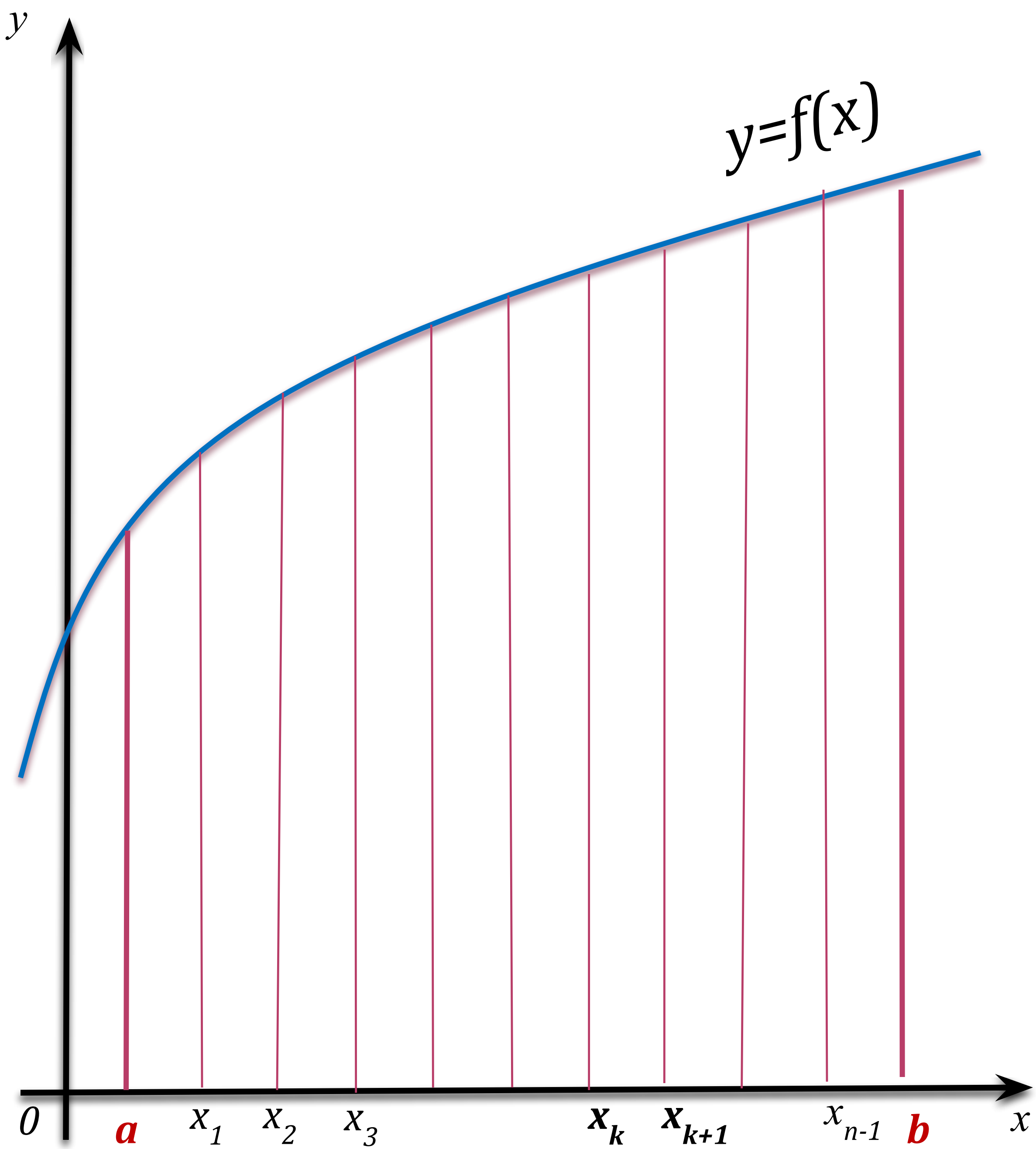
ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла.

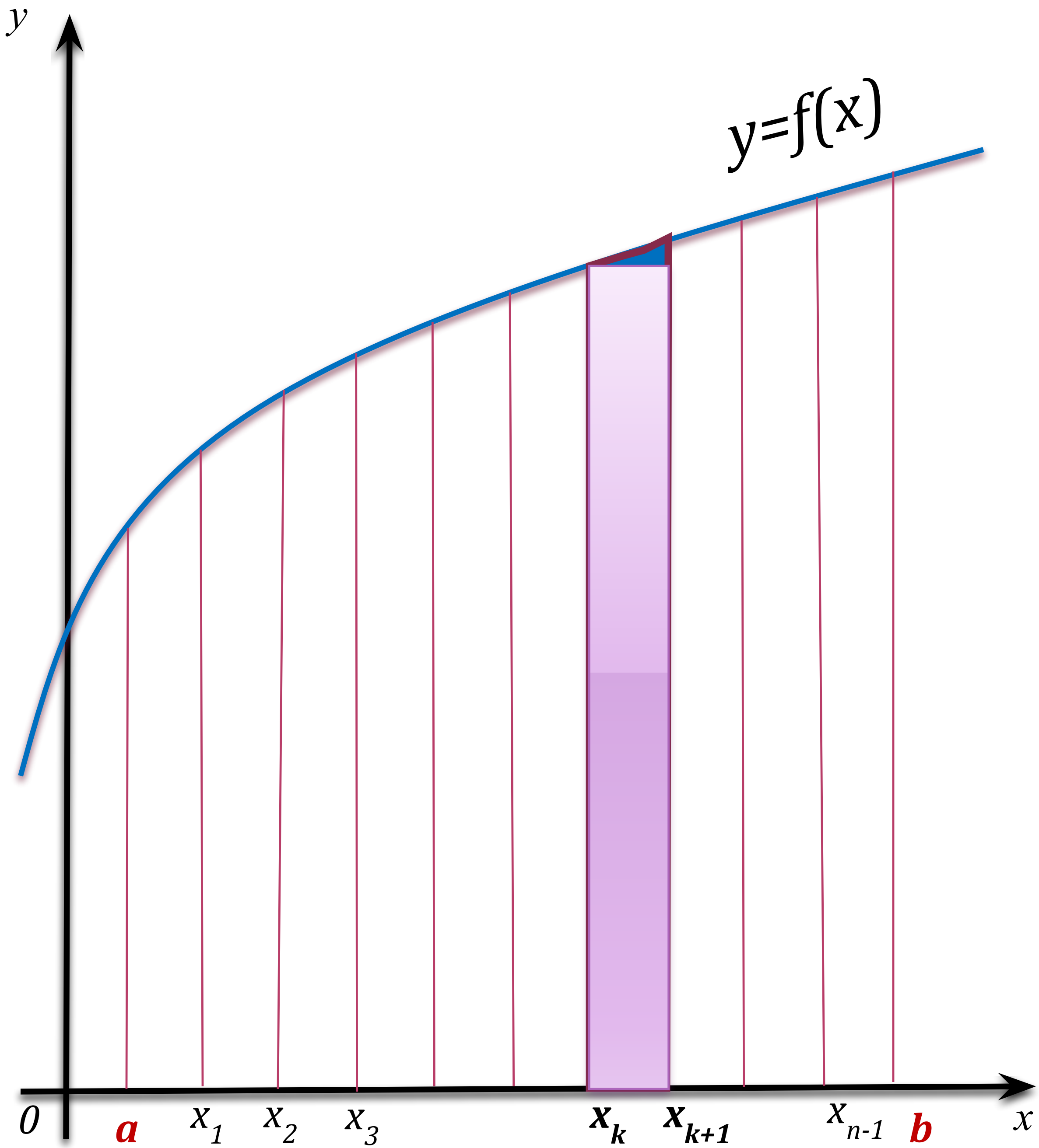
Задача 1.

В декартовой прямоугольной системе координат $x0y$ дана фигура, ограниченная осью $0x$, прямыми $x=a$, $x=b$ $(a< b)$ и графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке [a; b] функции $y=f(x)$; назовём эту фигуру ***криволинейной трапецией***. Требуется ***вычислить площадь криволинейной трапеции***.



Разобьём отрезок **[*a;b*]** (основание криволинейной трапеции) на *n* равных частей; это разбиение осуществим с помощью точек $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}$.

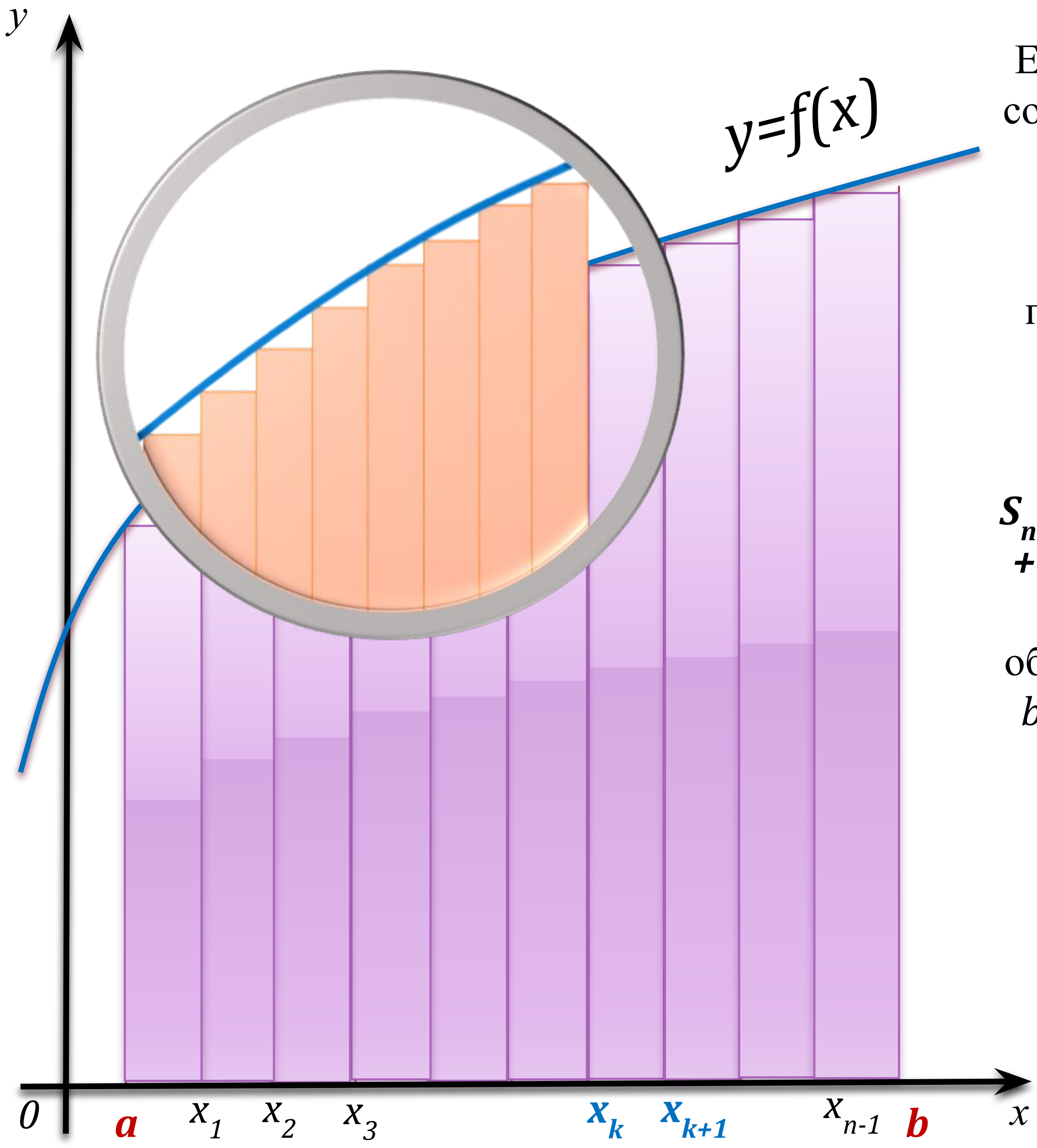
Тогда заданная трапеция разобьётся на *n* узеньких столбиков. Площадь всей трапеции равна сумме площадей столбиков.



Рассмотрим отдельно *k*-ый столбик, т.е. криволинейную трапецию, основанием которой служит отрезок [x_k; x_{k+1}].

Заменим его прямоугольником с тем же основанием и высотой, равной ***f(x k).***

Площадь прямоугольника равна ***f(x k)·Δx,*** где *Δ*x – длина отрезка [x $_k$; x_{k+1}]; естественно считать составленное произведение приближённым значением площади *k*-го столбика.



Если теперь сделать то же самое со всеми остальными столбиками, то придём к следующему результату: площадь заданной криволинейной трапеции приближённо равна площади S_n ступенчатой фигуры, составленной из n прямоугольников. Имеем:

$$S_n = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ldots + f(x_k)\Delta x_k + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

Здесь ради единообразия обозначений мы считаем что $a=x_0$, $b=x_n$, Δx_0 – длина отрезка $[x_0; x_1]$, Δx_1 –длина отрезка $[x_1; x_2]$ и т.д.

Итак, $S \approx S_n$, причём это приближённое равенство тем больше, чем больше ***n***.

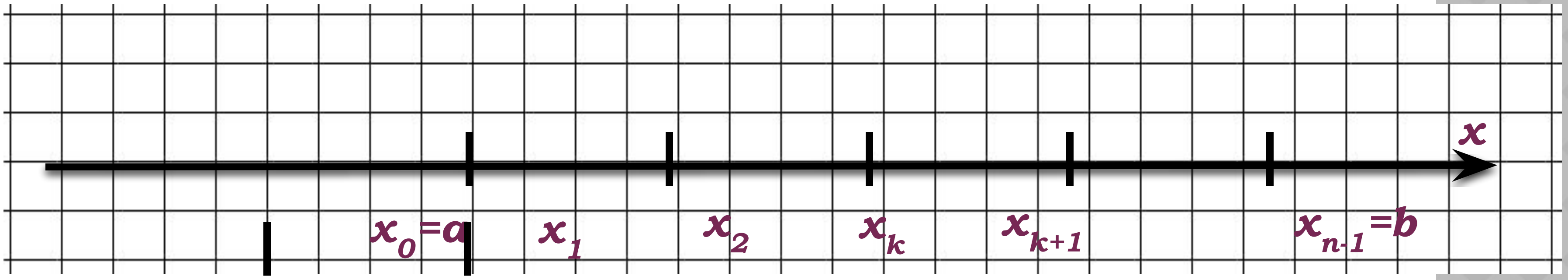
Принято считать, что искомая площадь есть предел последовательности (S_n)

$$\boxed{S = \lim_{n \to \infty} S_n}$$

Задача 2 (о вычислении массы стержня).

Дан прямолинейный неоднородный стержень, плотность в точке x вычисляется по формуле $p=p(x)$. **Найти массу стержня.**

Как известно из курса физики, $\boldsymbol{m = \rho \cdot V}$, но этот закон действует только для однородных тел, т.е. в тех случаях, когда плотность постоянна. Для неоднородного стержня используется тот же метод, что был применён при решении задачи 1.



1) Разобьём отрезок $[\boldsymbol{a;b}]$ на n равных частей;
2) Рассмотрим отдельно k-ый участок $[\boldsymbol{x_k; x_{k+1}}]$ и будем считать, что плотность во всех точках этого участка постоянна, а именно такая, как, например, в точке $\boldsymbol{x_k}$. Итак, считаем, что $\boldsymbol{\rho=\rho(x_k)}$.
3) Найдём приближённое значение массы $\boldsymbol{m_k}$ $\boldsymbol{k}$-го участка:

$$m_k \approx \rho(x_k) \cdot \Delta x_k,$$

Где $\boldsymbol{\Delta x_k}$, как и в предыдущей задаче, - длина отрезка $[\boldsymbol{x_k; x_{k+1}}]$.

4) Найдём приближённое значение массы $\boldsymbol{m}$ стержня:

$$m \approx S_n,$$

Где $S_n = m_0 + m_1 + m_2 + \ldots + m_k + \ldots + m_{n-1} =$

$$\rho(x_0)\Delta x_0 + \rho(x_1)\Delta x_1 + \rho(x_2)\Delta x_2 + \ + \ldots + \rho(x_k)\Delta x_k + \ldots + \rho(x_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

5) Точное значение массы стержня вычисляется по формуле

$$\boxed{m = \lim_{n \to \infty} S_n}$$

Задача 3 (о перемещении точки).

По прямой движется точка. Зависимость скорости от времени выражается формулой $v=v(t)$; *пусть для определённости* $v(t)>0$. ***Найти перемещение точки за промежуток времени*** **[*a;b*].**

Если бы движение было равномерным, то задача решалась бы очень просто: $\boldsymbol{s = vt}$, т.е. $\boldsymbol{s = v(b-a)}$. Для неравномерного движения приходится использовать те же идеи, на которых было основано решение двух предыдущих задач.

1) Разобьём отрезок $\boldsymbol{[a;b]}$ на n равных частей.
2) Рассмотрим отдельно k-ый участок $[\boldsymbol{t_k ; t_{k+1}}]$ и будем считать, что скорость на этом промежутке времени постоянна, а именно такая, как, например, в момент времени $\boldsymbol{t_k}$. Итак, считаем, что $\boldsymbol{v = v(t_k)}$.
3) Найдём приближённое значение перемещения точки $\boldsymbol{s_k}$ за промежуток времени $[\boldsymbol{t_k ; t_{k+1}}]$:

$$s_k \approx v(t_k)\cdot\Delta t_k,$$

4) Найдём приближённое значение перемещения s:

$$s \approx S_n,$$

Где $S_n = s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_k + \ldots + s_{n-1} =$

$$v(t_0)\Delta t_0 + v(t_1)\Delta t_1 + v(t_2)\Delta t_2 + \ + \ldots + v(t_k)\Delta t_k + \ldots + v(t_{n-1})\Delta t_{n-1}.$$

5) Точное значение перемещения вычисляется по формуле:

$$\boxed{s = \lim_{n\to\infty} S_n}$$

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ.

Три различные задачи привели при их решении к одной и той же математической модели. Многие задачи из различных областей науки и техники приводят в процессе решения к такой же модели. Значит, данную математическую модель надо специально изучить, т.е.:
а) присвоить ей новый термин;
б) ввести для неё обозначение;
в) научиться с ней работать.

Этим и займёмся.

Понятие определённого интеграла.

Дадим определение той модели, которая была построена в трёх рассмотренных задачах для функции ***y* = *f(x)***, непрерывной (но обязательно неотрицательной, как это предполагалось в рассмотренных задачах) на отрезке **[*a;b*]:**

1)Разбивают отрезок **[*a;b*]** на *n* равных частей.

2)Составляют сумму:

$$S_n = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ + \ldots + f(x_k)\Delta x_k + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

3) Вычисляют $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

В курсе математического анализа доказано, что при указанных условиях этот предел существует. Его называют определённым интегралом от функции ***y* = *f(x)*** по отрезку **[*a;b*]** и обозначают так:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$$

Результат, полученный в 1 задаче, можно переписать так:

$$\boxed{S=\int_a^b f(x)dx}$$

Где ***S*** – ***площадь криволинейной трапеции***. В этом состоит ***геометрический смысл определённого интеграла***.

Из решения задачи 2 следует, что масса ***m*** неоднородного стержня с плотностью ***ρ(x)*** вычисляется по формуле

$$\boxed{m=\int_a^b \rho(x)dx}$$

В этом состоит ***физический смысл определённого интеграла***.

Из решения задачи 3 следует, что перемещение ***s*** точки, движущейся по прямой со скоростью ***v=v(t)***, за промежуток времени от ***t=a*** до ***t=b***, вычисляется по формуле

$$\boxed{S=\int_a^b v(t)dt}$$

Это ещё одно ***физическое истолкование определённого интеграла***.

Формула Ньютона - Лейбница

Теорема.

Если функция ***y=f(x)*** непрерывна на отрезке **[*a;b*]**, то справедлива формула

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Где ***F(x)* – первообразная для *f(x)*.**

Приведённую формулу обычно называют формулой Ньютона – Лейбница в честь английского физика Исаака Ньютона (1643-1727) и немецкого философа Готфрида Лейбница (1646-1716), получивших её независимо друг от друга и практически одновременно.