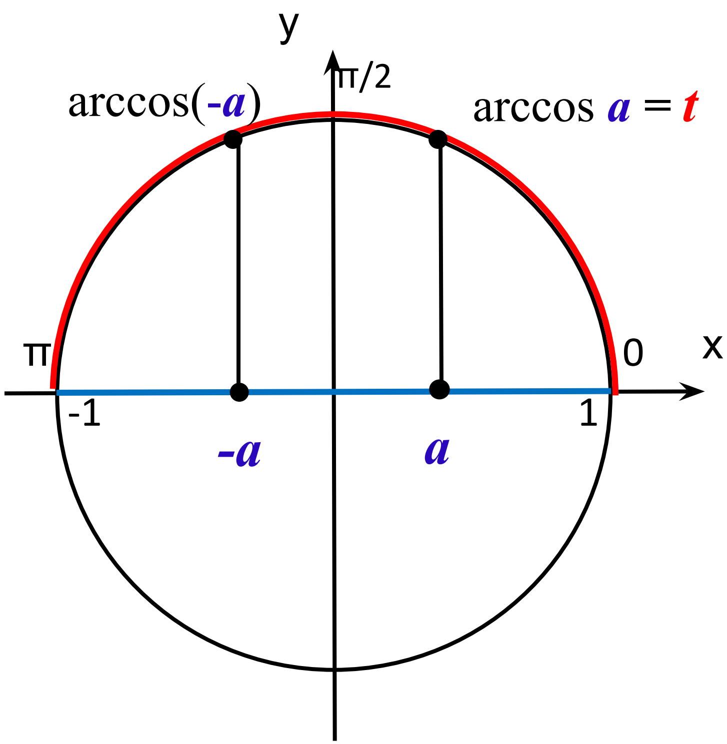
РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Угол в градусах	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Угол в радианах	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.	0	не сущ.	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не сущ.	0	не сущ.

Арккосинус



Арккосинусом числа ***a*** называется такое число (угол) ***t*** из [0;π], что **cos *t* = *a*.**

Причём, | ***a*** |≤ **1**.

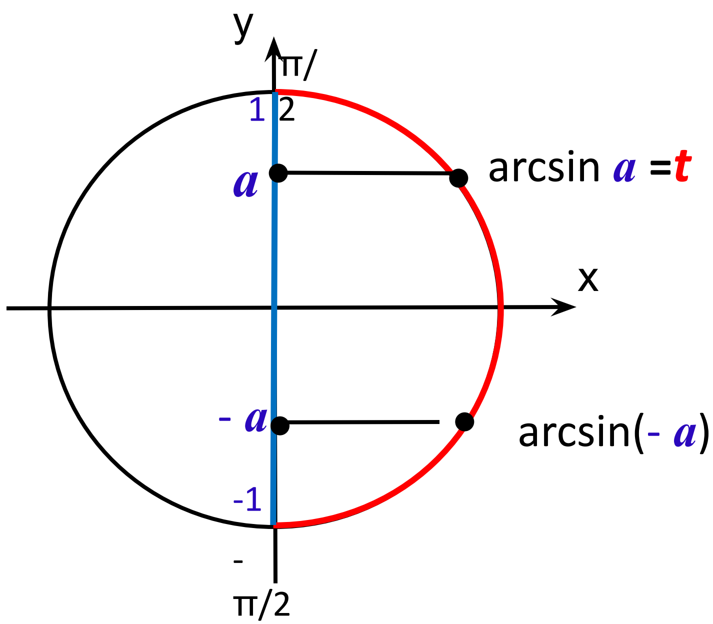
$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$

Примеры:

1) $\arccos(-1) = \boldsymbol{\pi}$

2) $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

Арксинус



Арксинусом числа ***a*** называется такое число (угол) **t** из **[-π/2;π/2]**, что ***sin t = a.***
Причём, | ***a*** |≤ **1**.

arcsin(- *a*)= - arcsin *a*

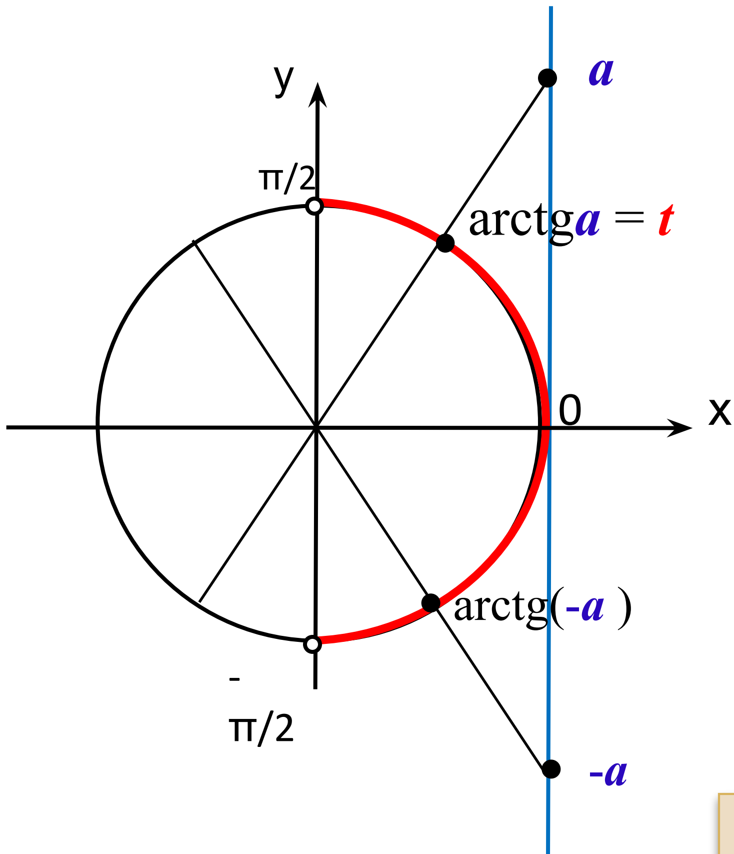
Примеры:

$1)\ arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

$2)arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$

$3)arcsin0 = 0$

Арктангенс



Арктангенсом числа ***a*** называется такое число (угол) ***t*** из (-π/2;π/2), что ***tg t* = *a* .**
Причём, ***a*** **Є R.**

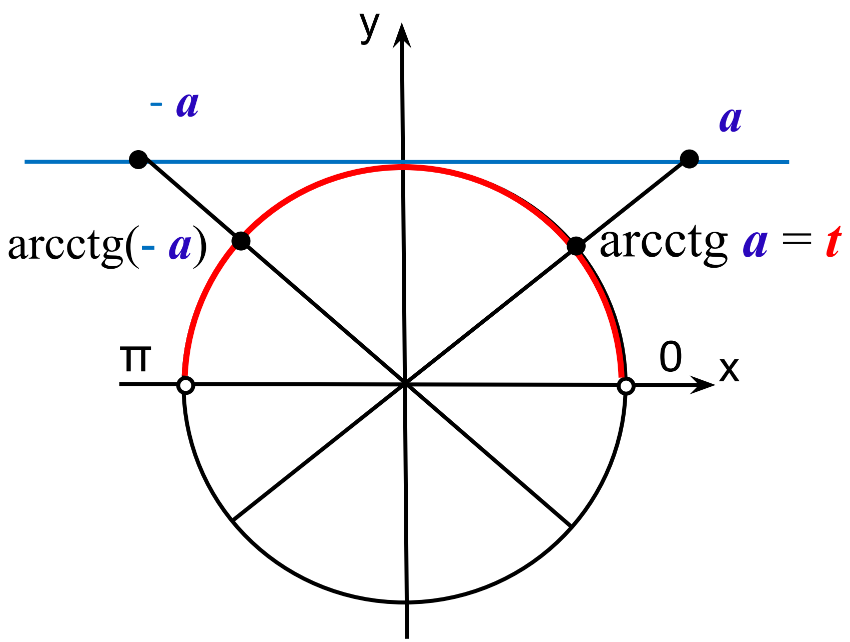
arctg(-*a*) = - arctg ***a***

Примеры:

1) arctg√3/3 = | π/6

2) arctg(-1) = | -π/4

Арккотангенс



Арккотангенсом числа ***a*** называется такое число (угол) ***t*** из (0;π), что c***tg*** ***t*** **=** ***a*****.**
Причём, ***a*** ЄR .

arcctg(- ***a***) = π – arcctg ***a***

Примеры:

1) arcctg(-1) = 3π/4

2) arcctg√3 = π/6

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений

1.cost = *a* , где |***a***| ≤ 1

$$\left[\begin{array}{l} t = \arccos \boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \\ t = -\arccos \boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

или

$$t = \pm \arccos \boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z$$

Частные случаи

1) <u>cost=0</u>
t = π/2+πk, kЄZ

2) <u>cost=1</u>
t = 2πk, kЄZ

3) <u>cost = -1</u>
t = π+2πk, kЄZ

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений

$$2.\quad \sin t = a,\ \textit{где}\ |a| \le 1$$

$$\left[\begin{array}{l} t = \arcsin a + 2\pi k, k \in Z \\ t = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

или

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z$$

Частные случаи

1) <u>sint=0</u>

$t = \pi k,\ k \in Z$

2) <u>sint=1</u>

$t = \pi/2+2\pi k,\ k \in Z$

3) <u>sint = - 1</u>

$t = -\pi/2+2\pi k,\ k \in Z$

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений

3. $\mathrm{tg}\,t = \boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{a} \in R$

$t = \mathrm{arctg}\, \boldsymbol{a} + \pi k, \ k \in Z$

4. $\mathrm{ctg}\,t = \boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{a} \in R$

$t = \mathrm{arcctg}\, \boldsymbol{a} + \pi k, \ k \in Z$

Виды тригонометрических уравнений

1.Сводимые к квадратным

Решаются методом введения новой переменной

$$a\cdot\sin^2 x + b\cdot\sin x + c=0$$

Пусть $\sin x = p$, где $|p| \le 1$, тогда $a\cdot p^2 + b\cdot p + c = 0$

Найти корни, вернуться к замене и решить простые уравнения.

Пример. Решить уравнение: $2\cos^2(x+\pi/6)-3\sin(\pi/3-x)+1=0$.

Решение. Используя формулы приведения, имеем:

$$2\cos^2(x+\pi/6)-3\cos(x+\pi/6)+1=0,$$

делаем замену: $\cos(x+\pi/6)=y$, тогда $2y^2-3y+1=0$,

находим корни: $y_1=1$, $y_2=1/2$, откуда следуют два случая:

1). $\cos(x+\pi/6)=1$, 2). $\cos(x+\pi/6)=1/2$,

$x+\pi/6=2\pi k$, $x+\pi/6=\pm\arccos(1/2)+2\pi n$,

$x_1=-\pi/6+2\pi k$; $x_2=\pm\pi/3-\pi/6+2\pi n$.

Виды тригонометрических уравнений

2.Однородные

1)Первой степени:

Решаются делением на cos x (или sinx) и методом введения новой переменной.

a·sinx + b·cosx = 0

Т.к. sinx и cosx одновременно не равны нулю, то разделим обе части уравнения на cosx (или на sinx). Получим: простое уравнение

a·tgx + b = 0 или tgx = m

Пример. Решите уравнение sinx + 2cosx = 0.

Решение: Разделим обе части уравнения на cosx.

Получим $\frac{\sin x}{\cos x} + 2\frac{\cos x}{\cos x} = 0$

$$tgx + 2 = 0$$

$$tgx = -2$$

$$x = -arctg 2 + \pi k,\ k \in Z$$

Ответ: $-arctg 2 + \pi k,\ k \in Z$

Виды тригонометрических уравнений

2) Однородные уравнения второй степени:

Решаются делением на $\cos^2 x$ (или $\sin^2 x$) и методом введения новой переменной.

$$\mathbf{a\cdot\sin^2x + b\cdot\sin x\cdot\cos x + c\cdot\cos^2x = 0}$$

Разделим обе части на $\cos^2x$. Получим квадратное уравнение:

$$a\cdot tg^2x + b\cdot tgx + c = 0.$$

П р и м е р . Решить уравнение: $3\sin^2 x + 4\sin x\cdot\cos x + 5\cos^2 x = 2.$

Р е ш е н и е . $3\sin^2 x + 4\sin x\cdot\cos x + 5\cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x,$

$\sin^2 x + 4\sin x\cdot\cos x + 3\cos^2 x = 0,$

$tg^2 x + 4\,tg\,x + 3 = 0,$ отсюда $y^2 + 4y + 3 = 0,$

корни этого уравнения: $y_1 = -1,\ y_2 = -3,$ отсюда

1) $tg\,x = -1,$ 2) $tg\,x = -3,$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z;\ -arctg3 + \pi n,\ n \in Z$

Виды тригонометрических уравнений

3. Уравнение вида:

$A \sin x + B \cos x = C.$ $A, B, C \neq 0$

1. $\sin 2x = \sin x$

$2\sin x \cos x - \sin x = 0$

$\sin x(2\cos x - 1) = 0$

$\sin x = 0$ или $\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \pi k, k \in Z.$ $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k.$

2. $3\sin x = 2\cos^2 x$

$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

$\sin x = t$

$2t^2 + 3t - 2 = 0$

$t = \frac{1}{2}$ $t = -2$

$\sin x = \frac{1}{2}$ $\sin x = -2$

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$ Нет решения.

$\sin x + \cos x = 1.$

Р е ш е н и е . Перенесём все члены уравнения влево:

$\sin x + \cos x - 1 = 0,$

$\sin x - 2\sin^2(x/2) = 0,$

$2\sin(x/2)\cdot\cos(x/2) - 2\sin^2(x/2) = 0,$

$2\sin(x/2)\cdot[\cos(x/2) - \sin(x/2)] = 0,$

1). $\sin(x/2) = 0,$ 2). $\cos(x/2) - \sin(x/2) = 0,$

$x/2 = \pi k,$ $\tan(x/2) = 1,$

$x_1 = 2\pi k;$ $x/2 = \arctan 1 + \pi n,$

$x/2 = \pi/4 + \pi n,$

$x_2 = \pi/2 + 2\pi n.$

Виды тригонометрических уравнений

4. Решение тригонометрических уравнений с помощью универсальной тригонометрической подстановки

A sinx + B cosx = C

Решаются с помощью введения вспомогательного аргумента.

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \qquad tgx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}} \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

$$3\sin x + 4\cos x = 5, x \in Z$$

$$3\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} + 4\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 5$$

$$\frac{6tg\frac{x}{2}+4-4tg^2\frac{x}{2}-5-5tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 0$$

$$\begin{cases} 9tg^2\frac{x}{2} - 6tg\frac{x}{2} + 1 = 0 \\ 1+tg^2\frac{x}{2} \neq 0 \end{cases}$$

$$\left(3tg\frac{x}{2} - 1\right)^2 = 0$$

$$tg\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x}{2} = arctg\frac{1}{3} + \pi n, n \in Z$$

$$x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

При переходе от уравнения (1) к уравнению (2), могла произойти потеря корней, значит необходимо проверить, являются ли корни уравнения корнями данного уровнения.

$$\cos\frac{x}{2} = 0$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$$

Проверка

Если $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$,

$$3\sin(\pi + 2\pi n) + 4\cos(\pi + 2\pi n) = 5, x \in Z$$

$0 + 4(-1) = 5$ - не верно, значит $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$ не является корнями исходного уравнения

Ответ: $x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi n, n \in Z$