Задачи с параметрами

Задачи с параметрами

Толчина Е.Н. школа 59

Уравнение вида $\boldsymbol{a \cdot x = b}$ с переменной $\boldsymbol{x}$
имеет **единственное** решение при $\boldsymbol{a \neq 0}$;
имеет **бесконечное множество** решений при $\boldsymbol{a = b = 0}$;
не имеет решений при $\boldsymbol{a = 0, b \neq 0}$.

Пример 1. При каких значениях параметра *b* уравнение

$$a^2\text{x} = \text{a}(1 + 5\text{x}) - 2 - 6\text{x}$$

не имеет корней?

Решение. $a^2\text{x} = \text{a}(1 + 5\text{x}) - 2 - 6\text{x} \Leftrightarrow a^2$**x-5ax+6x=a- 2** $\Leftrightarrow x(a-2)(a-3) = a - 2$. Уравнение не имеет решений при **a=3**

Ответ: a= 3.

Неравенство вида **$a \cdot x > b$** имеет решением

промежуток $\left(\frac{b}{a};\ +\infty\right)$ при **$a > 0$;**

промежуток $\left(-\infty;\ \frac{b}{a}\right)$ при **$a < 0$;**

промежуток $(-\infty;\ +\infty)$ при **$a = 0, b < 0$;**

не имеет решений при **$a = o, b \geq 0$.**

Пример 2. Решить неравенство **ax+4 > 2x + a^2**

Решение. ax+4 > 2x + a^2 $\Leftrightarrow$ (a- 2)x > a^2 - 4

Рассмотрим три случая.

I. a=2. Неравенство o·x > 0 решений не имеет.

2. a> 2. (a-2)x>(a-2)(a+2) ⇔x>a+2.

3. a< 2. (a-2)x>(a-2)(a+20 ⇔x<a+2.

Ответ: x > 2 при $a > 2$; x< $a + 2$, при a< 2;

∅ при a=2

Пусть коэффициенты системы уравнений

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ a_1x + b_1y = c_1; \end{cases}$$ отличны от нуля.

Тогда:

чтобы система имела **единственное решение**,

необходимо и достаточно выполнение условия $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$;

2) чтобы система имела **бесконечно много** решений,

необходимо и достаточно выполнение условия

$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$;

3) чтобы система **не имела решений**, необходимо и достаточно выполнение условия $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}$.

Случай, когда коэффициенты равны нулю, нужно рассматривать отдельно.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + (9a^2 - 2)y = 3a \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения находим **y=1-x** и подставляем в первое. Получим

2x+($9a^2 - 2)(1 - x0 = 3a$ ⇔(3a-2)(3a+20=(3a-2)(3a+1).

- 1.Если a$\neq \pm\frac{2}{3}$, то x=$\frac{3a+1}{3a+2}$, y=1- $\frac{3a+1}{3a+2}$=$\frac{1}{3a+2}$.
- **2.**a=$\frac{2}{3}$. Уравнение
  x$\cdot\ 0 = 0$ имеет бесчисленное множество решений
- 3. a=-$\frac{2}{3}$. Уравнение x·0=4 решений не имеет.

Ответ: x=$\frac{3a+1}{3a+2}$, y=$\frac{1}{3a+2}$ при a$\neq \pm\frac{2}{3}$; x=t, t∈ R при a=$\frac{2}{3}$; ∅ при a=-$\frac{2}{3}$

2. **Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$**

a) **нет решений** тогда и только тогда, когда **D < 0**;

b) **два различных корня** тогда и только тогда, когда **D > 0**;

c) **два (может быть кратных) корня** тогда и только тогда, когда **D ≥ 0**;

d) **два положительных корня** тогда и только тогда,

когда $\begin{cases} D > 0, \\ \frac{c}{a} > 0, \\ \frac{-b}{a} > 0; \end{cases} <=> \begin{cases} D > 0, \\ af(0) > 0, \\ x_{\text{в}} > 0; \end{cases}$

e) **два отрицательных корня** тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0, \\ \frac{c}{a} > 0, \\ \frac{-b}{a} < 0; \end{cases} <=> \begin{cases} D > 0, \\ af(0) > 0, \\ x_{\text{в}} < 0; \end{cases}$$

f) **корни разных знаков** тогда и только тогда, когда

$\frac{c}{a} < 0 \;<=>$

$\boldsymbol{ac < 0} <=> af(0) < 0;$

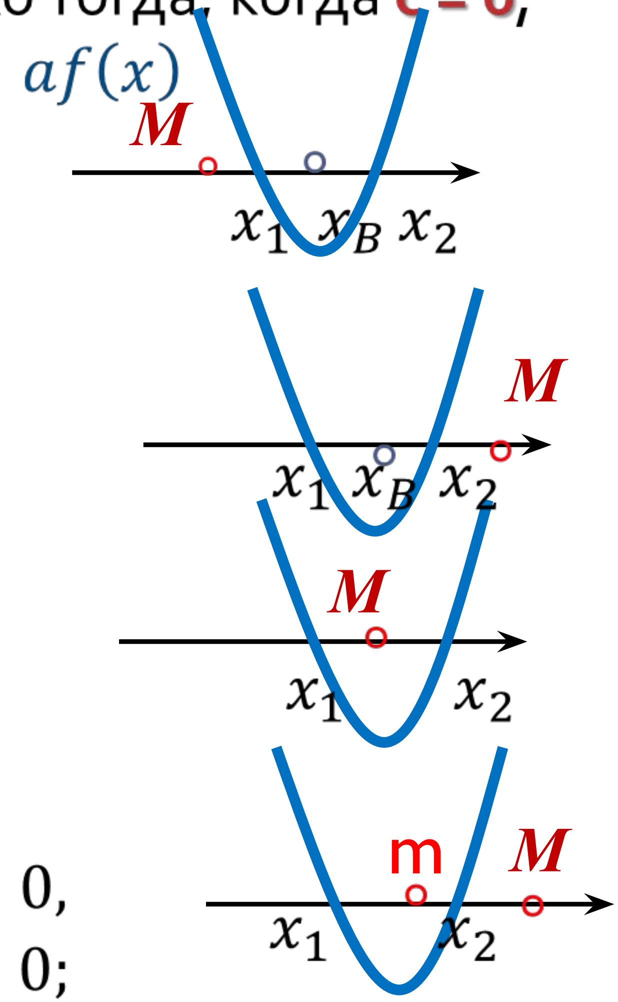
g) **корень, равный нулю**, тогда и только тогда, когда **c = 0**;

h) $\boldsymbol{x_2 > x_1 > M} \;<=>\; \begin{cases} D > 0, \\ a \cdot f(M) > 0, \\ x_в > M; \end{cases}$

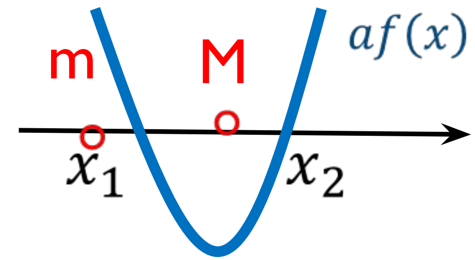
i) $\boldsymbol{x_1 < x_2 < M} \;<=>\; \begin{cases} D > 0, \\ a \cdot f(M) > 0, \\ x_в < M; \end{cases}$

j) $\boldsymbol{x_1 < M < x_2} \;<=>\; a \cdot f(M) < 0;$

k) $\boldsymbol{x_1 < m < x_2 < M} \;<=>\; \begin{cases} a \cdot f(m) < 0, \\ a \cdot f(M) > 0; \end{cases}$

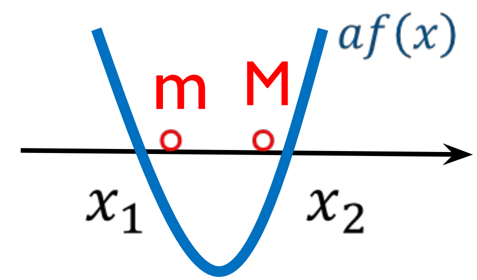


h) $x_1 < m < M < x_2 <=> \begin{cases} a \cdot f(m) < 0, \\ a \cdot f(M) < 0; \end{cases}$

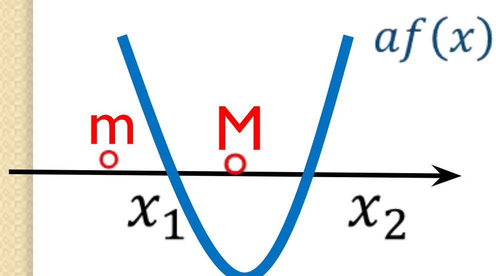


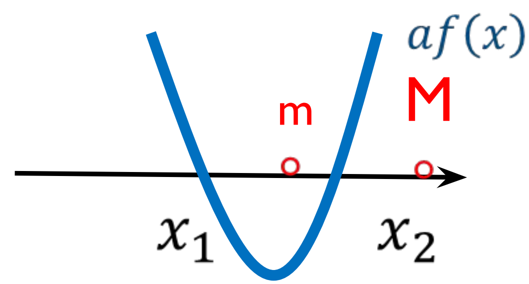
h) **один корень внутри** интервала **(m; M)**, а **другой вне** этого интервала тогда

i) и только тогда, когда $f(m) \cdot f(M) < 0.$



j) $m < x_1 < M < x_2 <=> \begin{cases} a \cdot f(m) > 0, \\ a \cdot f(M) < 0; \end{cases}$





Пример 4. При каких m все корни уравнения $x^2 - (3m+1)x + (2m^2+4m-6) = 0$ а) больше 1; б) меньше -1?

Решение. а) Решая систему

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_0 > 1 \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m+1)^2 - 4(2m^2 + 4m - 6) \geq 0 \\ \frac{1}{2}(3m+1) > 1 \\ 1 - (3m+1) + (2m^2 + 4m - 6) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (m-5)^2 \geq 0 \\ m > \frac{1}{3} \\ (2m-3)(m+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} m \in (-\infty; \infty) \\ m \in (\frac{1}{3}; \infty) \\ m \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{3}{2}; \infty\right), \end{cases}$$

получаю $\mathbf{m} \in (\frac{3}{2};\infty)$.

б) Решая систему

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_0 < -1 \\ f(-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; \infty) \\ \frac{1}{2}(3m+1) < -1 \\ 1 + (3m+1) + (2m^2 + 4m - 6) > 0, \end{cases}$$

получаем **m** $\in$ $(-\infty; -\mathbf{4})$

Замечание. Если выражение для корней уравнения не содержит радикалов, то удобно решать примеры и без применения теорем.

Так как корни квадратного трехчлена x_1=m+3, x_2=2m-2, то в случае

а) из системы $\begin{cases} m+3 > 1 \\ 2m-2 > 1 \end{cases}$ имем **m**$\in(\frac{3}{2}; \infty)$,

б) решением системы $\begin{cases} m+3 < -1 \\ 2m-2 < -1 \end{cases}$ является **m**$\in$ $(-\infty; -\mathbf{4})$.

Пример ЕГЭ.

Найти а при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a \\ xy = a - \frac{1}{2} \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение.

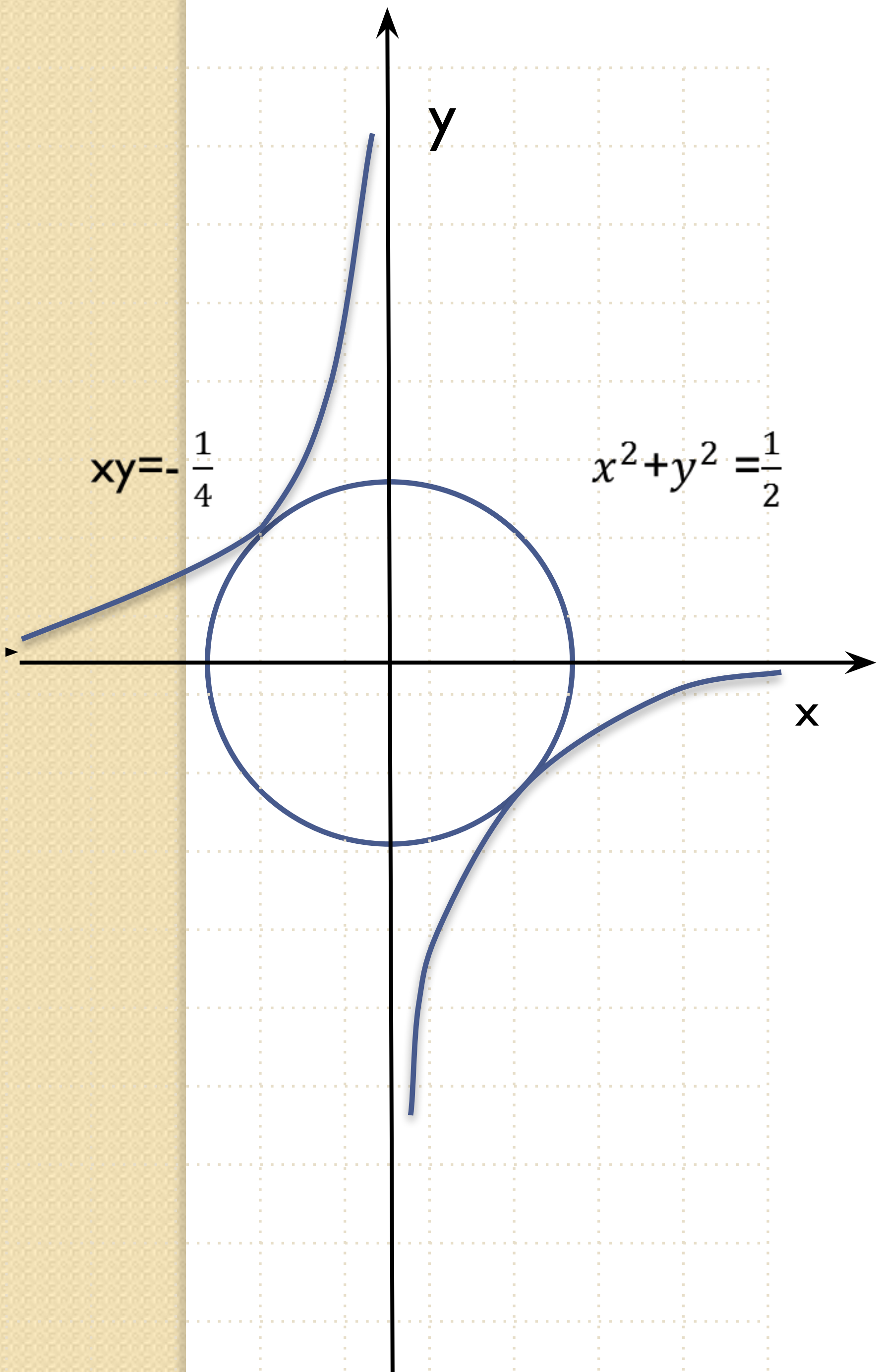
. Умножим второе уравнение на 2 и вычтем из первого, получим x^2 -2xy +y^2=1⇔ $(y-x)^2$-1=0 ⇔ (y-x-1)(y-x+1)=0, откуда y=x ± 1.

Подставим найденные значения y в первое уравнение.

Каждое из уравнений $2x^2$+2x+1-2a=0 и $2x^2$-2x+1-2a=0 будет иметь два решения, а, следовательно, система – четыре решения, если $\frac{1}{4}$D=1-2(1-2a)=4a-1>0.

Уравнения и система не имеет решений, если 4a-1>0. При a=$\frac{1}{4}$ каждое из уравнений имеет по одному решению (x=-$\frac{1}{2}$ и x=$\frac{1}{2}$), а

система два решения (-$\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$) ; ($\frac{1}{2}$; -$\frac{1}{2}$).



Графическая иллюстрация

$x^2+y^2=2a$ $(a>0)$ – окружность с центром в начале координат,

$R=\sqrt{2a}$. $xy=a-\frac{1}{2}$ -гипербола ($a<\frac{1}{2}$, 2 – ая и 4 – ая четверти;

$a>\frac{1}{2}$, 1-ая и 3-я четверти),

при $a=\frac{1}{2}$ - оси OX и OY.

Пример ЕГЭ.

Найти все значения m, при которых неравенство $x^2 + 2(m-3)x + m^2 - 6m < 0$ будет выполнено для любого x, принадлежащего интервалу (0;2).

Решение.

По условию интервал (0;2) должен содержаться во множестве решений неравенства

$x^2 + 2(m-3)x + m^2 - 6m < 0$ (2).

Так как множество решений неравенства (2) интервал $(x_1; x_2)$, где x_1 и x_2 - корни квадратного трехчлена, то задачу можно сформулировать следующим образом: При каких m выполняется соотношение $x_1 \le 0 < 2 \le x_2$?

На основании утверждения h (слайд7) значение m находим из системы неравенств

$$\begin{cases} f(0) \le 0 \\ f(2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m \le 0 \\ 4 + 49m - 3) + m^2 - 6m \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in [0;6] \\ m \in [-2;4] \end{cases}, \text{откуда } \mathbf{m} \in [\mathbf{0}; \mathbf{4}].$$