тема:

Комбинаторные задачи

гимназия 64
учитель математики
Котельникова Н. В.

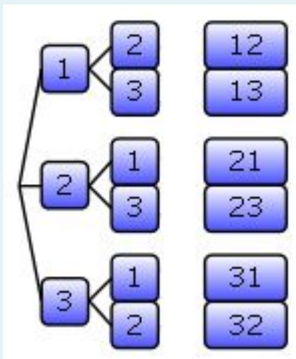
В заданиях по комбинаторике обычно нужно выяснить, возможно ли составить комбинацию определённого вида и сколько различных комбинаций можно составить.

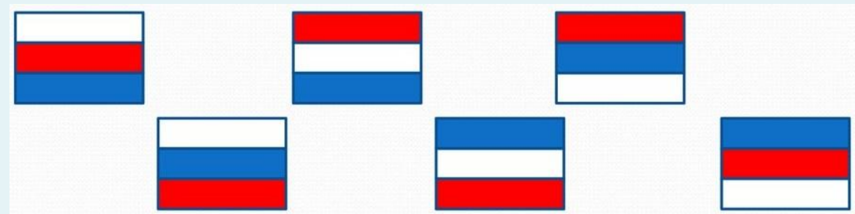
Пример:

- 1. Сколько различных двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2 и 3, если каждую использовать только один раз?
- 2. Сколько различных флагов можно составить из трех горизонтальных полосок (одинакового размера) белого, синего и красного цвета?
- 3. Сколькими различными способами можно составить танцевальную пару, если в коллективе 3 мальчика и 4 девочки?
- 4. Сколькими различными способами можно образовать пару дежурных, если в классе остались Надя, Вика, Саша и Юра?
- 5. Сколькими различными способами можно выбрать двух учеников (одного - мыть доску, второго - подметать пол), если в классе остались Надя, Вика, Саша и Юра?

*Один из способов решения задач комбинаторики — это рассмотреть все возможные комбинации элементов — **полным перебором вариантов**.*

***Древовидная диаграмма* — один из способов показать и систематизировать все рассуждения. С помощью древовидной диаграммы осуществляется полный перебор.**





2. Сколько различных флагов можно составить из трех горизонтальных полосок (одинакового размера) белого, синего и красного цвета?

1. Сколько различных двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2 и 3, если каждую использовать только один раз?

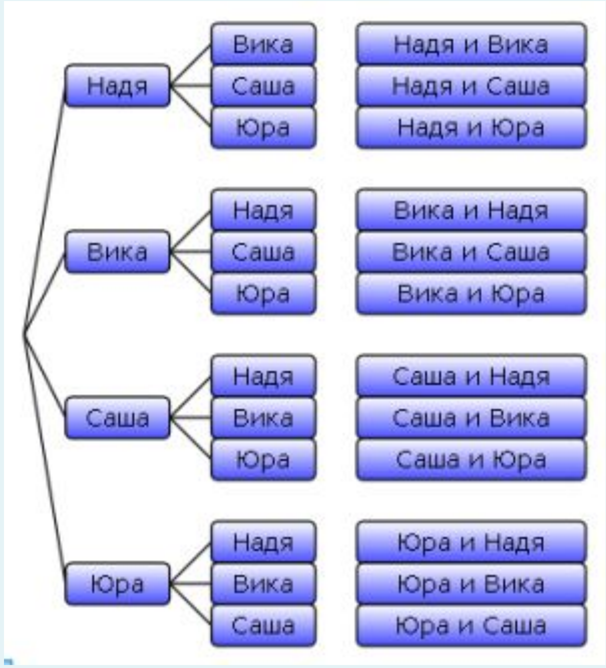
$$P_n = n!$$

ПЕРЕСТАНОВКИ

4. Сколькими различными способами можно образовать пару дежурных, если в классе остались Надя, Вика, Саша и Юра? *(Ответ: 6).*

5. Сколькими различными способами можно выбрать двух учеников (одного - мыть доску, второго - подметать пол), если в классе остались Надя, Вика, Саша и Юра? *(Ответ: 12)*

№ 4



№ 5 *Используется та же древовидная диаграмма, но в данном случае ответ будет 12 пар, т.к. каждая пара из диаграммы отличается. Если детей поменять местами, они выполняют уже другие функции.*

- *С помощью древовидной диаграммы были получены различные результаты, т.к. в* ***4*** *и* ***5*** *примере были рассмотрены различные виды комбинаций:* ***сочетания*** *и* ***размещения****.*
- **С**
- **А**

Пусть имеется n различных объектов. (Например, т

*Будем переставлять их всеми возможными способами (число объектов остается неизменными, **<u>меняется только их порядок</u>**). Получившиеся комбинации называются* ***перестановками***

$$P_n = n!$$

*Будем выбирать из n различных объектов m объектов и переставлять всеми возможными способами между собой (то есть **<u>меняется и состав выбранных объектов, и их порядок</u>**). Получившиеся комбинации называются **размещениями** <u>из n объектов по m</u>*

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

*Будем выбирать из n различных объектов m объектов всеми возможными способами (то есть **<u>меняется состав выбранных объектов, но порядок не важен</u>**). Получившиеся комбинации называются **сочетаниями** из n объектов по m*

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

- **правило умножения:**

  Для того чтобы найти число всех возможных исходов независимого проведения двух испытаний *A* и *B,* следует перемножить число всех исходов испытания *A* и число всех исходов испытания *B*.

1. *В самоуправлении из 25 человек нужно выбрать 3 человека для дежурства. Сколькими различными способами это можно сделать?*

Решение: *На этот раз порядок людей **не**важен, поэтому необходимо вычислить число размещений из 25 элементов по 3.*

$$A_{25}^{3} = \frac{25!}{(25-3)!} = \cdots = 23 \cdot 24 \cdot 25 = 13800$$

2. *В самоуправлении из 25 человек нужно выбрать начальника, секретаря и кассира. Сколькими различными способами это можно сделать?*

Решение: *Из 25 человек нужно выбрать троих.*

*Порядок элементов **важен**, т.к. поменяв местами людей, обязанности их изменятся. Значит, нужно вычислить число сочетаний из 25 элементов по 3:*

$$C_{25}^{3} = \frac{25!}{3!\,(25-3)!} = \cdots = \frac{13800}{6} = 2300$$

Обратите внимание!

Количество сочетаний меньше количества размещений.

ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & C_0^0=1 & & & \\
 & & C_1^0=1 \quad C_1^1=1 & & & \\
 & & C_2^0=1 \quad C_2^1=2 \quad C_2^2=1 & & & \\
 & & C_3^0=1 \quad C_3^1=3 \quad C_3^2=3 \quad C_3^3=1 & & & \\
 & & C_4^0=1 \quad C_4^1=4 \quad C_4^2=6 \quad C_4^3=4 \quad C_4^4=1 & & & \\
\ldots & \ldots & \ldots \quad \ldots & \ldots & \ldots & \\
C_n^0 & C_n^1 & \ldots \quad \ldots & \ldots & C_n^{n-1} & C_n^n
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1 \\
1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1
\end{array}
$$