

# ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ.

Пусть функция  $z=f(x,y)$  определена в некоторой окрестности точки  $M(x,y)$ .

$l$  – некоторое направление, задаваемое единичным вектором

$$\vec{l} = (\cos \alpha, \cos \beta)$$

где

$$|\vec{l}| = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1 \quad \text{т.к.} \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \dots$$

$\cos\alpha$ ,  $\cos\beta$  – косинусы углов, образованных данным вектором с осями координат. Они называются направляющими косинусами.

При перемещении в направлении  $l$  точки  $M(x,y)$  в точку

$$M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

Функция  $z$  получит приращение

$$\Delta_l z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

которое называется приращением функции  $z$  в данном направлении  $l$ .

**Если**

$$|MM_1| = \Delta l$$

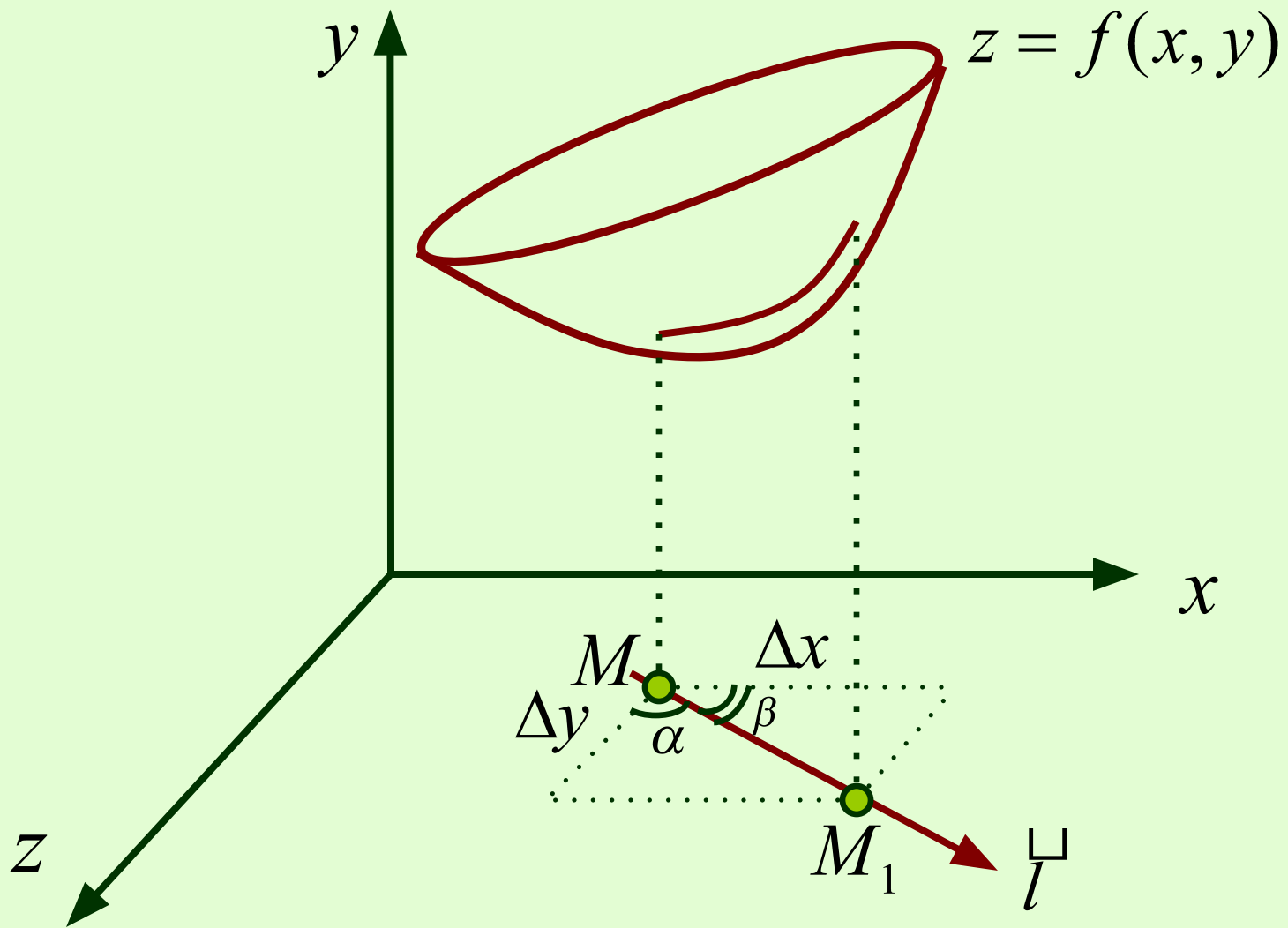
**то**

$$\Delta x = \Delta l \cdot \cos \alpha$$

$$\Delta y = \Delta l \cdot \cos \beta$$



$$\Delta_l z = f(x + \Delta l \cdot \cos \alpha, y + \Delta l \cdot \cos \beta) - f(x, y)$$



*Производной по направлению  $z'_l$   
функции двух переменных  $z=f(x,y)$   
называется предел отношения  
приращения функции в этом  
направлении к величине перемещения  
 $\Delta l$  при  
 $\Delta l \rightarrow 0$*

$$z'_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l}$$

**Производная по направлению характеризует скорость изменения функции в направлении  $l$ .**

**Рассмотренные ранее производные**

$$z'_x \quad \text{и} \quad z'_y$$

**есть производные по направлениям, параллельным осям абсцисс и ординат, соответственно.**

**Покажем, что**

$$z'_l = z'_x \cdot \cos \alpha + z'_y \cdot \cos \beta$$

$$\Delta_l z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta l \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta l \cos \beta$$

**Делим обе части на  $\Delta l$  и переходим к пределу:**

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l} &= \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \cos \beta = \\ &= z'_x \cdot \cos \alpha + z'_y \cdot \cos \beta \end{aligned}$$

*Градиентом функции двух переменных  $z=f(x,y)$  называется вектор с координатами*

$$(z'_x ; z'_y)$$

$$\nabla_z = \left( \frac{\partial z}{\partial x} ; \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$



Рассмотрим скалярное произведение  $(\nabla_z, \vec{l})$

Скалярное произведение в координатах имеет вид:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

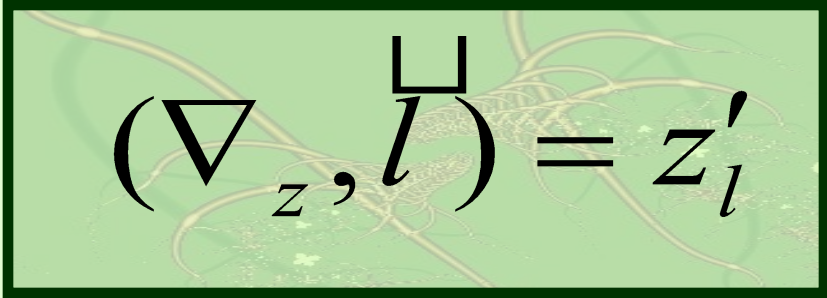
Поскольку

$$\nabla_z = \left( \frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

$$\vec{l} = (\cos \alpha, \cos \beta)$$

Тогда

$$\begin{aligned}(\nabla_z, \vec{l}) &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \cos \beta = \\ &= z'_x \cdot \cos \alpha + z'_y \cdot \cos \beta = z'_l\end{aligned}$$


$$(\nabla_z, \vec{l}) = z'_l$$

*Производная по направлению есть скалярное произведение градиента и единичного вектора, задающего данное направление.*

**Поскольку скалярное произведение максимально, если вектора одинаково направлены, то**

*Градиент функции в данной точке характеризует направление максимальной скорости изменения функции в данной точке.*

**Если задана функция трех переменных  $f(x,y,z)$ , то градиент будет являться трехмерным вектором с компонентами:**

$$\nabla = \left( \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

**Или**

$$\nabla = (f'_x; f'_y; f'_z)$$

# ТЕОРЕМА.

*Пусть задана дифференцируемая функция  $z=f(x,y)$  и пусть в точке  $M(x_0, y_0)$  величина градиента отлична от нуля. Тогда градиент перпендикулярен линии уровня, проходящей через данную точку.*