ГАПОУ НСО «Барабинский медицинский колледж»

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ, ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Выполнила: Адутова О.В.

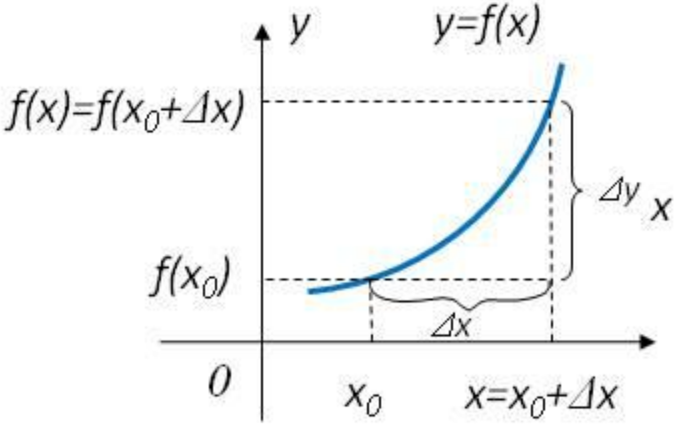
г.Барабинск

Приращение функции

- приращение аргумента:

$$\Delta x = x - x_0$$

$$x = x_0 + \Delta x$$



- приращение функции:

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

- Определение.

  Приращением аргумента функции называется величина, равная разности между конечным и начальным значением аргумента: $\Delta x = x - x_0$

- Определение.

  Приращением функции называется величина, равная разности между конечным и начальным значением функции $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + x) - f(x_0)$.

Пример 1:

Найти приращение аргумента и приращение функции в точке x_0, если $f(x)=x^2$

$x=1,9 \quad x_0=2$

Решение:

$$\Delta x = x - x_0;$$

$$\Delta x = 1,9-2=-0,1;$$

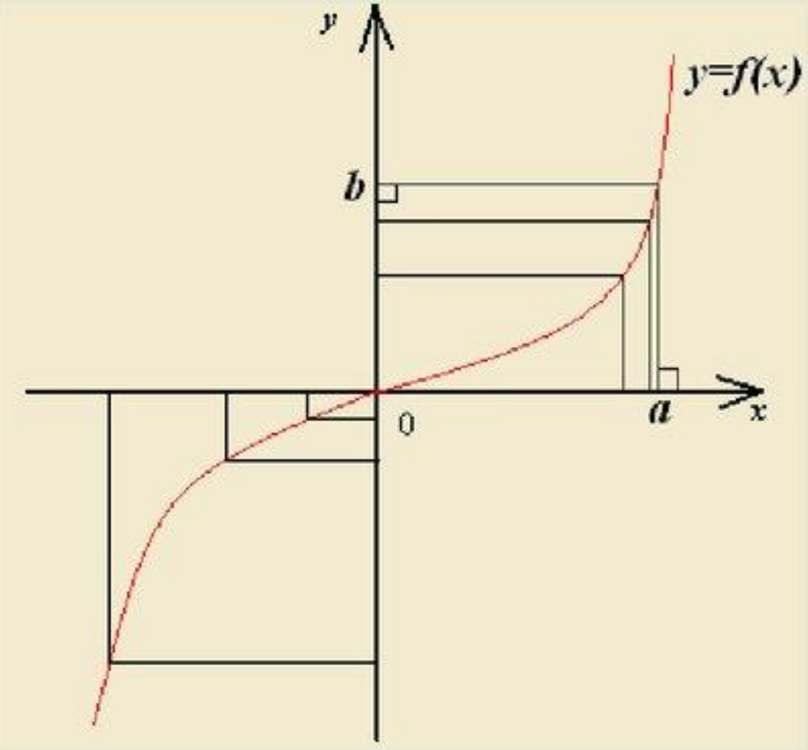
$$\Delta f = f(x)-f(x_0);$$

$$\Delta f = f(1,9)-f(2)=1,9^2-2^2=3,61-4=-0,39$$

$$Ответ: \Delta x=-0,1; \Delta f=-0,39$$

Понятие предела функции

- **Определение:** ***Пределом функции*** $y = f(x)$ ***называется некоторое число b при x→a.***



- ***И записывается это так :*** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$

Определение производной

- Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента при $\Delta x \to 0$ (при условии, что этот предел существует).

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Формулы для вычисления производных

1. $C' = 0$
2. $x' = 1$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$
4. $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$

1. $C' = 0$
2. $x' = 1$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$
4. $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$

Правила вычисления производных

$$(cu)' = c(u)'$$

$$(u+v)' = (u)' + (v)'$$

$$(u \cdot v)' = (u)' \cdot v + u \cdot (v)'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{(u)' \cdot v - u \cdot (v)'}{v^2}$$

Пример 1

Найти производную функции $f(x) = x^3 - x^2 + x - 3$.

Решение:

$(u + v)' = u' + v'$ $\qquad$ $(x^n)' = nx^{n-1}$

$f'(x) = (x^3)' - (x^2)' + x' - 3' = 3x^2 - 2x + 1$

Ответ: $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

Пример 2

$$y = (x^3 + 1)\sqrt{x}$$

Решение: $y' = (x^3 + 1)'\sqrt{x} + (x^3 + 1)(\sqrt{x})' =$

$$= 3x^2\sqrt{x} + (x^3 + 1)\frac{1}{2\sqrt{x}} = 3x^2\sqrt{x} + \frac{(x^3+1)}{2\sqrt{x}}.$$

Пример 3

y= $\dfrac{3x-1}{2x+1}$

$$y' = \left(\frac{3x-1}{2x+1}\right)' = \frac{(3x-1)'(2x+1)-(3x-1)(2x+1)'}{(2x+1)^2} = \frac{5}{(2x+1)^2}$$

Задание 1. Найдите производные функций:

1. $f(x)=3x+5$

2. $f(x)=4x^2-5x^3+9x$

3. $f(x)=\dfrac{3}{x}+\dfrac{x}{3}$

4. $f(x)=\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{5}{x^3}-\dfrac{7}{x}$

5. $f(x)=\sqrt{x}+4$

6. $f(x)=\dfrac{1}{3x}+\dfrac{1}{2x^2}+\sqrt{4x}$

Задание 2. Найдите производные функций:

1. $f(x)=(3x+5)(x-3)$

2. $f(x)=(x^2-5x)(x^3-x^2)$

3. $f(x)=\dfrac{3+x}{x^3}$

4. $f(x)=\dfrac{2x^2-5}{x+1}$

5. $f(x)=(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-2)$

6. $f(x)=\left[\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x}\right]4x^2$

Ответы:

1. $f'(x)=3$

2. $f'(x)=8x-15x^2+x$

3. $f'(x)= -\frac{3}{x^2}+\frac{1}{3}$

4. $f'(x) = -\frac{4}{x^3}-\frac{15}{x^4}+\frac{7}{x^2}$

5. $f'(x)= 1/(2\sqrt{x})$

6. $f'(x) = -\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{2x^3}+1/\sqrt{x}$

---

1. $f'(x)=6x-9$

2. $f'(x)=5x^4-24x^3+15x^2$

3. $f'(x)= \frac{4x+9}{x^4}$

4. $f'(x) = \frac{2x^2+4x+5}{(x+1)^2}$

5. $f'(x)= 1+1/\sqrt{x}$

6. $f'(x) = 4x+4$

1. $C' = 0$
2. $x' = 1$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$

4. $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

5. $\left(\frac{1}{\ }\right)' = \frac{1}{\ }$

Л	И	Д	Н	Е
1/4	1	$\pm\frac{2}{3}$	0,1	3

Биржа знаний

Вычислите значение производной в данной точке		Баллы
1. $f(x) = x^2$,	$x = 3$	**1**
2. $f(x) = 2x^3$,	$x = -2$	**2**
3. $f(x) = \sqrt{x}$,	$x = 4$	**3**
4. $f(x) = x^2 - 3x$,	$x = \frac{1}{2}$	**3**
5. $f(x) = x^3(2x + x^2)$,	$x = 1$	**5**
6. $f(x) = \frac{1}{x}$,	$x = 5$	**2**
7. $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 1{,}2$,	$x = -1$	**4**
8. $f(x) = 7x^5$,	$x = 0$	**2**
9. $f(x) = \frac{3-x}{2+x}$,	$x = 3$	**5**
10. $f(x) = x^3$,	$x = \frac{1}{3}$	**1**
11. $f(x) = x^{-2}$,	$x = -\frac{1}{2}$	**4**
12. $f(x) = 4x - 3x^2$,	$x = 0{,}1$	**3**
13. $f(x) = \frac{1}{x} + 5x - 2$,	$x = \sqrt{2}$	**4**
14. $f(x) = x - 4\sqrt{x}$,	$x = 0{,}01$	**5**

Найдите производные заданных функций

1. $C' = 0$
2. $x' = 1$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$
4. $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$

1. $C' = 0$
2. $x' = 1$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$
4. $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$

Ответы

1. $C' = 0$
2. $x' = 1$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$
4. $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $(\frac{1}{x})' = - \frac{1}{x^2}$

1. $C' = 0$
2. $x' = 1$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$
4. $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $(\frac{1}{x})' = - \frac{1}{x^2}$

Критерий оценок: все правильно – «5», 1-2 ошибки – «4», 3-4 ошибки – «3», в остальных случаях – «2»

Производная сложной функции

Сложной функцией считается такая функция, у которой аргумент также является функцией.

Теорема. Пусть $h(x)=g(f(x))$ – сложная функция. Тогда

$$h'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$$

Формулы для вычисления производных сложных функций

1. $\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \cdot u'$.
2. $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$.
3. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
4. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{x\ln a} \cdot u'$.
5. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$.
6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.
7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.
8. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.
9. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.
10. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

Пример 1

Найти производную сложной функции вида $y = (2x+1)^2$.

Решение

По условию видно, что f является функцией возведения в квадрат, а $g(x) = 2x+1$ считается линейной функцией.

Применим формулу производной для сложной функции и запишем:

$$f'(g(x)) = ((g(x))^2)' = 2 \cdot (g(x))^{2-1} = 2 \cdot g(x) = 2 \cdot (2x+1);$$
$$g'(x) = (2x+1)' = (2x)' + 1' = 2 \cdot x' + 0 = 2 \cdot 1 \cdot x^{1-1} = 2 \Rightarrow$$
$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 2 \cdot (2x+1) \cdot 2 = 8x+4$$

Пример 2

Следует найти производные сложных функций вида $y = \sin^2 x$ и $y = \sin\ x^2$.

Решение

Первая запись функции говорит о том, что f является функцией возведения в квадрат, а $g(x)$ – функцией синуса. Тогда получим, что

$$y' = (\sin^2 x)' = 2 \cdot \sin^{2-1} x \cdot (\sin\ x)' = 2 \cdot \sin\ x \cdot \cos\ x$$

Вторая запись показывает, что f является функцией синуса, а $g(x) = x^2$ обозначаем степенную функцию. Отсюда следует, что произведение сложной функции запишем как

$$y' = (\sin\ x^2)' = \cos(x^2) \cdot (x^2)' = \cos(x^2) \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 2 \cdot x \cdot \cos(x^2)$$

Вычислить производную сложной функции

$$1)\ f(x) = (4x-8)^6$$

$$2)\ f(x) = (3-x)^4$$

$$3)\ f(x) = \sqrt{x^2-1}$$

$$4)\ f(x) = \sqrt{5+x}$$

$$5)\ f(x) = \frac{1}{(6x-1)^5}$$