Решение 19 задачи ЕГЭ

Желтова Ольга
 Николаевна
Учитель математики
МАОУ Лицей №6
Г. Тамбов

Статистика и критерии

- Процент выполнения задания 19 ЕГЭ по математике в 2015 году:
- **1** балл получили *19,0%*
  2 балла получили *3,7 %*
  3 балла получили *0,7 %*
  4 балла получили *2,3 %*

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующий результатов: — пример в п. *а*; — верное доказательство в п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задачи на разбиение множеств

- Множество чисел назовём хорошим, если его можно разбить на два подмножества с одинаковой суммой чисел.
- а) Является ли множество $\{200; 201; 202; \ldots; 299\}$ хорошим?
- б) Является ли множество $\{2; 4; 8; \ldots; 2^{100}\}$ хорошим?
- в) Сколько хороших четырёхэлементных подмножеств у множества $\{1; 2; 4; 5; 7; 9; 11\}$?
- *Демонстрационная версия ЕГЭ по математике, 2016*

Задачи на разбиение множеств

- а) Является ли множество {200; 201; 202; ...; 299} хорошим?

А: {200, 299, 202, 297, 204, 295, ..., 248, 251},

В: {201; 298; 203; 296; 205, 294, ..., 249, 250}.

Задачи на разбиение множеств

- б) Является ли множество $\{2; 4; 8; ...; 2^{100}\}$ хорошим?
- $2^{100} = 2*2^{99} = 2^{99} + 2^{99} = 2^{99} + 2^{98} + 2^{98} = 2^{99} + 2^{98} + ... + 2^{1} = 2^{99} + 2^{98} + ... + 2^{1} + 2^{0} + 2^{0} = 2^{99} + ... + 2^{1} + 2$

Задачи на разбиение множеств

- в) Сколько хороших четырёхэлементных подмножеств у множества {1; 2; 4; 5; 7; 9; 11}?

1) A=B+C+D

2) A+B=C+D

- 1 случай: одно число является суммой трёх других, {1; 2; 4; 7} и {2; 4; 5; 11}.
- 2 случай: множество содержит две пары чисел с равными суммами, т.е. сумма всех чисел должна быть чётна, чтобы подмножество можно было разбить на две группы. Следовательно, 2 и 4 либо одновременно входят в подмножество, либо одновременно не входят в него.

Задачи на разбиение множеств

- Если 2 и 4 входят в подмножество, то либо сумма двух других чисел равна 6 ({1; 2; 4; 5}), либо разность двух других чисел равна 2, это подмножества:
- {1; 2; 4; 5}; {2; 4; 5; 7}; {2; 4; 7; 9}; {2; 4; 9; 11}.
- Если 2 и 4 не входят в подмножество, то хорошее подмножество лежит во множестве {1; 5; 7; 9; 11}. Получаем хорошие подмножества:
- {1; 5; 7; 11} и {5; 7; 9; 11}.
- Всего 8 хороших подмножеств.

6 6

2 4 x y

2 x 4 y

$2+x=4+y$

$x=2+y$

Задачи на делимость

- После того, как учитель доказал классу новую теорему, выяснилось, что большая часть класса не поняла доказательство. На перемене один ученик вдруг понял доказательство (и только он). Также известно, что в классе учится не более 30, но не менее 20 человек.
- а) Могло ли получиться так, что теперь уже меньшая часть класса не понимает доказательство?
- б) Могло ли получиться так, что исходно процент учеников, понявших доказательство, выражался целым числом, а после перемены — нецелым числом?
- в) Какое наибольшее целое значение может принять процент учеников класса, так и не понявших доказательство этой теоремы?

Задачи на делимость

- а) Могло ли получиться так, что теперь уже меньшая часть класса не понимает доказательство?
- Да. Пусть в классе учится 29 человек, из которых сперва 15 человек не поняли доказательство (большая часть класса), а затем их осталось 14 (меньшая часть).

Задачи на делимость

- б) Могло ли получиться так, что исходно процент учеников, понявших доказательство, выражался целым числом, а после перемены — нецелым числом?

- Да. Пусть в классе было 24 ученика, из которых ровно 6 поняли доказательство. Тогда исходно процент понявших — 25, а после перемены, когда понявших станет 7, процент понявших будет нецелым.

Задачи на делимость

- в) Какое наибольшее целое значение может принять процент учеников класса, так и не понявших доказательство этой теоремы?
- Пусть всего в классе *n* учеников, а количество так и не понявших доказательство равно *k*. Очевидно, *k* не превосходит ($n - 1$), ведь один ученик понял доказательство на перемене.
- Тогда искомый процент равен $\frac{100k}{n}$
- Чтобы это число было как можно большим, требуется максимизировать дробь $\frac{k}{n}$ при условии, что $100k \vdots n$

Задачи на делимость

Максимальный делитель 100 между 20 и 30 – 25, максимальная дробь – $\frac{24}{25}$,

$100\cdot\frac{24}{25}=96\%$

- Докажем, что 96% - наибольший ответ.

$\frac{24}{25}=1-\frac{1}{25}$ Если n<25, то $\frac{1}{n}>\frac{1}{25}\Rightarrow 1-\frac{1}{n}<1-\frac{1}{25}$

- Разберём случаи $n\in\{26,27,28,29\}$

Задачи на делимость

$n = 26 \Rightarrow k \,\vdots\, 13;$

$k = 13; \quad \dfrac{13}{26} < \dfrac{24}{25}$

$n = 27 \Rightarrow k \,\vdots\, 27;$

$k = 0; \quad 0 < \dfrac{24}{25}$

$n = 28 \Rightarrow k \,\vdots\, 7;$

$k = 21; \quad \dfrac{21}{28} < \dfrac{24}{25}$

$n = 29 \Rightarrow k \,\vdots\, 29;$

$k = 0; \quad 0 < \dfrac{24}{25}$

$n = 30 \Rightarrow k \,\vdots\, 3;$

$k = 27; \quad \dfrac{27}{30} < \dfrac{24}{25}$

Следовательно, 96% – максимально возможное значение

Задачи на делимость

- В шахматы можно выиграть, проиграть или сыграть вничью. Шахматист записывает результат каждой сыгранной им партии и после каждой партии подсчитывает три показателя: «победы» — процент побед, округлённый до целого, «ничьи» — процент ничьих, округлённый до целого, и «поражения», равные разности 100 и суммы показателей «побед» и «ничьих». (Например, число 13,2 округляется до 13, число 14,5 округляется до 15, число 16,8 округляется до 17).
- а) Может ли в какой-то момент показатель «побед» равняться 17, если было сыграно менее 50 партий?
- б) Может ли после выигранной партии увеличиться показатель «поражений»?
- в) Одна из партий была проиграна. При каком наименьшем количестве сыгранных партий показатель «поражений» может быть равным 1?

Задачи на делимость

- а) Может ли в какой-то момент показатель «побед» равняться 17, если было сыграно менее 50 партий?
- Если из 6 партий шахматист выиграл одну, то показатель «побед» равен 16,(6)=17.

Задачи на делимость

- б) Может ли после выигранной партии увеличится показатель «поражений»?
- 200 партий: 100 побед, 95 проигрышей, 5 ничьих (2,5%).
  Показатель побед: 50, показатель ничьих: 3, показатель поражений: 47
- 201 партия: 101 победа, 95 проигрышей, 5 ничьих (2,48%).
- Показатель побед: 50, показатель ничьих: 2, показатель поражений: 48

Задачи на делимость

- в) Одна из партий была проиграна. При каком наименьшем количестве сыгранных партий показатель «поражений» может быть равным 1?

$$n=50:\ \ a_{пр}=\frac{100}{50}=2;\ \ a_{поб}+a_{нич}=\frac{49\cdot 100}{50}=98$$

$$n<50:\ \ a_{пр}>\frac{100}{50};\ \ a_{пр}>2;$$

$$a_{поб}+a_{нич}<\frac{49\cdot 100}{50};\ \ a_{поб}+a_{нич}<98$$

$$a_{поб}+0{,}5+a_{нич}+0{,}5<99;\ \ a_{пор}>1$$

Задачи на делимость

$$n = 51$$

$$\textit{Поражения}: 1$$

$$\textit{Победы}: 12$$

$$\textit{Ничьи}: 38$$

$$a_{поб} = \frac{100 \cdot 12}{51} = 23{,}52 \approx 24$$

$$a_{нич} = \frac{100 \cdot 38}{51} = 74{,}5 \approx 75$$

$$a_{пор} = 100 - 75 - 24 = 1$$

Задачи на делимость

- На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно −3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно −8.
- а) Сколько чисел написано на доске?
- б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
- в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Задачи на делимость

- Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей.
- Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому $4k - 8l + 0 \cdot m = -3(k + l + m)$.
- а) Сколько чисел написано на доске?
- Заметим, что в левой части приведённого выше равенства каждое слагаемое делится на 4, поэтому $k + l + m$ — количество целых чисел — делится на 4.
- По условию $40 < k + l + m < 48$, поэтому $k + l + m = 44$. Таким образом, написано 44 числа.

Задачи на делимость

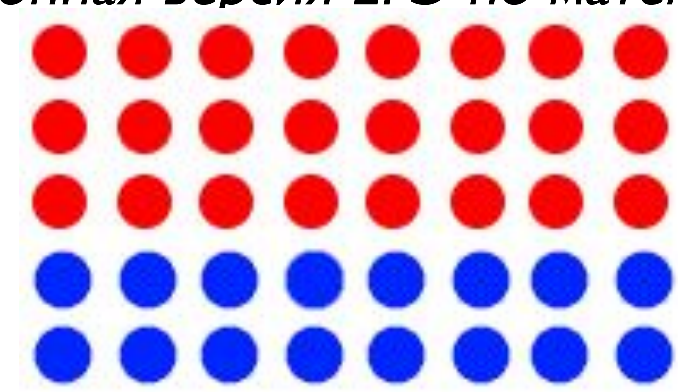
- б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
- Приведём равенство $4k - 8l = -3(k + l + m)$ к виду $5l = 7k + 3m$.
- Так как $m \geq 0$, получаем, что $5l \geq 7k$, откуда $l > k$. Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

Задачи на делимость

- в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?
- Подставим $k + l + m = 44$ в правую часть равенства $4k - 8l = -3(k + l + m)$, откуда $k = 2l - 33$.
- Так как $k + l \leq 44$, получаем:
  $3l - 33 \leq 44$; $3l \leq 77$; $l \leq 25$; $k = 2l - 33 \leq 17$,
  то есть положительных чисел не более 17.
- Приведём пример, когда положительных чисел ровно 17. Пусть на доске 17 раз написано число 4, 25 раз написано число −8 и два раза написан 0. Тогда указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

Задачи на делимость

- В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше чем 46, а вместе солдат меньше чем 111. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 8, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.
- а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.
- б) Можно ли построить роту указанным способом по 13 солдат в одном ряду?
- в) Сколько в роте может быть солдат?
- *Демонстрационная версия ЕГЭ по математике, 2015*



Задачи на делимость

- а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором?
- Например, 50 и 60 солдат. Вместе 110, их можно построить в колонну по 10 человек в ряду так, что 5 рядов будет заполнено солдатами только из первого взвода, а 6 рядов — только из второго.

Задачи на делимость

- б) Можно ли построить роту указанным способом по 13 солдат в одном ряду?
- Пусть в первом взводе *k* солдат, во втором *l* солдат. Тогда число солдат в ряду – общий делитель l и k. Также:

$$\begin{cases} 46 < k < l \\ k + l \le 110 \end{cases}$$

- Пусть общий делитель – 13. Тогда, учитывая, что 46 < *k* < 55, получаем, что *k* = 52. Наименьшее возможное значение *l* равно 52 +13= 65, но вместе получается 117 человек, что противоречит условию.

Задачи на делимость

- в) Сколько в роте может быть солдат?

$$\begin{cases} l-k \geq 9 \\ k+l \leq 110 \end{cases} \Rightarrow 2k \leq 101 \Leftrightarrow k \leq 50$$

- в) Пусть d – наименьший общий делитель l и k, d>8.

$$k+d \leq l \leq 110-k$$

$$46 < k \leq 50$$

Задачи на делимость

$k = 47 \Rightarrow d = 47,\ \ 47 + 47 \le 110 - 47 = 63.$

Противоречие

$k = 48 \Rightarrow d = 12,\ \ l = 60$

В роте 108 *человек*

$k = 49 \Rightarrow 98 \le l \le 110 - 49 = 61$

Противоречие

$k = 50 \Rightarrow d = 10,\ \ l = 60$

В роте 110 *человек*

Свойства чисел

- Будем называть четырёхзначное число очень счастливым, если все цифры в его десятичной записи различны, а сумма первых двух из этих цифр равна сумме последних двух из них. Например, очень счастливым является число 3140.
- а) Существуют ли двадцать последовательных четырёхзначных чисел, среди которых есть три очень счастливых?
- б) Может ли разность двух очень счастливых четырёхзначных чисел равняться 2016?
- в) Найдите наименьшее простое число, для которого не существует кратного ему очень счастливого четырёхзначного числа.
- *Тренировочная работа по математике 18.12.2015*

Свойства чисел

- а) Существуют ли двадцать последовательных четырёхзначных чисел, среди которых есть три очень счастливых?
- Примером таких чисел являются 5014, 5015, …, 5033. Очень счастливыми среди них являются числа 5014, 5023 и 5032.

Свойства чисел

- б) Может ли разность двух очень счастливых четырёхзначных чисел равняться 2016?
- Пусть число $1000a + 100b + 10c + d$

счастливое. Тогда счастливым будет и

$$1000a + 100b + 10c + d + 2016 = 1000(a + 2) + 100b + 10(c + 1) + d + 6$$

$$\begin{cases} a + b = c + d \\ a + 2 + b = c + 1 + d + 6 \end{cases}$$, у системы нет решений

Свойства чисел

- в) Найдите наименьшее простое число, для которого не существует кратного ему очень счастливого четырёхзначного числа.
- Будем проверять все простые числа и искать кратные им
- 2 – 2680 7 – 3892
- 3 – 2415
- 5 – 2415

Свойства чисел

- Рассмотрим число 11

$$1000a+100b+10c+d=11(91a+9b+c)-(b-a+d-c)$$
$$(b-a+d-c)\,\vdots\,11$$

$$[b+d-(a+c)]\,\vdots\,11$$

- Так как a, b, c, d – цифры, то

$$\left[\begin{array}{l} b+d-(a+c)=-11(1) \\ b+d-(a+c)=0(2) \\ b+d-(a+c)=11(3) \end{array}\right.$$

Свойства чисел

$$(1)$$

$$b+d-(a+c)=-11$$

$$\begin{cases} b+d=a+c-11 \\ a+b=c+d \end{cases}$$

$$d-a=a-d-11 \Leftrightarrow 2d=2a-11 \Leftrightarrow 2(a-d)=11$$

- 2 не кратно 11, a-d кратно 11 только когда a-d=0, т.е. d=a, что противоречит условию

Свойства чисел

(3)

$$b+d-(a+c)=11$$

$$\begin{cases} b+d=a+c+11 \\ a+b=c+d \end{cases}$$

$$d-a=a-d+11 \Leftrightarrow 2d=2a+11 \Leftrightarrow 2(d-a)=11$$

- Аналогично с предыдущим случаем

Свойства чисел

(2)

$$b+d-(a+c)=0$$

$$\begin{cases} b+d=a+c \\ a+b=c+d \end{cases}$$

$$d-a=a-d \Leftrightarrow a=d$$

- Также противоречит условию.
- Таким образом, не существует счастливого числа, кратного 11.