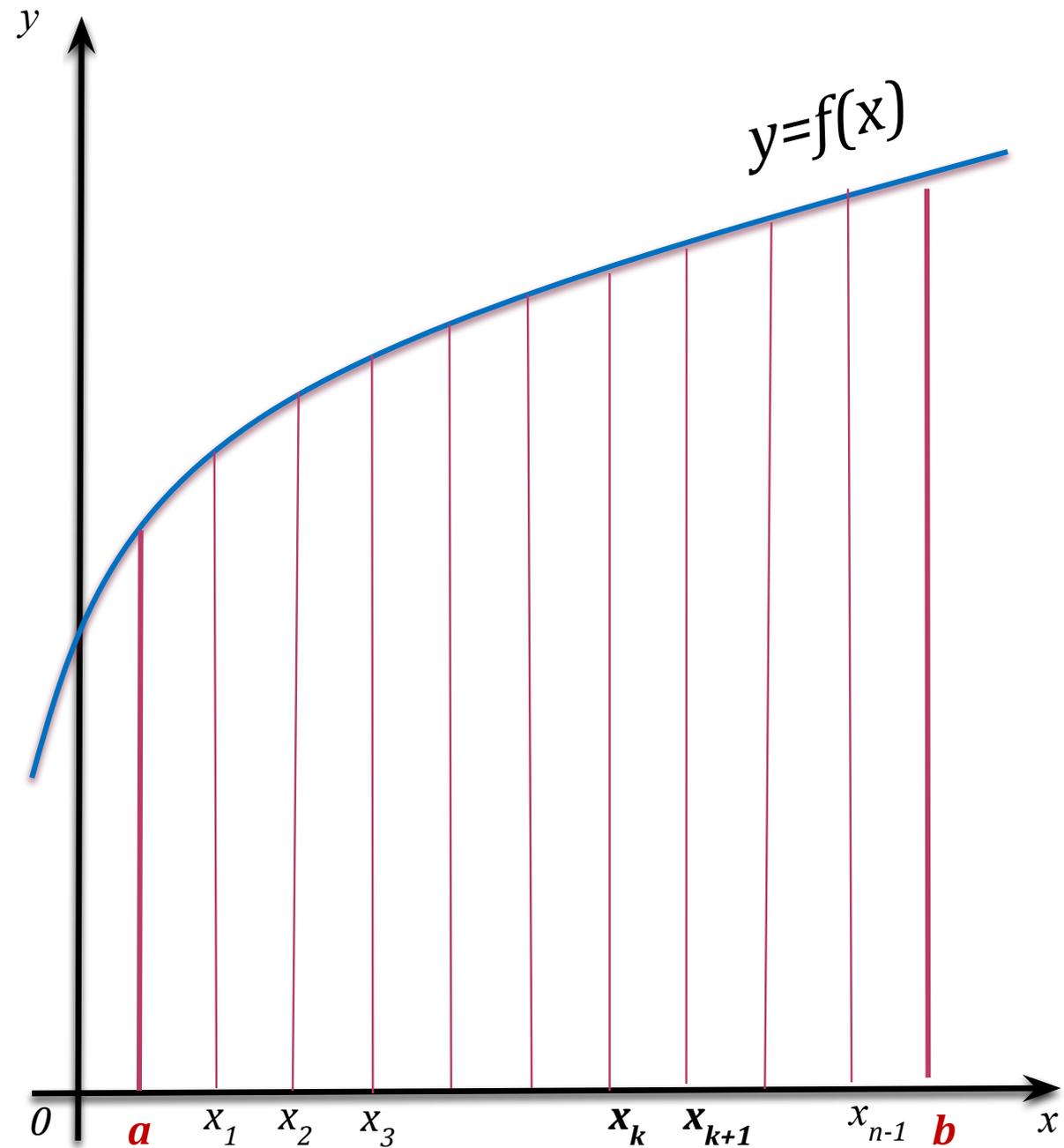


ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

*Задачи,
приводящие к
понятию
определённого
интеграла.*

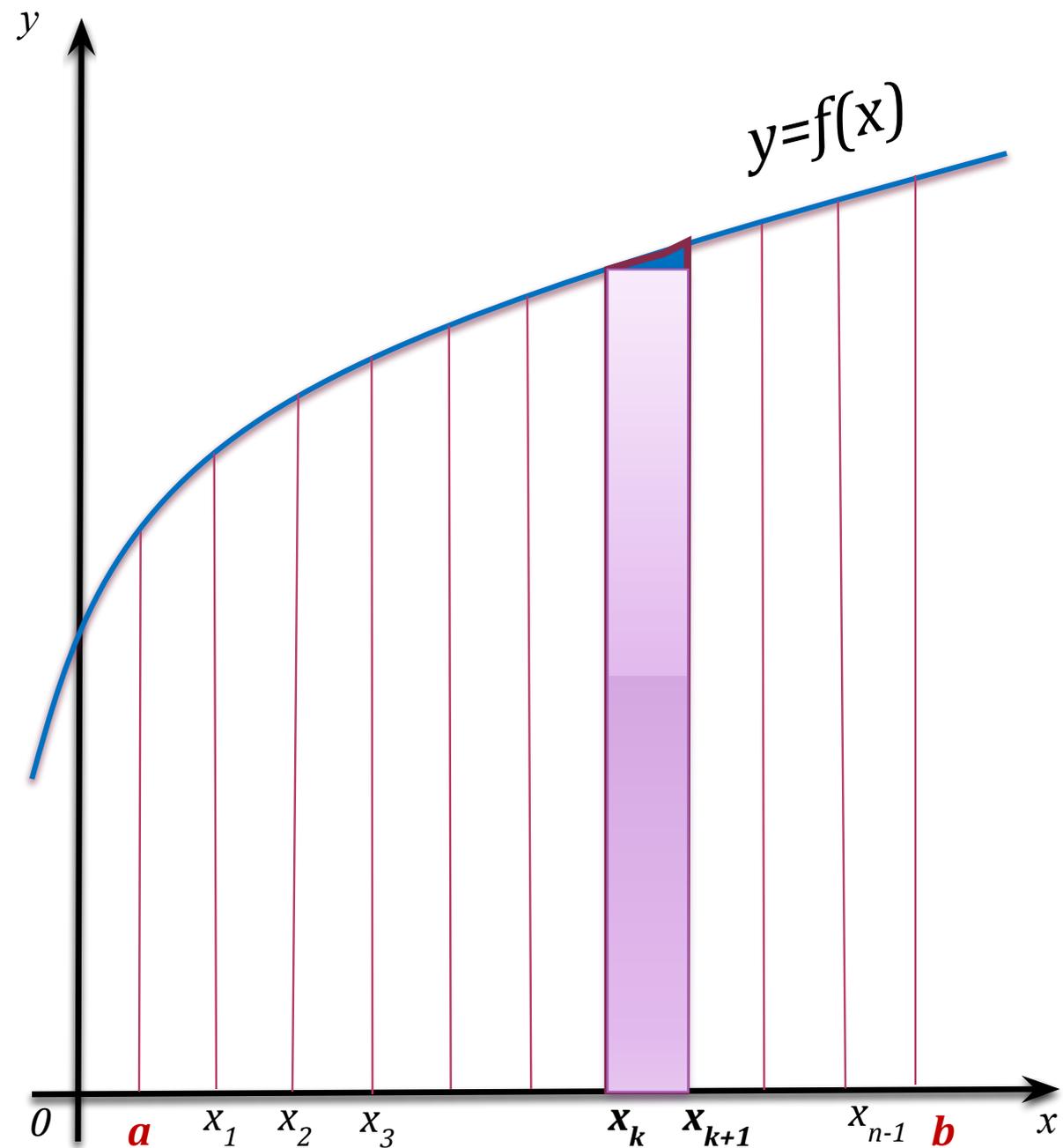
Задача 1.

В декартовой прямоугольной системе координат xOy дана фигура, ограниченная осью Ox , прямыми $x=a$, $x=b$ ($a < b$) и графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a; b]$ функции $y=f(x)$; назовём эту фигуру **криволинейной трапецией**. Требуется **вычислить площадь криволинейной трапеции**.



Разобьём отрезок $[a;b]$
(основание криволинейной
трапеции) на n равных
частей; это разбиение
осуществим с помощью
точек $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots,$
 x_{n-1}

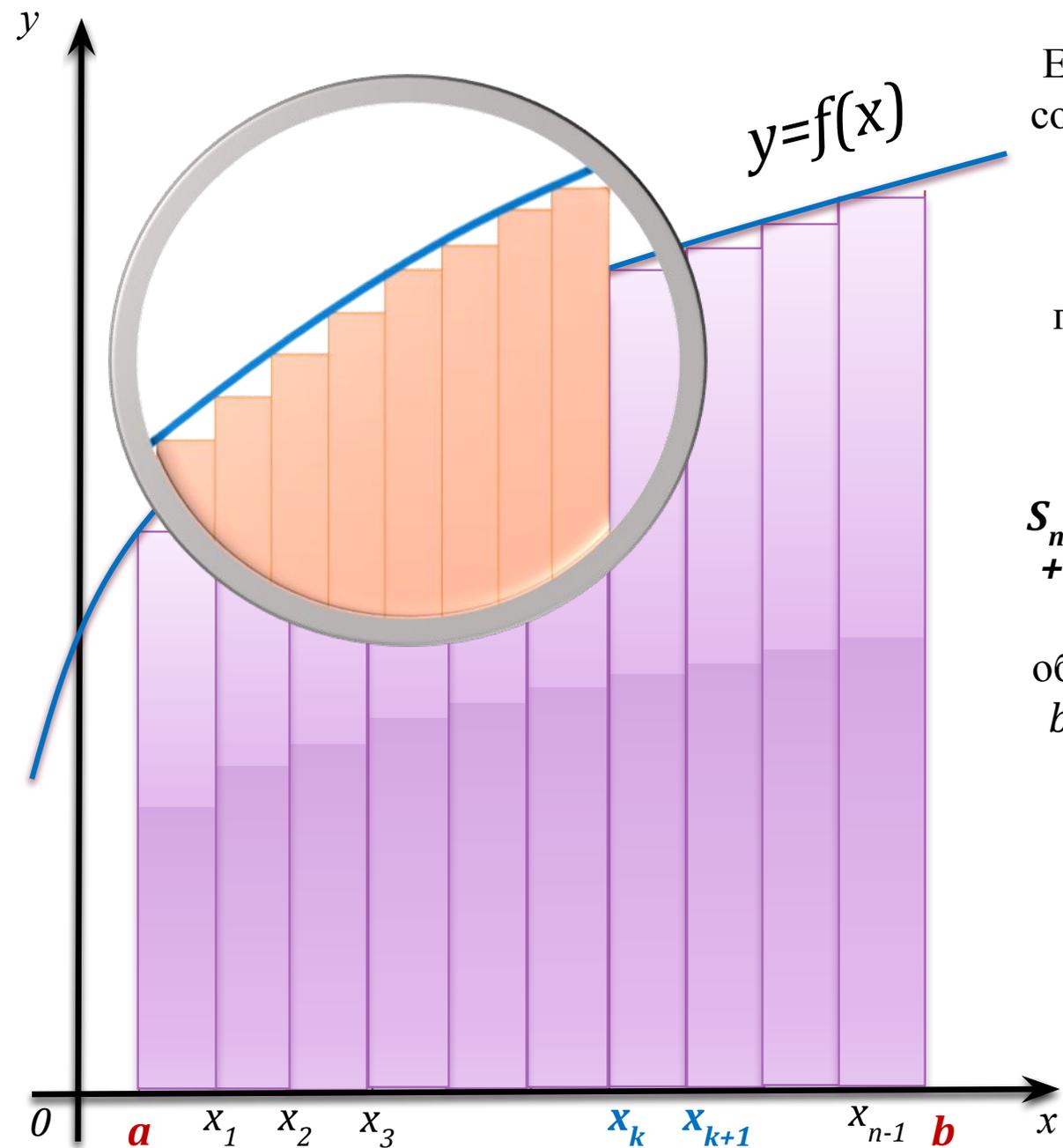
Тогда заданная трапеция
разобьётся на n узеньких
столбиков. Площадь всей
трапеции равна сумме
площадей столбиков.



Рассмотрим отдельно k -ый столбик, т.е. криволинейную трапецию, основанием которой служит отрезок $[x_k; x_{k+1}]$.

Заменяем его прямоугольником с тем же основанием и высотой, равной $f(x_k)$.

Площадь прямоугольника равна $f(x_k) \cdot \Delta x$, где Δx – длина отрезка $[x_k; x_{k+1}]$; естественно считать составленное произведение приближённым значением площади k -го столбика.



Если теперь сделать то же самое со всеми остальными столбиками, то придём к следующему результату: площадь заданной криволинейной трапеции приблизительно равна площади S_n ступенчатой фигуры, составленной из n

прямоугольников. Имеем:

$$S_n = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \dots + f(x_k)\Delta x_k + \dots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$$

Здесь ради единообразия обозначений мы считаем что $a=x_0$, $b=x_n$, Δx_0 – длина отрезка $[x_0; x_1]$, Δx_1 – длина отрезка $[x_1; x_2]$ и т.д.

Итак, $S \approx S_n$, причём это приближённое равенство тем больше, чем больше n .

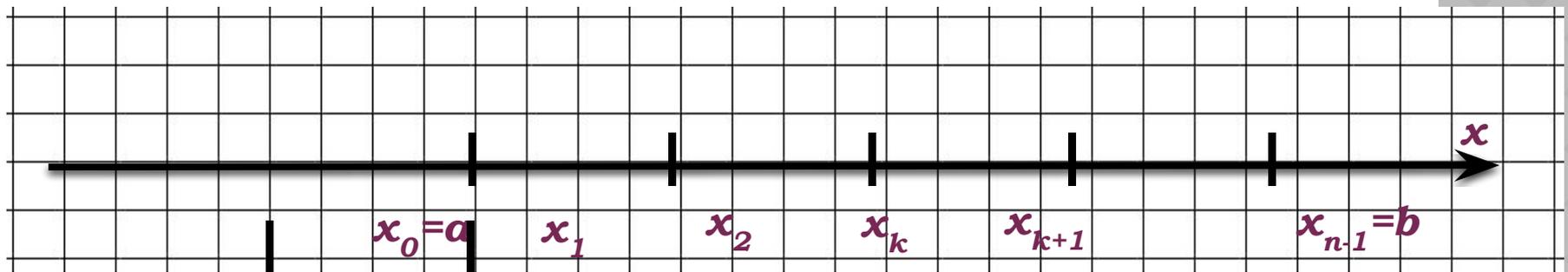
Принято считать, что искомая
площадь есть предел
последовательности (S_n)

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Задача 2 (о вычислении массы стержня).

Дан прямолинейный неоднородный стержень, плотность в точке x вычисляется по формуле $\rho = \rho(x)$. *Найти массу стержня.*

Как известно из курса физики, $m = \rho \cdot V$, но этот закон действует только для однородных тел, т.е. в тех случаях, когда плотность постоянна. Для неоднородного стержня используется тот же метод, что был применён при решении задачи 1.



- 1) Разобьём отрезок $[a; b]$ на n равных частей;
- 2) Рассмотрим отдельно k -ый участок $[x_k; x_{k+1}]$ и будем считать, что плотность во всех точках этого участка постоянна, а именно такая, как, например, в точке x_k . Итак, считаем, что $\rho = \rho(x_k)$.
- 3) Найдём приближённое значение массы m_k k -го участка:

$$m_k \approx \rho(x_k) \cdot \Delta x_k,$$

Где Δx_k , как и в предыдущей задаче, - длина отрезка $[x_k; x_{k+1}]$.

4) Найдём приближённое значение массы m стержня:

$$m \approx S_n,$$

$$\text{Где } S_n = m_0 + m_1 + m_2 + \dots + m_k + \dots + m_{n-1} = \\ \rho(x_0)\Delta x_0 + \rho(x_1)\Delta x_1 + \rho(x_2)\Delta x_2 + \dots + \rho(x_k)\Delta x_k + \dots + \rho(x_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

5) Точное значение массы стержня вычисляется по формуле

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Задача 3 (о перемещении точки).

По прямой движется точка. Зависимость скорости от времени выражается формулой $v=v(t)$; пусть для определённости $v(t)>0$.

Найти перемещение точки за промежуток времени $[a;b]$.

Если бы движение было равномерным, то задача решалась бы очень просто: $\mathbf{s} = \mathbf{v}t$, т.е. $\mathbf{s} = \mathbf{v}(\mathbf{b}-\mathbf{a})$. Для неравномерного движения приходится использовать те же идеи, на которых было основано решение двух предыдущих задач.

- 1) Разобьём отрезок $[\mathbf{a}; \mathbf{b}]$ на n равных частей.
- 2) Рассмотрим отдельно k -ый участок $[\mathbf{t}_k; \mathbf{t}_{k+1}]$ и будем считать, что скорость на этом промежутке времени постоянна, а именно такая, как, например, в момент времени \mathbf{t}_k . Итак, считаем, что $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{t}_k)$.
- 3) Найдём приближённое значение перемещения точки \mathbf{s}_k за промежутки времени $[\mathbf{t}_k; \mathbf{t}_{k+1}]$:

$$\mathbf{s}_k \approx \mathbf{v}(\mathbf{t}_k) \cdot \Delta \mathbf{t}_k,$$

- 4) Найдём приближённое значение перемещения \mathbf{s} :

$$\mathbf{s} \approx \mathbf{S}_n,$$

$$\text{Где } \mathbf{S}_n = \mathbf{s}_0 + \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \dots + \mathbf{s}_k + \dots + \mathbf{s}_{n-1} = \\ \mathbf{v}(\mathbf{t}_0)\Delta\mathbf{t}_0 + \mathbf{v}(\mathbf{t}_1)\Delta\mathbf{t}_1 + \mathbf{v}(\mathbf{t}_2)\Delta\mathbf{t}_2 + \dots + \mathbf{v}(\mathbf{t}_k)\Delta\mathbf{t}_k + \dots + \mathbf{v}(\mathbf{t}_{n-1})\Delta\mathbf{t}_{n-1}.$$

- 5) Точное значение перемещения вычисляется по формуле:

$$\mathbf{s} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{S}_n$$

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ.

Три различные задачи привели при их решении к одной и той же математической модели. Многие задачи из различных областей науки и техники приводят в процессе решения к такой же модели. Значит, данную математическую модель надо специально изучить, т.е.:

- а) присвоить ей новый термин;*
- б) ввести для неё обозначение;*
- в) научиться с ней работать.*

Этим и займёмся.

Понятие определённого интеграла.

Дадим определение той модели, которая была построена в трёх рассмотренных задачах для функции $y = f(x)$, непрерывной (но обязательно неотрицательной, как это предполагалось в рассмотренных задачах) на отрезке $[a; b]$:

1) Разбивают отрезок $[a; b]$ на n равных частей.

2) Составляют сумму:

$$S_n = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \dots + f(x_k)\Delta x_k + \dots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$$

3) Вычисляют $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

В курсе математического анализа доказано, что при указанных условиях этот предел существует. Его называют определённым интегралом от функции $y = f(x)$ по отрезку $[a; b]$ и обозначают так:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Результат, полученный в 1 задаче, можно переписать так:

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Где S – *площадь криволинейной трапеции*.
В этом состоит *геометрический смысл определённого интеграла*.

Из решения задачи 2 следует, что масса m неоднородного стержня с плотностью $\rho(x)$ вычисляется по формуле

$$m = \int_a^b \rho(x) dx$$

В этом состоит *физический смысл определённого интеграла*.

Из решения задачи 3 следует, что перемещение S точки, движущейся по прямой со скоростью $v=v(t)$, за промежуток времени от $t=a$ до $t=b$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b v(t) dt$$

Это ещё одно *физическое истолкование определённого интеграла*.

Формула Ньютона - Лейбница

Теорема.

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$.

*Приведённую формулу обычно называют **формулой Ньютона – Лейбница** в честь английского физика **Исаака Ньютона (1643-1727)** и немецкого философа **Готфрида Лейбница (1646-1716)**, получивших её независимо друг от друга и практически одновременно.*