ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ.

Пусть функция ***z=f(x,y)*** **определена в некоторой окрестности точки** ***M(x,y).***

l **– некоторое направление, задаваемое единичным вектором**

$$\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$$

где

$$|\vec{l}| = \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1 \quad \text{т.к.} \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \ldots$$

cosα, cosβ – косинусы углов, образованных данным вектором с осями координат. Они называются направляющими косинусами.

При перемещении в направлении *l* точки *M(x,y)* в точку

$$M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$$

Функция *z* получит приращение

$$\Delta_l z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

которое называется приращением функции *z* в данном направлении *l*.

Если

$$\left|MM_1\right| = \Delta l$$

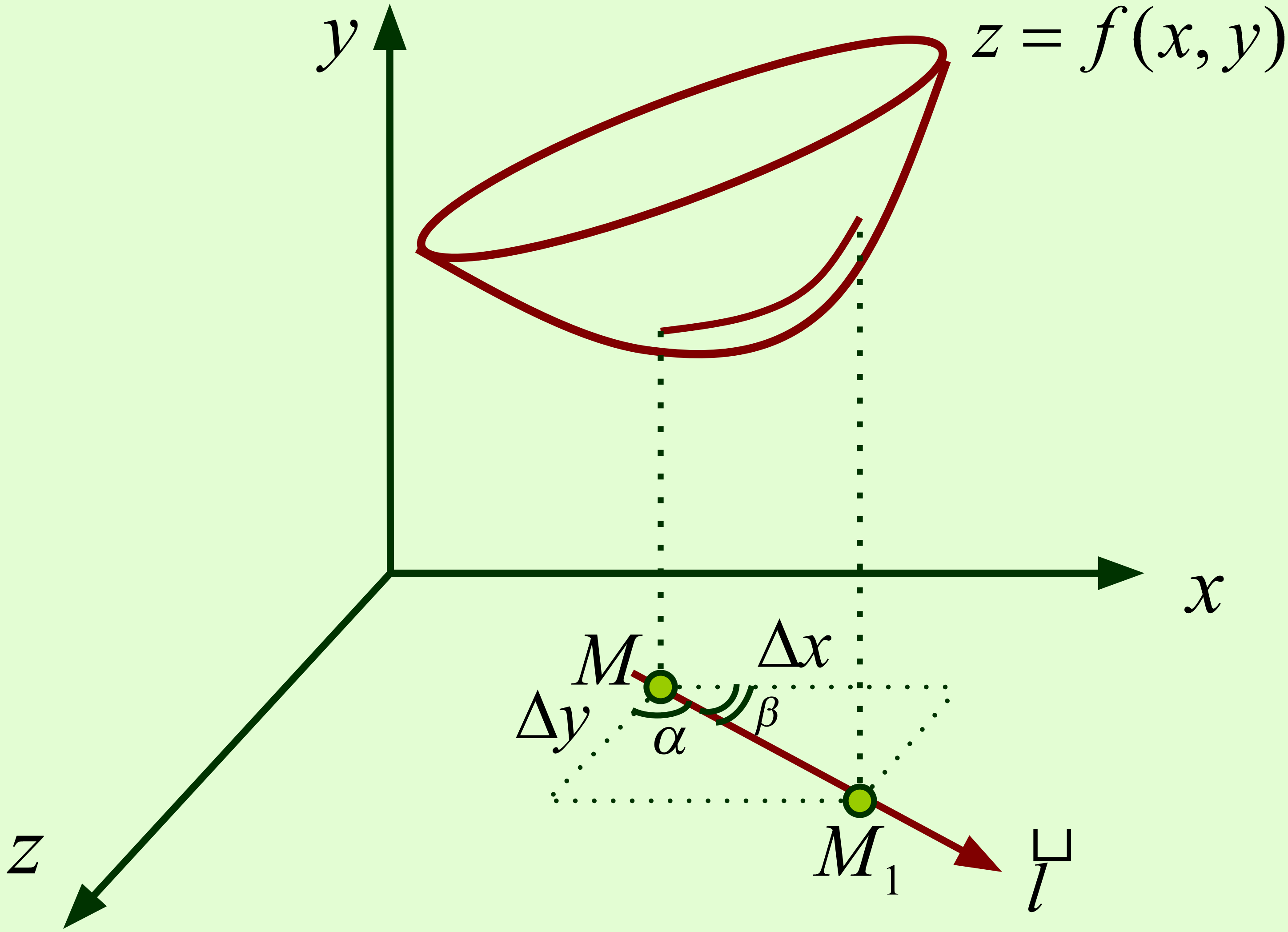
то

$$\Delta x = \Delta l \cdot \cos\alpha$$

$$\Delta y = \Delta l \cdot \cos\beta$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta_l z = f(x + \Delta l \cdot \cos\alpha, y + \Delta l \cdot \cos\beta) - f(x, y)$$



y
$z = f(x, y)$
x
z
M
Δx
Δy
α
β
M_1
$\vec{l}$

Производной по направлению z'_l ***функции двух переменных z=f(x,y) называется предел отношения приращения функции в этом направлении к величине перемещения Δl при***

$$\Delta l \to 0$$

$$\boxed{z'_l = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l}}$$

Производная по направлению характеризует скорость изменения функции в направлении *l*.

Рассмотренные ранее производные

$$z'_x \quad u \quad z'_y$$

есть производные по направлениям, параллельным осям абсцисс и ординат, соответственно.

Покажем, что

$$\boxed{z'_l = z'_x \cdot \cos\alpha + z'_y \cdot \cos\beta}$$

$$\Delta_l z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta l \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta l \cos\beta$$

Делим обе части на *Δl* и переходим к пределу:

$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \cos\beta =$$

$$= z'_x \cdot \cos\alpha + z'_y \cdot \cos\beta$$

Градиентом функции двух переменных z=f(x,y) называется вектор с координатами

$$(z'_x\,; z'_y)$$

$$\boxed{\nabla_z = \left(\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y}\right)}$$

Рассмотрим скалярное произведение $(\nabla_z, \vec{l})$

Скалярное произведение в координатах имеет вид:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Поскольку

$$\nabla_z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

$$\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$$

Тогда

$$(\nabla_z, \vec{l}) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \cos\beta =$$

$$= z'_x \cdot \cos\alpha + z'_y \cdot \cos\beta = z'_l$$

$$\boxed{(\nabla_z, \vec{l}) = z'_l}$$

Производная по направлению есть скалярное произведение градиента и единичного вектора, задающего данное направление.

Поскольку скалярное произведение максимально, если вектора одинаково направлены, то

Градиент функции в данной точке характеризует направление максимальной скорости изменения функции в данной точке.

Если задана функция трех переменных *f(x,y,z)*, то градиент будет являться трехмерным вектором с компонентами:

$$\nabla = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Или

$$\nabla = (f'_x; f'_y; f'_z)$$

ТЕОРЕМА.

Пусть задана дифференцируемая функция $z=f(x,y)$ и пусть в точке $M(x_0,y_0)$ величина градиента отлична от нуля. Тогда градиент перпендикулярен линии уровня, проходящей через данную точку.