрессия

- Общий член прогрессии
- $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
- Любой член ГП, начиная со II, равен I ее члену, умноженному на знаменатель прогрессии в степени, показатель которой равен числу членов, предшествующих определяемому
- =>

$$\div\, b_1,\ b_1 \cdot q,\ b_1 \cdot q^2,\ \ldots\ b_1 \cdot q^{n-1},\ \ldots$$

$b_n = b_m \cdot q^{n-m}$ – формула «удобная» для решения некоторых задач

Геометрическая прогрессия

- Характеристическое свойство прогрессии

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

- Всякий член прогрессии, начиная со II, есть среднее пропорциональное (геометрическое) предыдущего и и последующего членов (соседних с ним)

$$b_n^2 = b_{n-m} \cdot b_{n+m}$$

- Всякий член ГП, начиная со II, есть среднее пропорциональное членов, равноудаленных
 от него

Геометрическая прогрессия

- Произведение 2-х членов прогрессии
- Во всякой ГП

$$\begin{cases} b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_p \\ \exists\, n + m = k + p \end{cases}$$

- В частности, если прогрессия имеет конечное число членов, то произведение 2-х членов, равноотстоящих от ее концов, равно произведению крайних членов
- $b_1 \cdot b_n = b_m \cdot b_{n-m+1}$

Геометрическая прогрессия

- **Сумма n-первых членов ГП**
- **$q = 1,\quad S_n = n \cdot b_1$**

$$q \neq 1 \begin{cases} \{b_n\} \uparrow, \quad S_n = \dfrac{b_n \cdot q - b_1}{q-1} = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1} \\ \{b_n\} \downarrow \quad S_n = \dfrac{b_1 - b_n \cdot q}{1-q} = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q} \end{cases}$$

$$\Rightarrow q \neq 1 \begin{cases} \{b_n\} \uparrow, \quad b_1 = \dfrac{S_n(q-1)}{q^n - 1} \\ \{b_n\} \downarrow \quad b_1 = \dfrac{S_n(1-q)}{1-q^n} \end{cases}$$

Геометрическая прогрессия

- Бесконечная геометрическая прогрессия, знаменатель которой по абсолютной величине меньше 1, называется бесконечно убывающей геометрической прогрессией
- **Суммой бесконечно убывающей ГП называют предел суммы n-первых ее членов при бесконечном возрастании n (n→∞)**

$$\underset{n\to\infty}{S_n} = \lim_{n\to\infty}(b_1 + b_2 + \ldots + b_n), \quad |q| < 1$$

- => Сумма бесконечно убывающей ГП равна частному от деления I члена этой прогрессии на разность единицы и знаменателя прогрессии

$$\underset{n\to\infty}{S_n} = \frac{b_1}{1-q}, \quad |q| < 1$$

Арифметическая прогрессия

÷ $\{a_n\}$ или ÷ $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$

1. $d = a_n - a_{n-1}$
$$\begin{cases} d > 0, \{a_n\}\uparrow \\ d = 0, \{a_n\} - const \\ d < 0, \{a_n\}\downarrow \end{cases}$$

2. $a_n = a_1 + d(n-1)$ **или**
$$\begin{cases} a_n = a_1 + dn - d = dn + (a_1 - d) \\ \exists\, d = k, \quad a_1 - d = b, \text{ то } a_n = kn + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = \dfrac{a_n - a_1}{n-1} \\ n = \dfrac{a_n - a_1}{d} + 1 \end{cases}$$

3. $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

4. $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{2S_n}{n} - a_n \\ \text{для } n: \quad dn^2 + (2a_1 - d)n - 2S_n = 0 \end{cases}$$

5. Дополнительные формулы:

1) $a_1 + a_n = a_m + a_{n-m+1}$

2) $\begin{cases} a_n + a_m = a_k + a_p \\ \exists\, n + m = k + p \end{cases}$

3) $a_n = a_m + d(n-m)$

4) $a_n = \dfrac{a_{n-m} + a_{n+m}}{2}$

5) $d = \dfrac{a_n - a_p}{n - p}$

Геометрическая прогрессия

∺ $\{b_n\}$ или ∺ $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n, \ldots$

1. $q = \dfrac{b_n}{b_{n-1}}$
$$\begin{cases} q > 1, \{b_n\}\uparrow \\ \qquad\qquad q - const \\ q < 1, \{b_n\}\downarrow \\ q < 0, \{b_n\} - \text{знакопеременная} \end{cases}$$

2. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

3. $b_n^2 = b_{n-1}\cdot b_{n+1}$

4. $q \neq 1 \begin{cases} \{b\}_n \uparrow, \quad S_n = \dfrac{b_n\cdot q - b_1}{q-1} = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1} \\ \{b_n\}\downarrow \quad S_n = \dfrac{b_1 - b_n\cdot q}{1-q} = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q} \end{cases}$

$\Rightarrow q \neq 1 \begin{cases} \{b_n\}\uparrow, \quad b_1 = \dfrac{S_n(q-1)}{q^n - 1} \\ \{b_n\}\downarrow \quad b_1 = \dfrac{S_n(1-q)}{1-q^n} \end{cases}$

$q = 1$, $S_n = n\cdot b_1$

5. $\underset{n\to\infty}{S_n} = \dfrac{b_1}{1-q}, \quad |q| < 1$

6. Дополнительные формулы:

1) $b_1 \cdot b_n = b_m \cdot b_{n-m+1}$

2) $\begin{cases} b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_p \\ \exists\, n + m = k + p \end{cases}$

3) $b_n = b_m \cdot q^{n-m}$

4) $b_n^2 = b_{n-m}\cdot b_{n+m}$