

ГАПОУ НСО «Барабинский медицинский колледж»

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ, ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Выполнила: Адутова О.В.

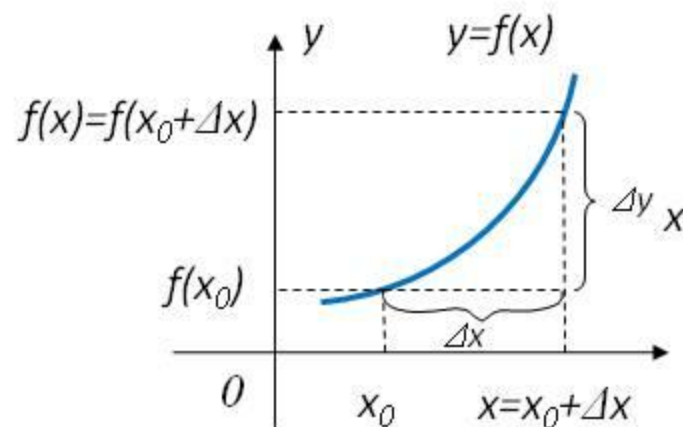
г.Барабинск

Приращение функции

- приращение аргумента:

$$\Delta x = x - x_0$$

$$x = x_0 + \Delta x$$



- приращение функции:

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

- Определение.

Приращением аргумента функции называется величина, равная разности между конечным и начальным значением аргумента: $\Delta x = x - x_0$

- Определение.

Приращением функции называется величина, равная разности между конечным и начальным значением функции $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + x) - f(x_0)$.

Пример 1:

Найти приращение аргумента и приращение

функции в точке x_0 , если $f(x) = x^2$

$$x = 1,9 \quad x_0 = 2$$

Решение:

$$\Delta x = x - x_0;$$

$$\Delta x = 1,9 - 2 = -0,1;$$

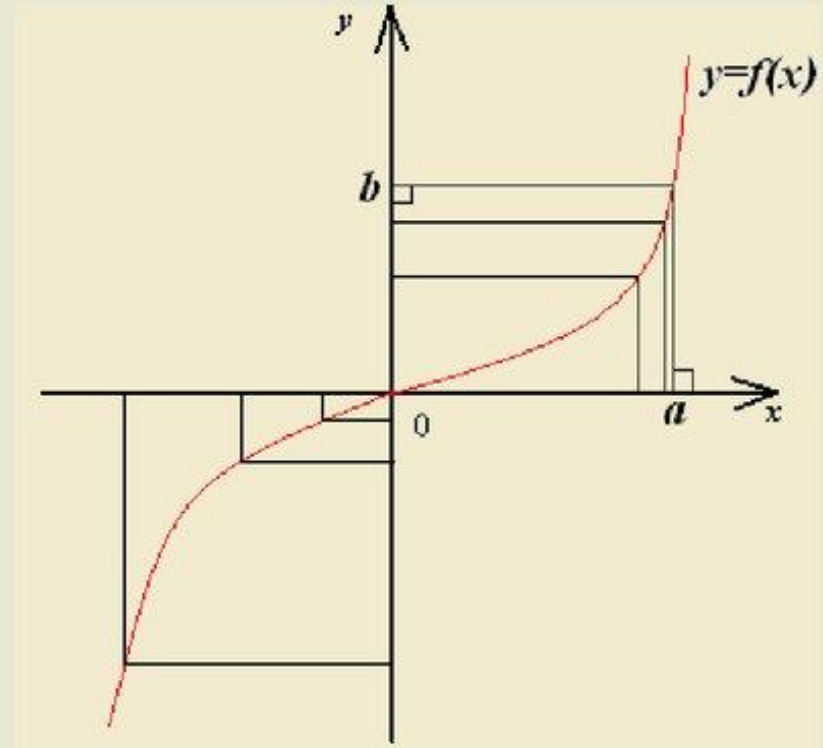
$$\Delta f = f(x) - f(x_0);$$

$$\Delta f = f(1,9) - f(2) = 1,9^2 - 2^2 = 3,61 - 4 = -0,39$$

$$\text{Ответ : } \Delta x = -0,1; \Delta f = -0,39$$

Понятие предела функции

- **Определение:**
Пределом функции $y=f(x)$ называется некоторое число b при $x \rightarrow a$.
- И записывается это так : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$



Определение производной

- Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента при $\Delta x \rightarrow 0$ (при условии, что этот предел существует).

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Формулы для вычисления производных

1. $C' = 0$

2. $x' = 1$

3. $(x^n)' = nx^{n-1}$

4. $\sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

5. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

1. $C' = 0$

2. $x' = 1$

3. $(x^n)' = nx^{n-1}$

1. $C' = 0$
 2. $x' = 1$
 3. $(x^n)' = nx^{n-1}$
 4. $\sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 5. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

1. $C' = 0$
 2. $x' = 1$
 3. $(x^n)' = nx^{n-1}$
 4. $\sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 5. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

Правила вычисления

$$(cu)' = c(u)'$$

$$(u + v)' = (u)' + (v)'$$

$$(u \cdot v)' = (u)' \cdot v + u \cdot (v)'$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{(u)' \cdot v - u \cdot (v)'}{v^2}$$

Пример 1

Найти производную функции $f(x) = x^3 - x^2 + x - 3$.

Решение:

$$(u + v)' = u' + v' \quad (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$f'(x) = (x^3)' - (x^2)' + x' - 3' = 3x^2 - 2x + 1$$

Ответ: $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

Пример 2

$$y = (x^3 + 1)\sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} \text{Решение: } y' &= (x^3 + 1)' \sqrt{x} + (x^3 + 1)(\sqrt{x})' = \\ &= 3x^2 \sqrt{x} + (x^3 + 1) \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3x^2 \sqrt{x} + \frac{(x^3 + 1)}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Пример 3

$$y = \frac{3x-1}{2x+1}$$

$$y' = \left(\frac{3x-1}{2x+1}\right)' = \frac{(3x-1)'(2x+1) - (3x-1)(2x+1)'}{(2x+1)^2} = \frac{5}{(2x+1)^2}$$

Задание 1. Найдите производные функций:

1. $f(x) = 3x + 5$

2. $f(x) = 4x^2 - 5x^3 + 9x$

3. $f(x) = \frac{3}{x} + \frac{x}{3}$

4. $f(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3} - \frac{7}{x}$

5. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1} + \frac{4}{1}$

6. $f(x) = \frac{1}{3x} + \frac{1}{2x^2} + \sqrt{4x}$

Задание 2. Найдите производные функций:

1. $f(x) = (3x+5)(x-3)$

2. $f(x) = \frac{(x^2-5x)(x^3-x^2)}{3+x}$

3. $f(x) = \frac{x^3}{2x^2-5}$

4. $f(x) = \frac{x+1}{x+1}$

5. $f(x) = (\sqrt{x} + 4)(\sqrt{x} - 2)$

6. $f(x) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{x} \right] 4x^2$

Ответы:

$$1. f'(x) = 3$$

$$2. f'(x) = 8x - 15x^2 + x$$

$$3. f'(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{1}{3}$$

$$4. f'(x) = -\frac{4}{x^3} - \frac{15}{x^4} + \frac{7}{x^2}$$

$$5. f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$6. f'(x) = -\frac{1}{3x^2} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$1. f'(x) = 6x - 9$$

$$2. f'(x) = 5x^4 - 24x^3 + 15x^2$$

$$3. f'(x) = \frac{4x+9}{x^4}$$

$$4. f'(x) = \frac{2x^2+4x+5}{(x+1)^2}$$

$$5. f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$6. f'(x) = 4x + 4$$

1. $C' = 0$

2. $x' = 1$

3. $(x^n)' = nx^{n-1}$

4. $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

5. $(x^{-1})' = -x^{-2}$

Л	И	Д	Н	Е
1/4	1	$\pm \frac{2}{3}$	0,1	3

Биржа

знаний

Вычислите значение производной в данной точке	Баллы
1. $f(x) = x^2$, $x = 3$	1
2. $f(x) = 2x^3$, $x = -2$	2
3. $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 4$	3
4. $f(x) = x^2 - 3x$, $x = \frac{1}{2}$	3
5. $f(x) = x^3(2x + x^2)$, $x = 1$	5
6. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x = 5$	2
7. $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 1,2$, $x = -1$	4
8. $f(x) = 7x^5$, $x = 0$	2
9. $f(x) = \frac{3-x}{2+x}$, $x = 3$	5
10. $f(x) = x^3$, $x = \frac{1}{3}$	1
11. $f(x) = x^{-2}$, $x = -\frac{1}{2}$	4
12. $f(x) = 4x - 3x^2$, $x = 0,1$	3
13. $f(x) = \frac{1}{x} + 5x - 2$, $x = \sqrt{2}$	4
14. $f(x) = x - 4\sqrt{x}$, $x = 0,01$	5

Найдите производные заданных функций

1. $C' = 0$

2. $x' = 1$

3. $(x^n)' = nx^{n-1}$

4. $\sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

5. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

1. $C' = 0$

2. $x' = 1$

3. $(x^n)' = nx^{n-1}$

4. $\sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

5. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

ОТВЕТЫ

1. $C' = 0$

2. $x' = 1$

3. $(x^n)' = nx^{n-1}$

4. $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

5. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

1. $C' = 0$

2. $x' = 1$

3. $(x^n)' = nx^{n-1}$

4. $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

5. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

Критерий оценок: все правильно – «5», 1-2 ошибки – «4», 3-4 ошибки – «3», в остальных случаях – «2»

Производная сложной функции

Сложной функцией считается такая функция, у которой аргумент также является функцией.

Теорема. Пусть $h(x)=g(f(x))$ – сложная функция. Тогда

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Формулы для вычисления производных сложных функций

$$1. (u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'.$$

$$2. (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'.$$

$$3. (e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$4. (\log_a u)' = \frac{1}{x \ln a} \cdot u'.$$

$$5. (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'.$$

$$6. (\sin u)' = \cos u \cdot u'.$$

$$7. (\cos u)' = -\sin u \cdot u'.$$

$$8. (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'.$$

$$9. (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'.$$

$$10. (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$$

Пример 1

Найти производную сложной функции вида $y = (2x + 1)^2$.

Решение

По условию видно, что f является функцией возведения в квадрат, а $g(x) = 2x + 1$ считается линейной функцией.

Применим формулу производной для сложной функции и запишем:

$$f'(g(x)) = ((g(x))^2)' = 2 \cdot (g(x))^{2-1} = 2 \cdot g(x) = 2 \cdot (2x + 1);$$

$$g'(x) = (2x + 1)' = (2x)' + 1' = 2 \cdot x' + 0 = 2 \cdot 1 \cdot x^{1-1} = 2 \Rightarrow$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 2 \cdot (2x + 1) \cdot 2 = 8x + 4$$

Пример 2

Следует найти производные сложных функций вида $y = \sin^2 x$ и $y = \sin x^2$.

Решение

Первая запись функции говорит о том, что f является функцией возведения в квадрат, а $g(x)$ – функцией синуса. Тогда получим, что

$$y' = (\sin^2 x)' = 2 \cdot \sin^{2-1} x \cdot (\sin x)' = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

Вторая запись показывает, что f является функцией синуса, а $g(x) = x^2$ обозначаем степенную функцию. Отсюда следует, что произведение сложной функции запишем как

$$y' = (\sin x^2)' = \cos(x^2) \cdot (x^2)' = \cos(x^2) \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 2 \cdot x \cdot \cos(x^2)$$

Вычислить производную сложной функции

$$1) f(x) = (4x - 8)^6$$

$$2) f(x) = (3 - x)^4$$

$$3) f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$4) f(x) = \sqrt{5 + x}$$

$$5) f(x) = \frac{1}{(6x - 1)^5}$$