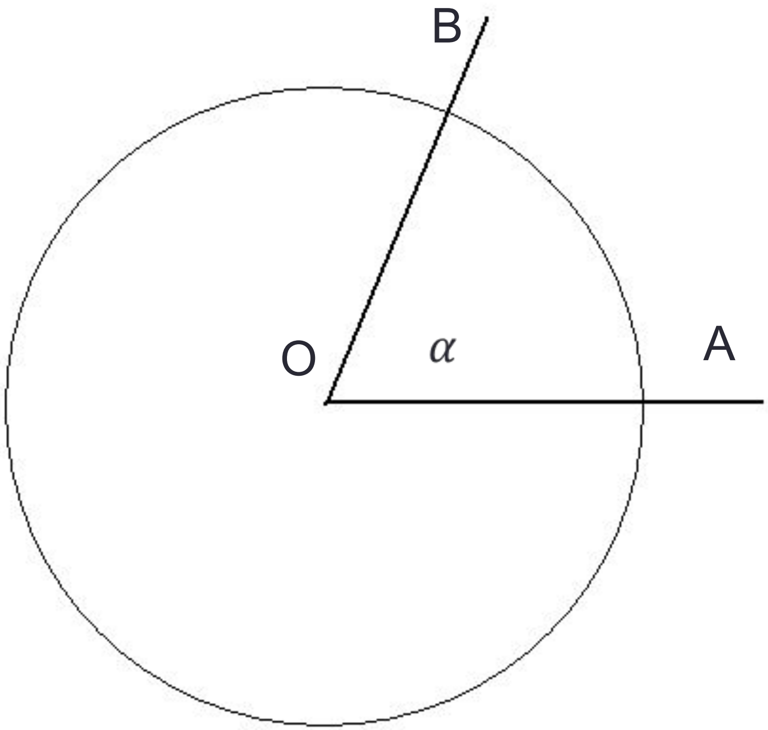
ПОНЯТИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

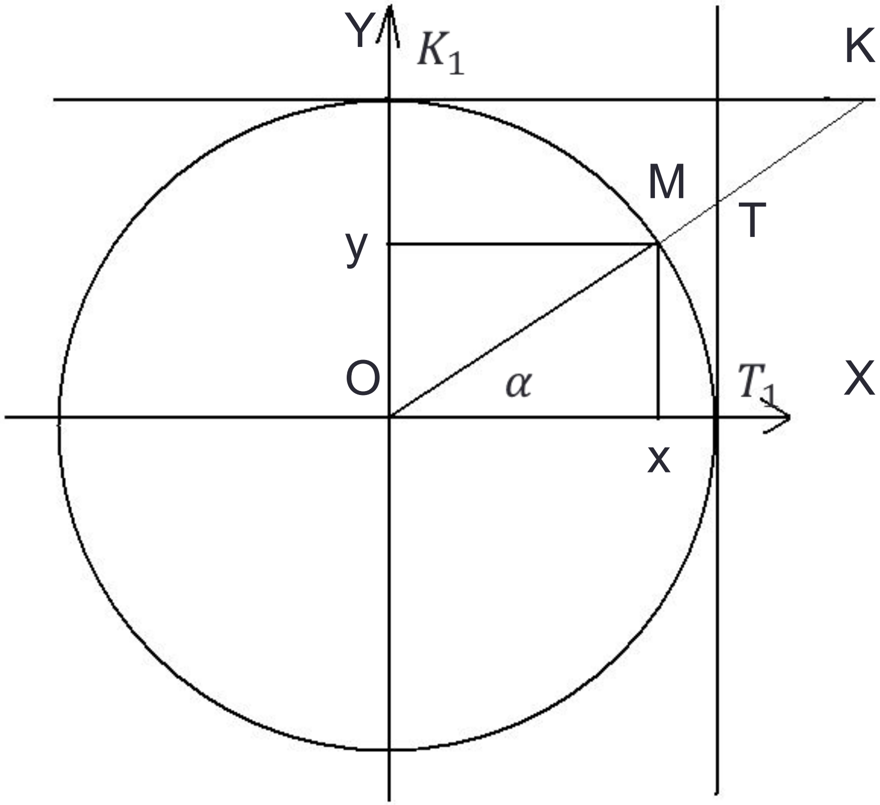
Содержание

Угол поворота



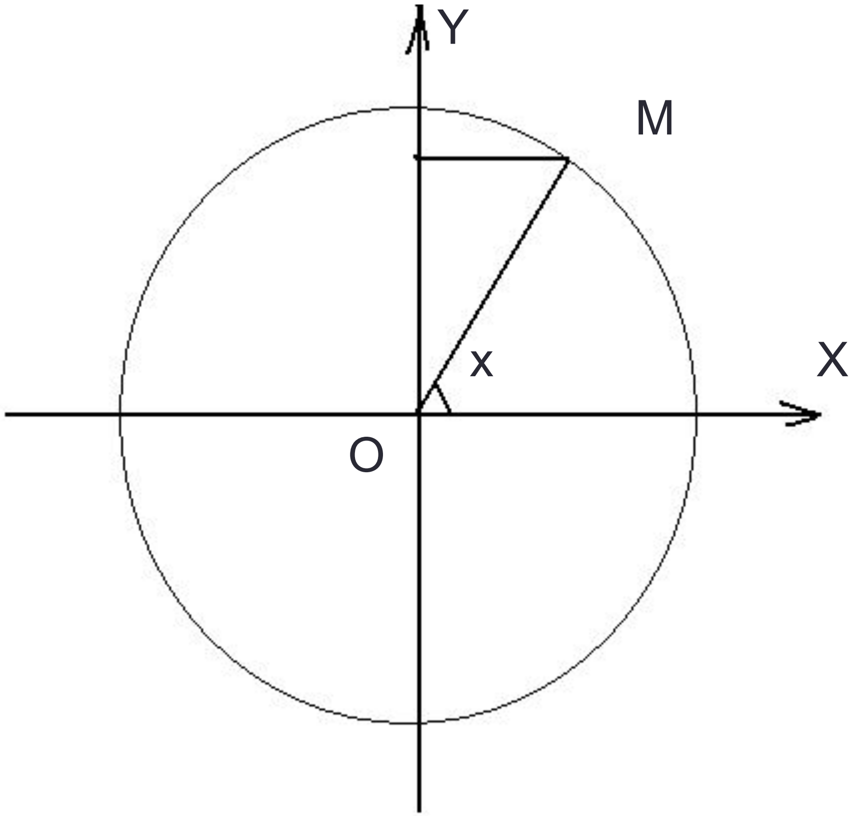
- $\angle AOB = \alpha^0 + 360^0 \cdot k$, где $k \in Z$
- 1 радиан – дуга, длина которой равна радиусу, $1 \text{ рад} = \frac{180^0}{\pi} \approx 57^0 17'$
- $\varphi^0 = \frac{\pi\varphi}{180}$ рад
- $\alpha \text{ рад} = \frac{180^0 \cdot \alpha}{\pi}$

Определения



- Рассмотрим единичную окружность и точку M(x;y) на этой окружности.
- $\sin\alpha = y$
- $\cos\alpha = x$
- $tg\,\alpha = \frac{y}{x}$
- $ctg\,\alpha = \frac{x}{y}$

Функция синус

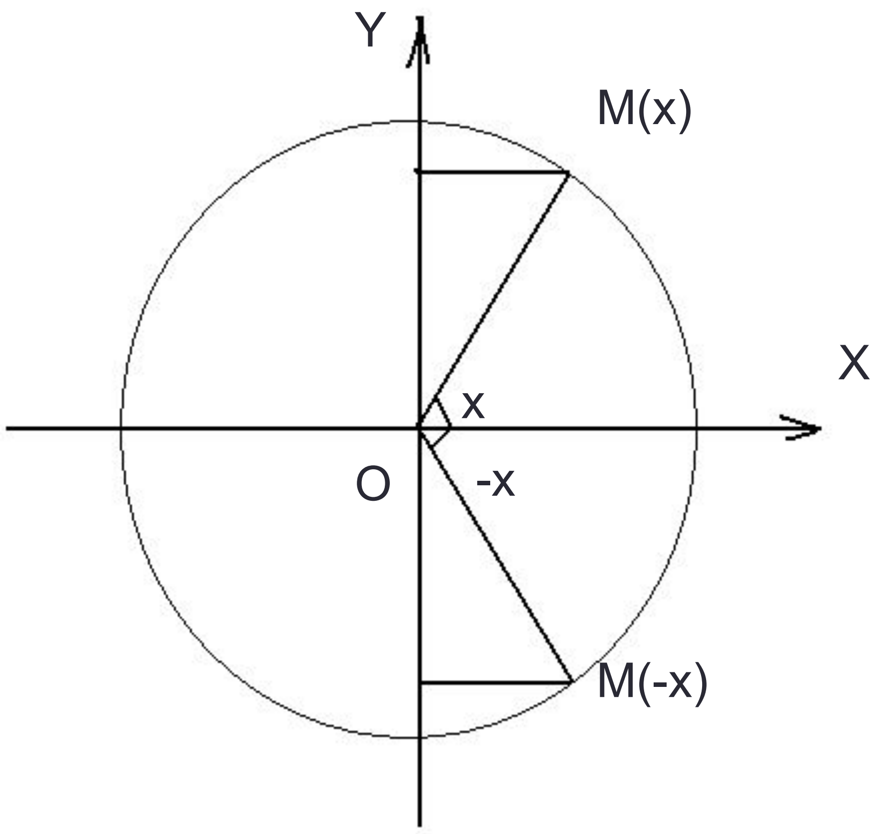


- Определение: Функция синус ставит в соответствие каждому числу x ординату точки $\mathrm{M}(x)$ координатной окружности.
- $f(x) = \sin(x)$
- $D(f) = R,$
- $2\pi n \leq x < 2\pi(n+1), n \in Z$

Периодичность

- Функция синус периодическая с наименьшим положительным периодом равным 2π.
- Доказательство: 1) $\sin x = \sin(x + 2\pi)$;
2) пусть существует Т – период , где $0 < T < 2\pi$. Тогда $\sin x = \sin(x + T)$, при $x = 0$ $\sin T = 0, T = \pi$. Получим $\sin x = \sin(x + \pi)$, при $x = \frac{\pi}{2}$ неверно. Противоречие, значит наименьший положительный период 2π.

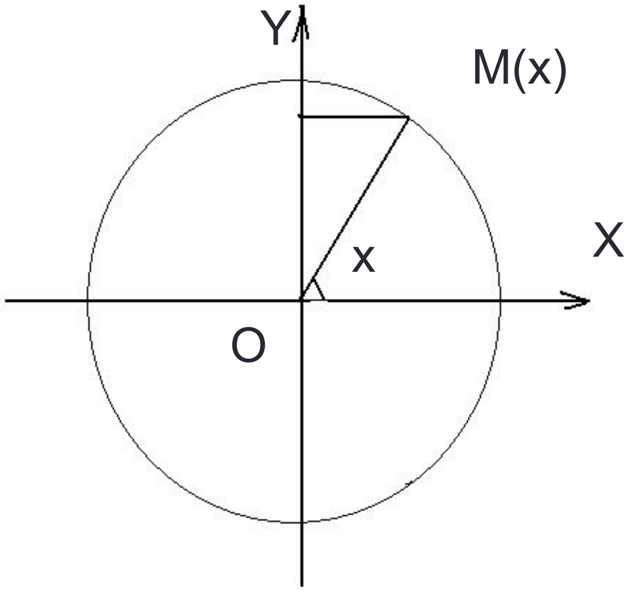
Нечетность



- Функция синус нечетная.
- Доказательство: точки $M(x)$ и $M(-x)$ имеют противоположные ординаты, значит $\sin x = -\sin(-x)$

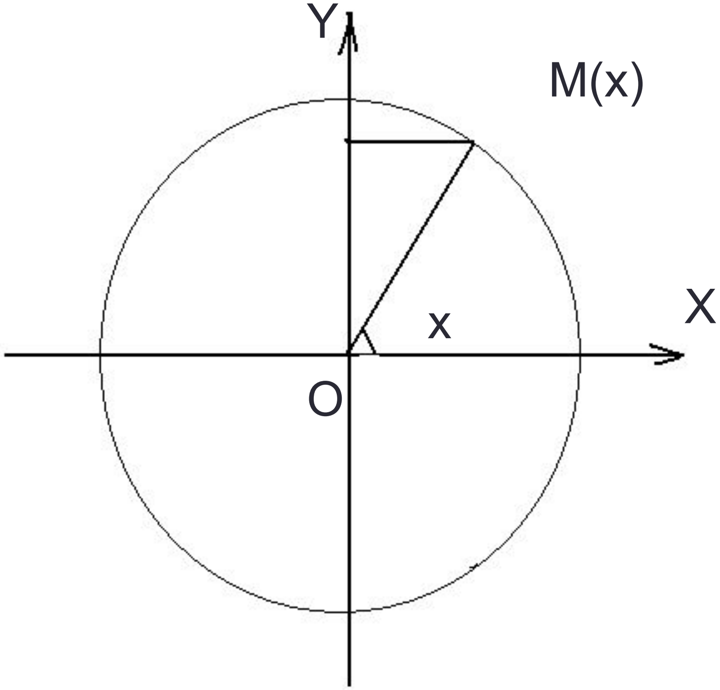
Нули функции, промежутки знакопостоянства

- Нули синуса: $f(x) = 0$: $\sin x = 0$, значит $x = \pi n, n \in Z$
- $f(x) > 0$:
- $\sin x > 0$ в 1 и 2 четверти, значит $2\pi n < x < 2\pi n + \pi, n \in Z$.
- $f(x) < 0$:
- $\sin x < 0$ в 3 и 4 четверти, значит $2\pi n + \pi < x < 2\pi n + 2\pi, n \in Z$



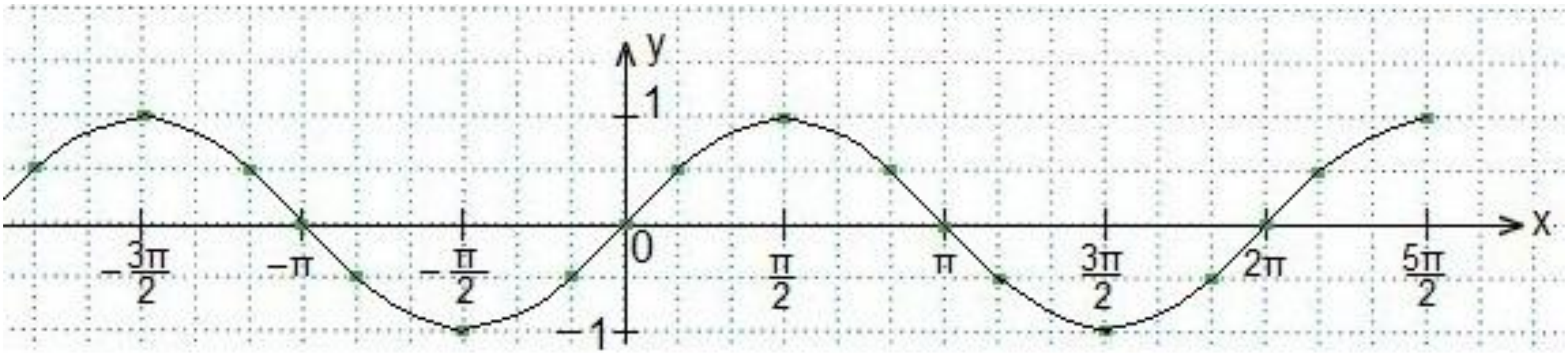
Монотонность

- Возрастание синуса в 1 и 4 четверти: $f(x) = \sin x\ \uparrow$ при $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.
- Убывание синуса во 2 и 3 четверти: $f(x) = \sin x\ \downarrow$ при $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.



Область значений, график

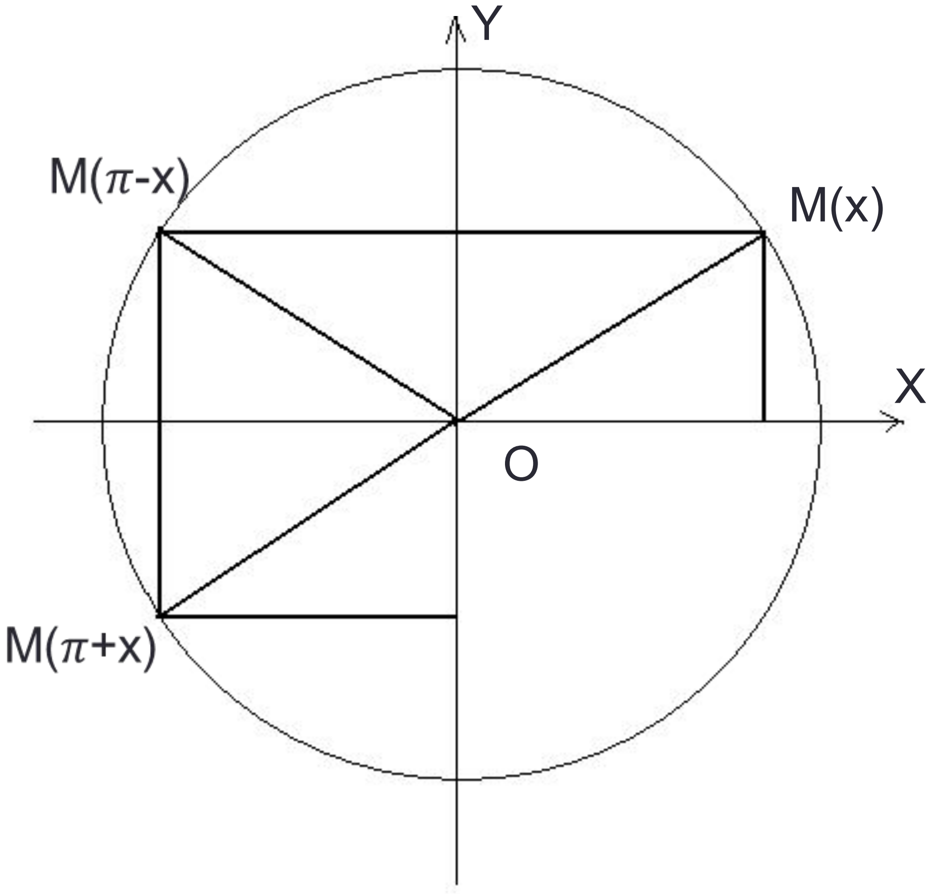
- $f(x) = \sin x$ $E(f) = [-1; 1]$



Основное тригонометрическое тождество

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- Доказательство: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ по теореме Пифагора, как сумма квадратов абсциссы и ординаты точки единичной окружности.

Формулы приведения



- $\cos(x+\pi) = -\cos x$
- $\sin(x+\pi) = -\sin x$
- $\cos(\pi-x) = -\cos x$
- $\sin(\pi-x) = \sin x$

Функция тангенс

- Определение: $tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- ООФ: $\cos(x) \neq 0\,, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$
- $D(f)$: $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{3\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$

Периодичность

- Функция тангенс периодическая с наименьшим положительным периодом равным π.
- Доказательство: 1) $x \in D(f)$, значит $x + \pi \in D(f)$; $tg(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = tg(x)$.
- 2) Пусть существует Т – период , где $0 < T < \pi$. Тогда $tg\,x = tg(x+T)$, при $x = 0$ $tg\,T = 0, T = 0$. Получим противоречие, значит наименьший положительный период π.

Нечетность

- Функция тангенс нечетная.
- Доказательство: 1) D(f) симметрична относительно 0;

2) $tg(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -tg(x)$

Нули функции, промежутки знакопостоянства

- Нули тангенса: $tg(x) = 0;\ x = \pi n, n \in Z$
- $tg(x) > 0$ в 1 и 3 четверти:

$$0 + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

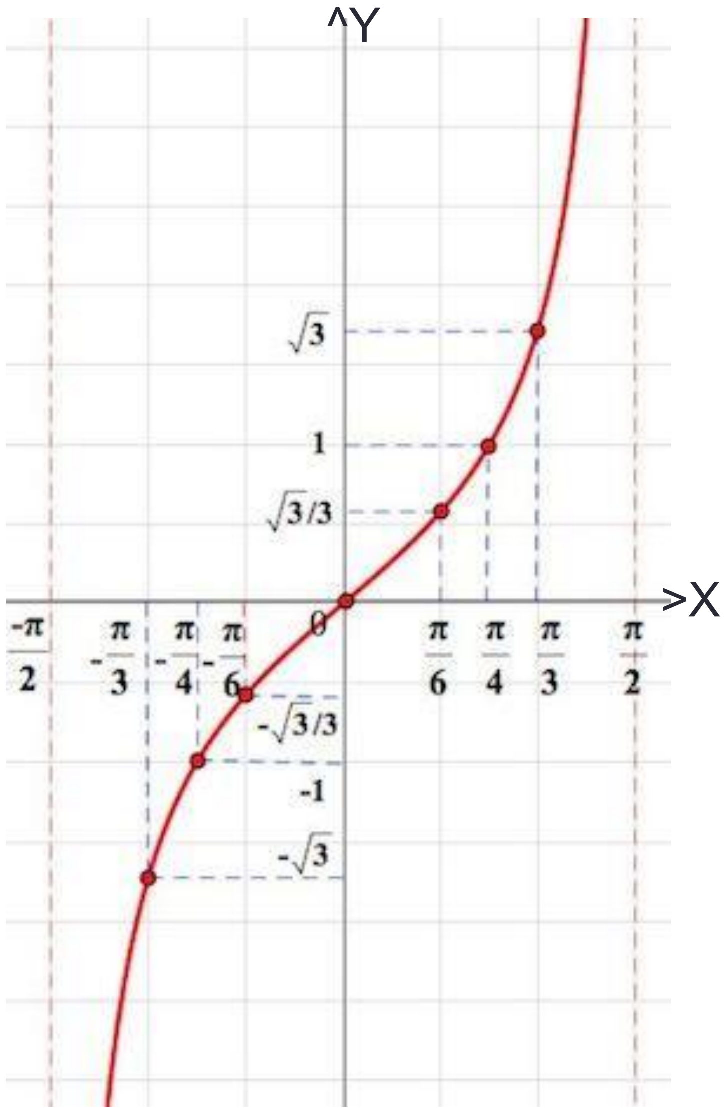
- $tg(x) < 0$ во 2 и 4 четверти:

$$\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \pi + \pi n, n \in Z$$

Монотонность

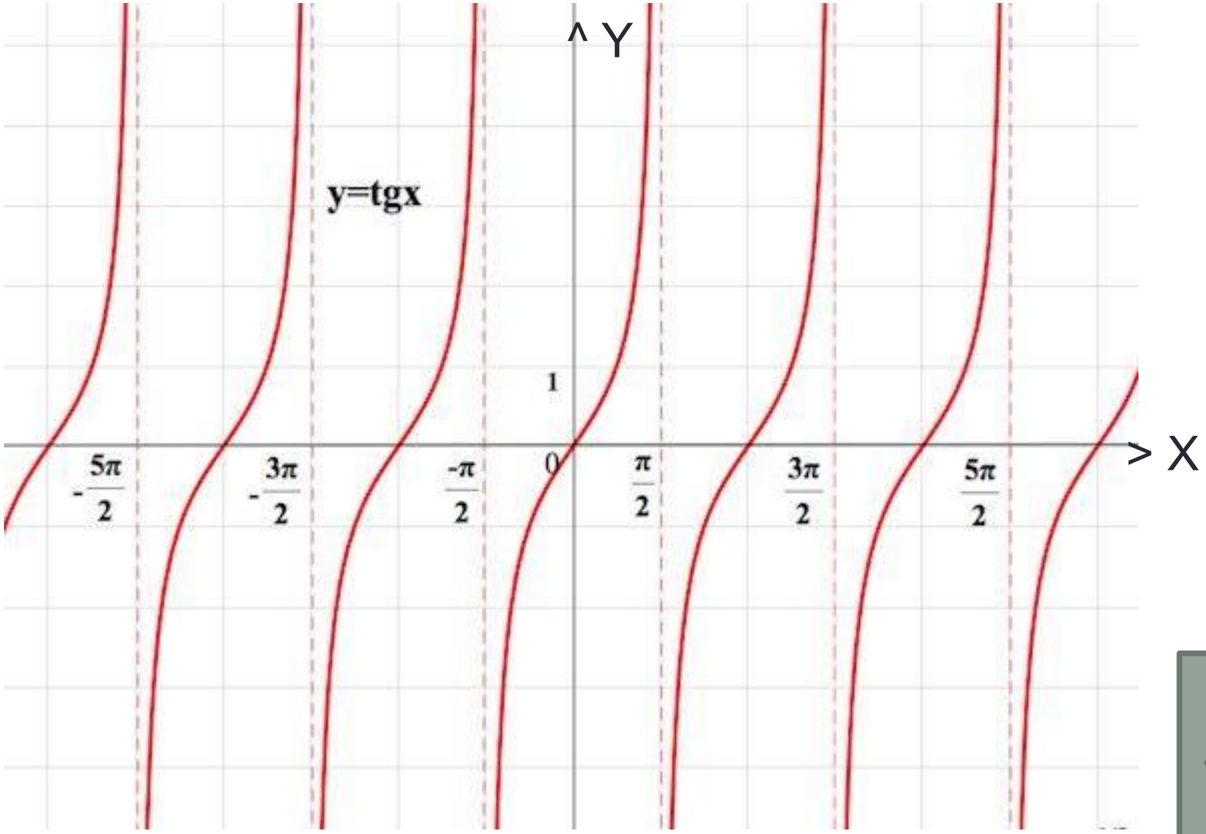
- Возрастание тангенса в 4 и 1, 2 и 3 четвертях: $-\frac{\pi}{2}+\pi n < x < \frac{\pi}{2}+\pi n, n \in Z$

График



- f(x)=tg(x)
  E(f)=R

График

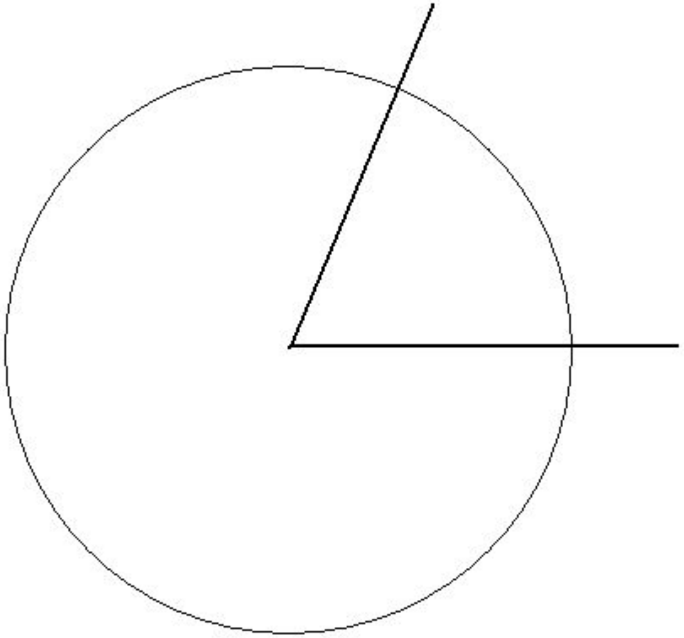

^ Y
y=tgx
1
0
> X
$-\frac{5\pi}{2}$
$-\frac{3\pi}{2}$
$\frac{-\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$
$\frac{5\pi}{2}$

Задание

- Исследовать функции косинус и котангенс, построить графики этих функций

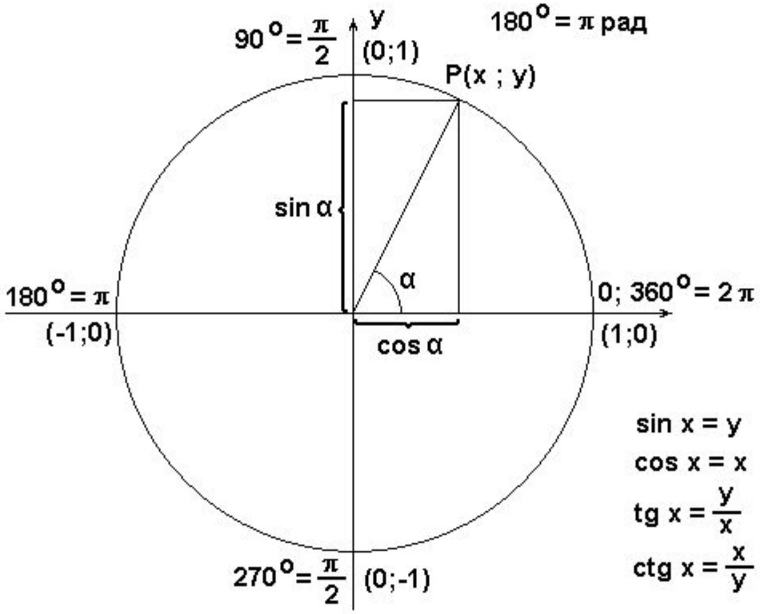
Ответьте на следующие вопросы:

- Чему равен 1 радиан : Радиусу , Градусу ?



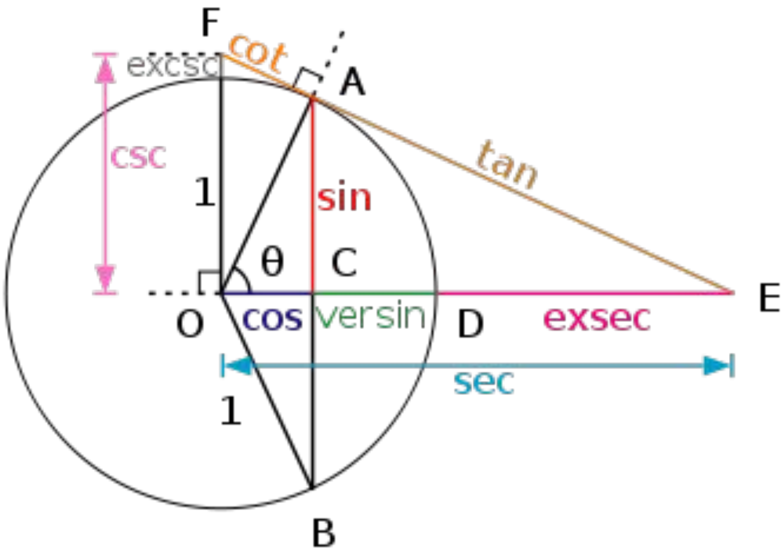
Ответьте на следующие вопросы:

- Какая из тригонометрических функций отличается от других четностью - нечетностью :
  Синус, Косинус, Тангенс, Котангенс ?



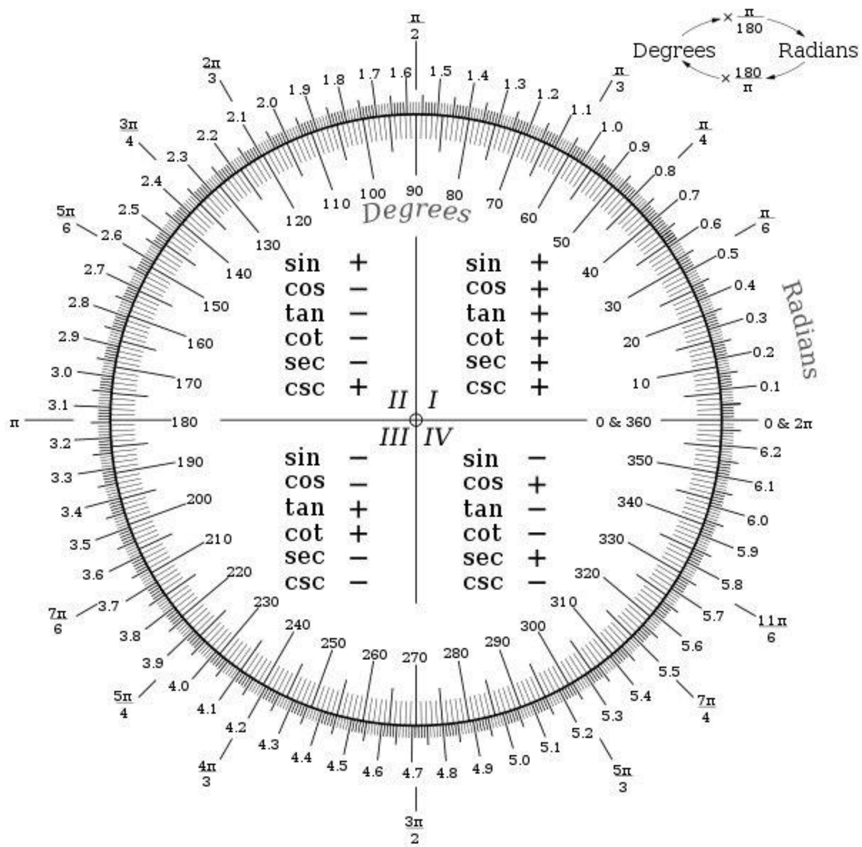
Ответьте на следующие вопросы:

- Какие из функций имеют наименьший положительный период π : Синус и косинус, тангенс и котангенс, синус и тангенс, косинус и котангенс ?



Ответьте на следующие вопросы:

- Какая из тригонометрических функций отмечается на оси ординат : Синус, Косинус, Тангенс, Котангенс ?



Ответьте на следующие вопросы:

- График какой функции изображен на рисунке 1: Синус, Косинус, Тангенс, Котангенс ?
- График какой функции изображен на рисунке 3 : Синус, Косинус, Тангенс, Котангенс ?