

НЕСТАНДАРТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ И ИХ СИСТЕМ

НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ МОДУЛИ

$$1. |f(x)| \vee 0 \Leftrightarrow f^2(x) \vee 0.$$

$$2. |f(x)| \vee |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) \vee g^2(x) \Leftrightarrow f^2(x) - g^2(x) \vee 0 \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \vee 0.$$

Вывод: $|f(x)| - |g(x)| \vee 0 \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \vee 0.$

$$3. (|f(x)| - |g(x)|) \cdot \varphi(x) \vee 0 \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \cdot \varphi(x) \vee 0.$$

$$4. |f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow |f(x)| - g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \leq 0. \end{cases}$$

$$5. |f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow |f(x)| - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

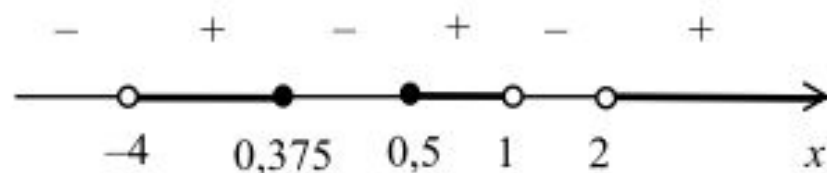
$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) < 0, \\ |f(x)| - g(x) > 0 \end{cases} \quad \forall x \in D(f) \cap D(g).$$

Решите неравенство

$$\frac{|5x-2|-|3x-1|}{|x^2-3x-3|-|x^2+7x-13|} \leq 0.$$

$$\frac{(5x-2-3x+1)(5x-2+3x-1)}{(x^2-3x-3-x^2-7x+13)(x^2-3x-3+x^2+7x-13)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(2x-1)(8x-3)}{(-10x+10)(2x^2+4x-16)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(2x-1)(8x-3)}{(x-1)(x+4)(x-2)} \geq 0$$



$$x \in (-4; 0,375] \cup [0,5; 1) \cup (2; +\infty).$$

Ответ: $(-4; 0,375] \cup [0,5; 1) \cup (2; +\infty)$.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

$$1. \quad \begin{matrix} \sqrt[2n]{f(x)} - \sqrt[2n]{g(x)} \vee 0 \\ n \in \mathbb{N} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - g(x) \vee 0, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{matrix} \sqrt[2n+1]{f(x)} - \sqrt[2n+1]{g(x)} \vee 0 \\ n \in \mathbb{N} \end{matrix} \Leftrightarrow f(x) - g(x) \vee 0.$$

$$3. \quad \begin{matrix} \sqrt[2n]{f(x)} - g(x) \geq 0 \\ n \in \mathbb{N} \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) - g^{2n}(x) \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \\ \sqrt[2n]{f(x)} - g(x) > 0 \forall x \in D(f) \cap D(g). \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{matrix} \sqrt[2n]{f(x)} - g(x) \leq 0 \\ n \in \mathbb{N} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) - g^{2n}(x) \leq 0. \end{cases}$$

$$5. \quad \sqrt[2n+1]{f(x)} - g(x) \vee 0 \Leftrightarrow f(x) - g^{2n+1}(x) \vee 0.$$

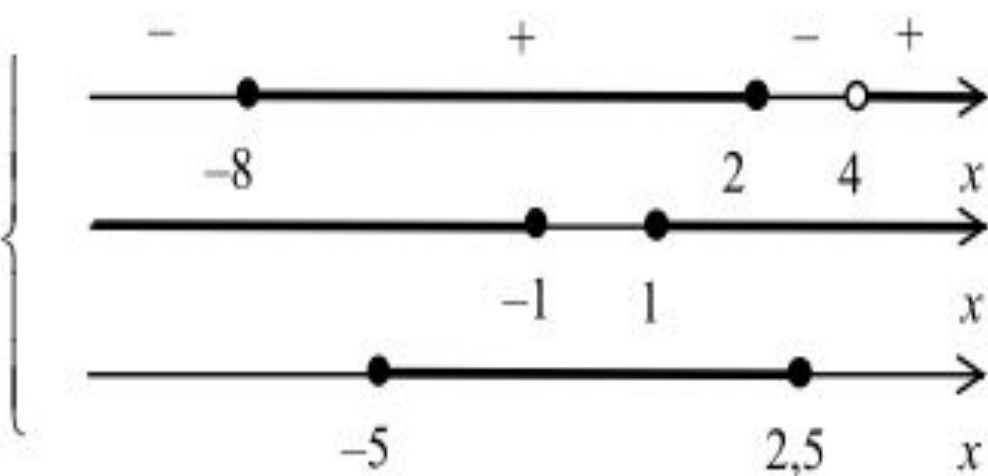
$$6. \quad \sqrt[2n]{f(x)} - |g(x)| \vee 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - g^{2n}(x) \vee 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

$$7. \quad \sqrt[2n+1]{f(x)} - |g(x)| \vee 0 \Leftrightarrow f(x) - |g(x)|^{2n+1} \vee 0.$$

Решите неравенство $\frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{3(5 - 2x)}}{\sqrt{x + 5} - 3} \geq 0$

Решение. (1) $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{15-6x}}{\sqrt{x+5}-3} \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{(x^2-1)-(15-6x)}{x+5-9} \geq 0, \\ x^2-1 \geq 0, \\ 5-2x \geq 0, \\ x+5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+6x-16}{x-4} \geq 0, \\ (x-1)(x+1) \geq 0, \\ x \leq 2,5, \\ x \geq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+8)(x-2)}{x-4} \geq 0, \\ (x-1)(x+1) \geq 0, \\ x \in [-5; 2,5] \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$x \in [-5; -1] \cup [1; 2].$$

Ответ: $[-5; -1] \cup [1; 2]$.

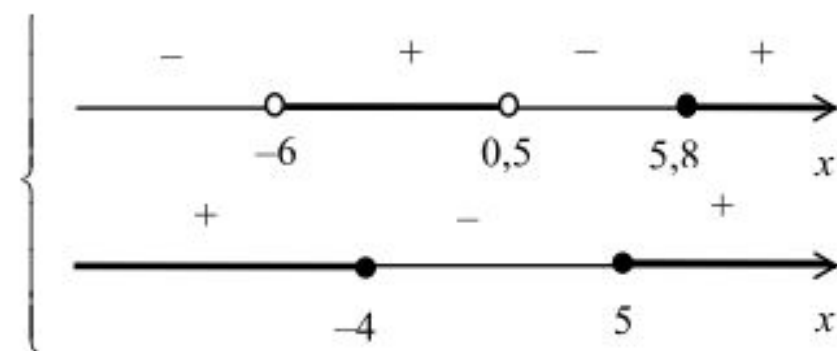
Пример 16. Решите неравенство $\frac{\sqrt{x^2 - x - 20} - |x - 3|}{\sqrt[3]{x^3 - 4x^2 + 23x - 14} - x + 2} \geq 0$

Решение. (1) $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2 - x - 20} - \sqrt{(x-3)^2}}{\sqrt[3]{x^3 - 4x^2 + 23x - 14} - \sqrt[3]{(x-2)^3}} \geq 0.$

Применим МЗМ.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(x^2 - x - 20) - (x^2 - 6x + 9)}{(x^3 - 4x^2 + 23x - 14) - (x^3 - 6x^2 + 12x - 8)} \geq 0, \\ x^2 - x - 20 \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{5x - 29}{2x^2 + 11x - 6} \geq 0, \\ (x - 5)(x + 4) \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{5x - 29}{(2x - 1)(x + 6)} \geq 0, \\ (x - 5)(x + 4) \geq 0 \end{array} \right.$$



$$x \in (-6; -4] \cup [5,8; +\infty).$$

Ответ: $(-6; -4] \cup [5,8; +\infty).$

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

4.1. Условия равносильности для МЗМ

$$1. \begin{cases} a^x \vee b, \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ x \vee \log_a b \end{cases} \cup \begin{cases} a \in (0;1) \\ x \wedge \log_a b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a-1 > 0, \\ x - \log_a b \vee 0 \end{cases} \cup \begin{cases} a-1 < 0, \\ -(x - \log_a b) \vee 0. \end{cases}$$

Вывод: $\begin{cases} a^x - b \vee 0, \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a-1)(x - \log_a b) \vee 0.$

$$2. \begin{cases} a^x - b < 0, \\ b \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset, \text{ так как } a^x > 0 \quad \forall x \in R.$$

$$3. \begin{cases} a^x - b > 0, \\ b \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in R.$$

$$4. a^{f(x)} \vee a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ f(x) \vee g(x) \end{cases} \cup \begin{cases} a \in (0;1), \\ f(x) \wedge g(x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a-1 > 0, \\ f(x) - g(x) \vee 0 \end{cases} \cup \begin{cases} a-1 < 0, a > 0 \\ -(f(x) - g(x)) \vee 0. \end{cases}$$

Вывод: $a^{f(x)} - a^{g(x)} \vee 0 \Leftrightarrow (a-1)(f(x) - g(x)) \vee 0.$

Частные случаи

$$1. \begin{cases} a^{f(x)} - b \vee 0 \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a^{f(x)} - a^{\log_a b} \vee 0 \Leftrightarrow (a-1)(f(x) - \log_a b) \vee 0.$$

$$2. a^{f(x)} - 1 \vee 0 \Leftrightarrow a^{f(x)} - a^0 \vee 0 \Leftrightarrow (a-1) \cdot f(x) \vee 0.$$

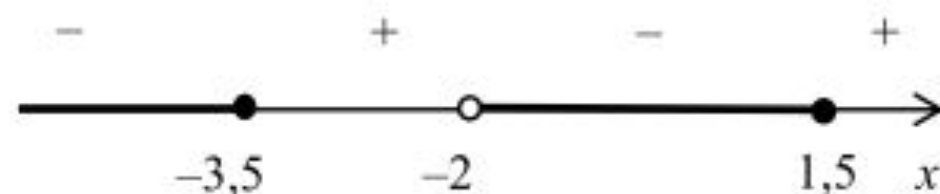
4. Решите неравенство $\frac{9^{x^2+5x-6} - \left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-2x-9}}{2^{3x-4} - (0,5)^{6-2x}} \leq 0$

Решение. (1) $\Leftrightarrow \frac{3^{2x^2+10x-12} - 3^{-2x^2+2x+9}}{2^{3x-4} - 2^{2x-6}} \leq 0$

Применим МЗМ.

$$\frac{(3-1)(2x^2+10x-12 - (-2x^2+2x+9))}{(2-1)((3x-4)-(2x-6))} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2+8x-21}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(2x+7)(2x-3)}{x+2} \leq 0.$$



$$x \in (-\infty; -3,5] \cup (-2; 1,5].$$

Ответ: $(-\infty; -3,5] \cup (-2; 1,5]$.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

5.1. Условия равносильности для МЗМ

$$1. \log_a f(x) \vee \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \vee g(x) \end{cases} \cup \begin{cases} a \in (0;1), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \wedge g(x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a > 1, \\ f(x) - g(x) \vee 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} a \in (0;1), \\ -(f(x) - g(x)) \vee 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Вывод: $\log_a f(x) - \log_a g(x) \vee 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (a-1)(f(x) - g(x)) \vee 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{f(x) - g(x)}{a-1} \vee 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a > 0. \end{cases}$$

Частные случаи

$$1. \log_a f(x) - b < 0 \Leftrightarrow \log_a f(x) - \log_a a^b < 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (a-1)(f(x) - a^b) < 0, \\ f(x) > 0, \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{f(x) - a^b}{a-1} < 0, \\ f(x) > 0, \\ a > 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$2. \log_a f(x) + \log_a g(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a (f(x) \cdot g(x)) - \log_a 1 < 0 \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

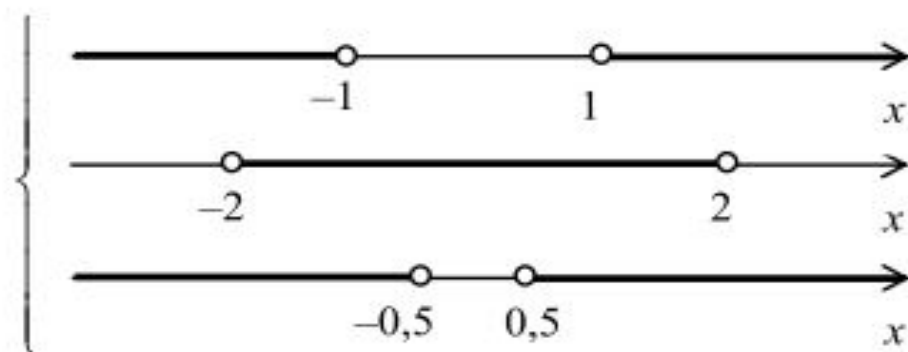
$$\begin{cases} (a-1)(f(x) \cdot g(x) - 1) < 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{f(x) \cdot g(x) - 1}{a-1} < 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a > 0. \end{cases}$$

Решите неравенство $\log_{0,5}(4-x^2) > \log_{0,5}(6|x|-3)$

Решение. (1) $\Leftrightarrow \log_{0,5}(4-x^2) - \log_{0,5}(6|x|-3) > 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (0,5-1)((4-x^2)-(6|x|-3)) > 0, \\ 4-x^2 > 0, \\ 6|x|-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|^2 + 6|x| - 7 > 0, \\ x^2 - 4 < 0, \\ 2|x| - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (|x|+7)(|x|-1) > 0, \\ (x-2)(x+2) < 0, \\ (2|x|)^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|-1 > 0, \\ x \in (-2; 2), \\ (2x-1)(2x+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1) > 0, \\ x \in (-2; 2), \\ (2x-1)(2x+1) > 0 \end{cases}$$



$$x \in (-2; -1) \cup (1; 2).$$

Ответ: $(-2; -1) \cup (1; 2)$.

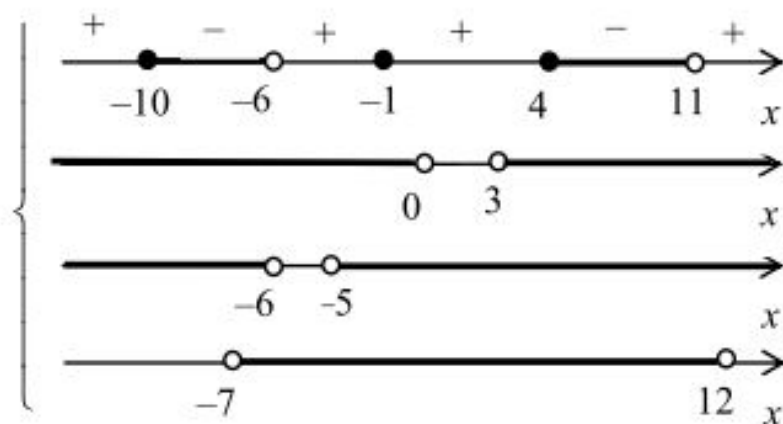
Пример 6. Решите неравенство

$$\frac{(\log_2(x^2 - 3x) - 2)(\log_5(x^2 + 11x + 30) - \log_5 4 - 1)}{\log_3(x + 7) \cdot \log_{0,7}(12 - x)} \leq 0$$

Решение. Применим МЗМ.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(\log_2(x^2 - 3x) - \log_2 4)(\log_5(x^2 + 11x + 30) - \log_5 20)}{(\log_3(x + 7) - \log_3 1)(\log_{0,7}(12 - x) - \log_{0,7} 1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(2-1)(x^2 - 3x - 4)(5-1)(x^2 + 11x + 30 - 20)}{(3-1)(x+7-1)(0,7-1)(12-x-1)} \leq 0, \\ x^2 - 3x > 0, \\ x^2 + 11x + 30 > 0, \\ x + 7 > 0, 12 - x > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{(x-4)(x+1)^2(x+10)}{(x+6)(x-11)} \leq 0, \\ x(x-3) > 0, \\ (x+5)(x+6) > 0, \\ x \in (-7; 12). \end{array} \right.$$



$$x \in (-7; -6) \cup \{-1\} \cup [4; 11).$$

Ответ: $(-7; -6) \cup \{-1\} \cup [4; 11).$

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ПЕРЕМЕННЫМ ОСНОВАНИЕМ

6.1. Условия равносильности для МЗМ

$$\begin{aligned} 1. a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)} \vee 0 &\Leftrightarrow 10^{f(x)\lg a(x)} - 10^{g(x)\lg a(x)} \vee 0 \Leftrightarrow \\ (10-1)(f(x)\lg a(x) - g(x)\lg a(x)) \vee 0 &\Leftrightarrow (\lg a(x) - \lg 1)(f(x) - g(x)) \vee 0 \Leftrightarrow \\ \begin{cases} (a(x) - 1)(f(x) - g(x)) \vee 0 \\ a(x) > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Вывод: } a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)} \vee 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a(x) - 1)(f(x) - g(x)) \vee 0, \\ a(x) > 0. \end{cases}$$

$$2. a_1(x)^{f(x)} - a_2(x)^{f(x)} \vee 0 \quad | : a_2(x)^{f(x)}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{a_1(x)}{a_2(x)}\right)^{f(x)} - \left(\frac{a_1(x)}{a_2(x)}\right)^0 \vee 0, \\ a_1(x) > 0, a_2(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{a_1(x)}{a_2(x)} - 1\right)(f(x) - 0) \vee 0, \\ a_1(x) > 0, a_2(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (a_1(x) - a_2(x)) \cdot f(x) \vee 0, \\ a_1(x) > 0, a_2(x) > 0 \end{cases}$$

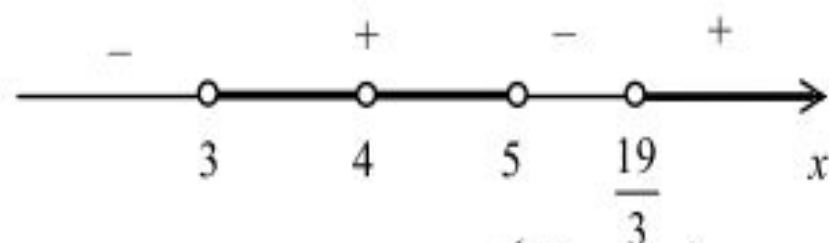
$$\text{Вывод: } a_1(x)^{f(x)} - a_2(x)^{f(x)} \vee 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1(x) - a_2(x)) \cdot f(x) \vee 0, \\ a_1(x) > 0, a_2(x) > 0 \end{cases}$$

Пример 1. Решите неравенство $\sqrt[5]{|x-4|^{x+2}} < \sqrt{|x-4|^{x-3}}$ (1)

Решение. Применим МЗМ.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} |x-4|^{2(x+2)} - |x-4|^{5(x-3)} < 0, \\ |x-4| > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (|x-4|-1)(2x+4-5x+15) < 0, \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-4-1)(x-4+1)(3x-19) > 0, \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)(x-3)(3x-19) > 0, \\ x \neq 4. \end{cases}$$



$$x \in (3; 4) \cup (4; 5) \cup \left(\frac{19}{3}; +\infty\right).$$

Ответ: $(3; 4) \cup (4; 5) \cup \left(\frac{19}{3}; +\infty\right)$.