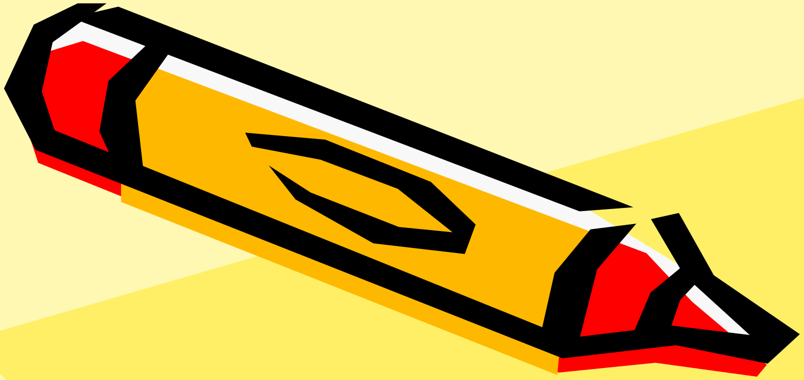
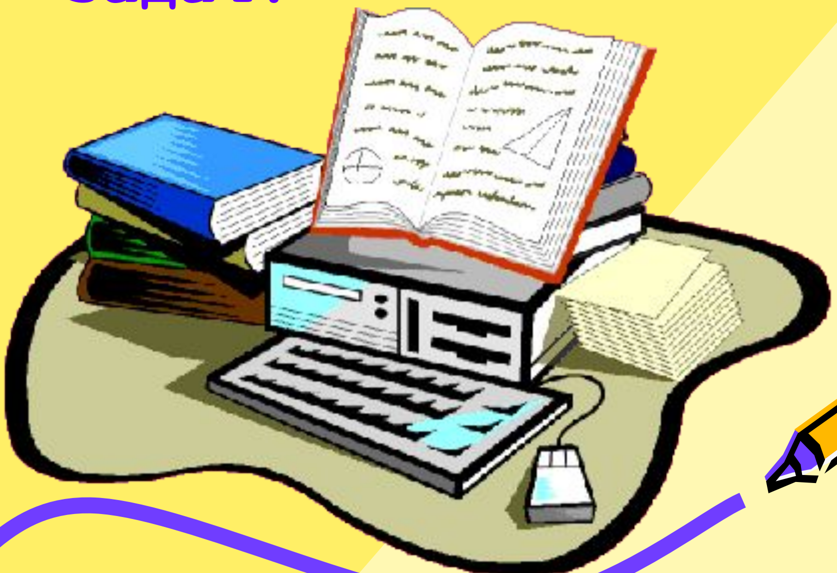


Квадратные уравнения

Теория. Примеры решения задач.



- История
- Классификация
- Применение
- Итоговый тест

ИСТОРИЯ

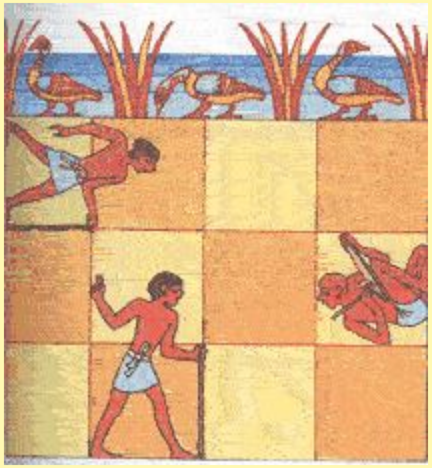
Процесс " решения" уравнения есть просто акт приведения его к возможно более простой форме. В какой бы форме уравнение ни было написано, его информационный характер остается тот же. Лодж О.

Впервые квадратное уравнение сумели решить математики древнего Египта. В одном из папирусов есть задача: "Найти длину прямоугольного поля, если площадь 12, а $\frac{3}{4}$ длины равны ширине.

Пусть х - длина поля. Тогда $\frac{3x}{4}$ - его ширина, S = $\frac{3x^2}{4}$ - площадь. Получилось квадратное уравнение

$\frac{3x^2}{4}$ =12. В папирусе дано правило:

***"Разделить 12 на $\frac{3}{4}$". 12 : $\frac{3}{4}$ =12 · $\frac{4}{3}$=16. Итак, x^2 =16.
"Длина поля равна 4" - указано в папирусе.***



Прошли тысячелетия, и сейчас мы получим два корня уравнения: -4 и 4.Но в египетской задаче и мы приняли бы х = 4,т.к. длина поля может быть только положительной величиной.

ИСТОРИЯ

Квадратные уравнения
в Древнем Вавилоне

Квадратные уравнения
в Европе XIII-XVII
веков.

Франсуа
Виет

КАК ВАВИЛОНЯНЕ РЕШАЛИ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УРАВНЕНИЕ ПРЕДСТАВЛЯЕТ СОБОЙ НАИБОЛЕЕ СЕРЬЕЗНУЮ И ВАЖНУЮ ВЕЩЬ В МАТЕМАТИКЕ. Лодж О.

Необходимость решать уравнения не только первой, но и второй степени еще в древности была вызвана потребностью решать задачи, связанные с нахождением площадей земельных участков и с земляными работами военного характера, а также с развитием астрономии и самой математики. Квадратные уравнения умели решать около 2000 лет до н.э. вавилоняне. Применяя современную алгебраическую запись, можно сказать, что в их клинописных табличках встречаются и неполные, и полные квадратные уравнения, например:

$x^2 + x = 3/4$, $x^2 - x = 14,5$.

Правило решения этих уравнений изложено в вавилонских текстах и по существу совпадает с современным, но не известно, каким образом дошли вавилоняне до этого правила. Почти все найденные до сих пор клинописные тексты приводят только задачи с решениями, изложенными в виде рецептов, не говоря, каким образом они были найдены.

Несмотря на высокий уровень развития алгебры в Вавилоне, в клинописных текстах нет понятия отрицательного числа и общих методов решения квадратных уравнений.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЕВРОПЕ XIII-XVII ВЕКОВ

Уравнение есть равенство, которое еще не является истинным, но которое стремятся сделать истинным, не будучи уверенными, что этого можно достичь. Фуше А.

Формулы решения квадратных уравнений по образцу ал-Хорезми в Европе были впервые изложены в "Книге абака", написанной в 1202 году итальянским математиком Леонардо Фиббоначи. Автор разработал самостоятельно некоторые новые алгебраические примеры решения задач и первый в Европе подошел к введению отрицательных чисел.

Общее правило решения квадратных уравнений,приведенных к единому каноническому виду

$$x^2 + bx = c$$

при возможных комбинациях знаков коэффициентов b,c, было сформулировано в Европе лишь в 1544 г. М. Штифелем.

ФРАНСУА ВИЕТ

Виет (1540-1603) сделал решающий шаг, введя символику во все алгебраические доказательства путем применения буквенных обозначений для выражения как известных, так и неизвестных величин не только в алгебре, но также и в тригонометрии. Бернал Д.

Франсуа Виет.
Литография с гравюры XVI в.

Франсуа Виет родился в городке Фонтене-ле-Конт, недалеко от знаменитой крепости Ла- Рошель.Получил юридическое образование,но стал секретарем и домашним учителем.Тогда Виет очень увлекся изучением астрономии и тригонометрии и даже получил некоторые важные результаты.

В 1571 году Виет переехал в Париж,где возобновил адвокатскую практику а позже стал советником парламента в Бретани.Занял должность тайного советника сначала при королеГенрихе III, а затем и при Генрихе IV. Одним из самых замечательных достижений Виета на королевской службе была разгадка шифра из 500 знаков, меняющихся время от времени, которым пользовались испанцы.

Из-за религиозных противоречий был отстранен от двора и вернулся на службу лишь после разрыва короля с герцогами Гизами.

Четыре года опалы оказались чрезвычайно плодотворными для Виета. Математика стала его единственной страстью. Мог просиживать за письменным столом по трое суток подряд, только иногда забываясь сном на несколько минут. Именно тогда он начал большой труд, который назвал "Искусство анализа или Новая алгебра".Книгу завершить не удалось, но главное было написано. И это главное определило развитие всей математики Нового времени.

КЛАССИФИКАЦИЯ

Квадратным уравнением называется уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где x - неизвестное, a,b,c - заданные числа, причем a≠0; a называют старшим коэффициентом, b - вторым коэффициентом, c - свободным членом.

Полные квадратные уравнения

Приведенные
(если a = 1)
$x^2 + px + q = 0$

Неприведенные
$ax^2 + bx + c = 0$

Неполные квадратные уравнения
(если хотя бы один из коэффициентов b или c равен 0)

$ax^2 + bx = 0$
(c=0)
решается с помощью разложения на множители
$x(ax + b) = 0$
$x=0$ или $ax+b=0$
$x=-b/a$

$ax^2 + c = 0$
(c не равно 0)
приводится к виду
$x^2 = d$, где $d=-c/d$
если $d>0$,
$x=\sqrt{d}$ и $x=-\sqrt{d}$
если $d<0$, корней нет

$ax^2 = 0$
имеет корень
$x=0$

Формула корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$):

$D = b^2 - 4ac$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Зависимость числа корней квадратного уравнения от дискриминанта D:

$D > 0$

Уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$D = 0$

Уравнение имеет один корень

$x = -b/(2a)$

$D < 0$

Уравнение не имеет корней

Теорема Виета.

Если x_1 и x_2 - корни уравнения $x^2 + px + q = 0$,
то справедливы формулы:

$$x_1 + x_2 = -p,$$
$$x_1 x_2 = q,$$

т.е. сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

ПРИМЕНЕНИЕ

- Биквадратные уравнения
- Дробные рациональные уравнения
- Системы уравнений
- Текстовые задачи
- Задачи с параметрами
- Разложение на множители
- Графическое решение

БИКВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где а не равно 0, называют биквадратным.
После замены $x^2 = t$ биквадратное уравнение сводится к квадратному.

Задача.
Решить биквадратное уравнение.
$2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$
Решение:
Обозначим $x^2 = t$. Тогда $x^4 = (x^2)^2 = t^2$ и уравнение примет вид:
$2t^2 - 5t + 2 = 0$
$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 > 0$,
$t_1=(5 + 3)/4 = 2$ и $t_2=(5 - 3)/4 = 1/2$
Так как $t = x^2$, то корни исходного уравнения найдем в результате решения уравнений
$x_2=2$ и $x_2=1/2$.

Имеем:

$$x_1 = \sqrt{2}$$
$$x_2 = -\sqrt{2}$$
$$x_3 = \sqrt{\frac{1}{2}}$$
$$x_4 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Ответ:

$$x_1 = \sqrt{2}$$
$$x_2 = -\sqrt{2}$$
$$x_3 = \sqrt{\frac{1}{2}}$$
$$x_4 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

ДРОБНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

При решении дробных рациональных уравнений поступают следующим образом:
находят общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
умножают обе части уравнения на общий знаменатель (или на дополнительные множители);
решают получившееся целое уравнение;
исключают из его корней те, которые обращают в ноль общий знаменатель.

Задача:
решить дробное рациональное уравнение.
Решение:

$$\frac{2(x-1)}{x+3}-\frac{x-6}{x-3}=\frac{18}{x^2-9}$$

$$\frac{(2x-2)(x-3)}{(x+3)(x-3)}-\frac{(x-6)(x+3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{18}{x^2-9}$$

$$2x^2-6x-2x+6-x^2-3x+6x+18=18$$

$$x^2-5x+6=0$$

$$D=(-5)^2-4(6)=1$$

$$x_1=\frac{5+1}{2}=3$$

$$x_2=\frac{5-1}{2}=2$$

$x_1=3$ не входит в область определения уравнения

Ответ: 2.

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Задача.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}(x-y)^2=12\\ x+y=2\end{cases}$$

Решение:

Выразим х через у: х = 2 - у.

Подставим выражение для х в первое уравнение:

$(2 – y – y)^2 = 12$

$(2 – 2y)^2 = 12$

$4 – 8y + 4y^2 – 12 = 0$

$4y^2 – 8y – 8 = 0$

$y^2 – 2y – 2 = 0$

$D= (-2)^2 – 4\cdot(-2) = 12$

$$y_1 = 1+\sqrt{3}$$
$$y_2 = 1-\sqrt{3}$$

Подставим найденные значения в выражение для х:

$$x_1 = 1-\sqrt{3}$$
$$x_2 = 1+\sqrt{3}$$

ОТВЕТ:

$$x_1 = 1-\sqrt{3} \quad y_1 = 1+\sqrt{3}$$
$$x_2 = 1+\sqrt{3} \quad y_2 = 1-\sqrt{3}$$

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Задача.

На лист картона, имеющий форму прямоугольника длиной 30 см, а шириной 20 см, наклеили картину, имеющую форму прямоугольника площадью 200 см2, так, что края картины находятся на одинаковом расстоянии от краев листа. Найти это расстояние.

Решение.

Пусть искомое расстояние равно x см. Тогда длина картины равна (30-2x) см, ширина равна (20-2x) см. Площадь картины равна (30-2x)(20-2x) см^2. Так как по условию площадь картины 200 см^2, получим уравнение:

$$(30-2x)(20-2x)=200$$

$$600 - 60x - 40x + 4x^2 = 200$$

$$4x^2 - 100x + 400 = 0$$

$$x^2 - 25x + 100 = 0$$

$x_1=5$ и $x_2=20$

x=20 - не подходит по смыслу задачи

Значит, искомое расстояние - 5 см.

Ответ: 5 см.

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Задача.

При каких значениях а уравнение
$x^2 - 2ax + a(1 + a) = 0$
а) имеет два различных корня;
б) имеет только один корень;
в) не имеет корней.

Решение.

Найдем дискриминант квадратного уравнения
$D = (-2a)^2 - 4a(1 + a) = 4a^2 - 4a - 4a^2 = -4a$

а) Уравнение имеет два различных корня, если $D>0$:
$-4a>0$, то есть $a<0$.

б) Уравнение имеет только один корень, если $D=0$:
$-4a = 0$, то есть $a = 0$.

в) Уравнение не имеет корней, если $D<0$:
$-4a<0$, то есть $a>0$.

Ответ:

при $a<0$ уравнение имеет два различных корня
при $a=0$ уравнение имеет только один корень;
при $a>0$ уравнение не имеет корней.

РАЗЛОЖЕНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ

Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ тогда и только тогда представим в виде произведения линейных множителей с действительными коэффициентами:
$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$,
когда дискриминант $D=b^2-4ac$ этого квадратного трехчлена неотрицателен
(x_1 и x_2 - корни трехчлена)

Задача.
Разложить на множители квадратный трехчлен
$6x^2 -7x + 2$

Решение.
Выносим коэффициент при x^2 за скобки:
$6x^2-7x+2=6(x^2-7/6x+2/6)$
Находим корни уравнения
$x^2 - (7/6)x + 2/6 = 0$:
$D=b^2-4ac=49-4\cdot6\cdot2=1>0$
$x_1=1/2;\ x_2=2/3$
Запишем: $6x^2-7x+2 = 6(x-1/2)(x-2/3) = (2x-1)(3x-2)$

Ответ:
$6x^2-7x+2=(2x-1)(3x-2)$

ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Расмотрим приведенное квадратное уравнение.

$x^2+px+q=0$

Перепишем его в виде: $x^2=-px-q$

Построим графики зависимости: $y=x^2$; $y=-px+q$

График первой зависимости - парабола.

График второй зависимости - прямая.

Найдем точки пересечения параболы и прямой, абсциссы точек пересечения являются корнями квадратного уравнения.

Если парабола и прямая не имеют общих точек, то соответствующее квадратное уравнение не имеет решений.

Этот способ удобен, если не требуется большой точности.