ИССЛЕДОВАНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА AX^2+BX+C

Выполнила: Старцева Татьяна Александровна

Содержание:

Цель:

1. Исследовать квадратный трехчлен и осуществить его полный анализ.
2. Научиться применять его на практике.
3. Разработать свое методическое пособие.

Задачи:

1. Произвести анализ учебно-методической литературы.
2. Произвести анализ различных способов решения квадратного трехчлена.
3. Изучить историю развития квадратного трехчлена.

Проблемы исследования:

1. Заключается в выделении способов решения квадратного трехчлена.

- *Объект* исследования.
- Организация применения различных способов решения квадратного
- трехчлена при изучении математики в школе.
- *Предмет* исследования квадратный трехчлен.

Квадратное уравнение
определение

- Квадратным уравнением называют уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где коэффициенты a, b, c - любые действительные числа, причём $a\neq0$. Коэффициенты a, b, c, различают по названиям: a – первый или старший коэффициент; b – второй или коэффициент при x; c – свободный член, свободен от переменной x.
- Квадратное уравнение также называют уравнением второй степени, так как его левая часть есть многочлен второй степени.

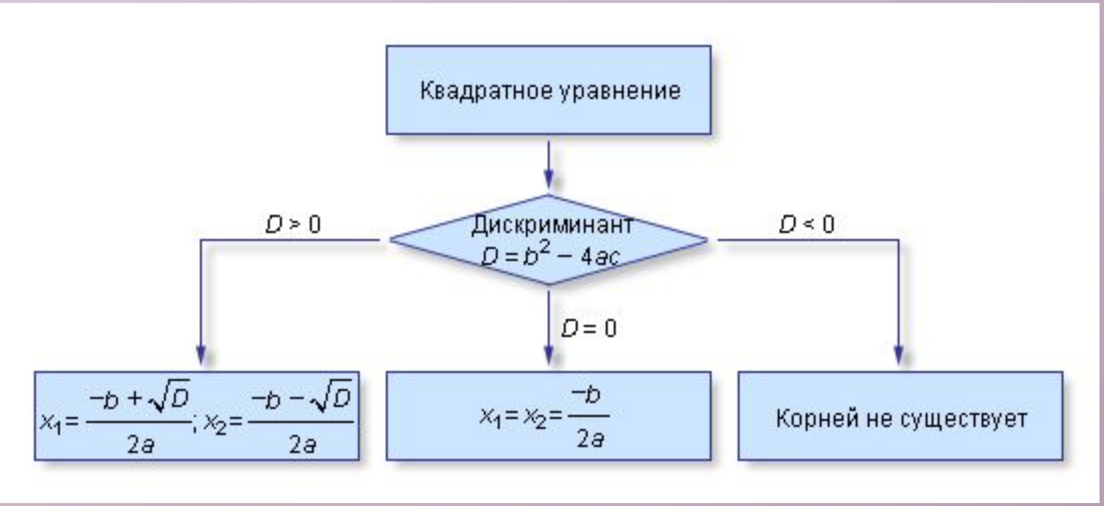
Решение неполных квадратных уравнений

- Неполное квадратное уравнение может иметь два корня, один корень и ни одного корня.

Если $b=0$,то $ax^2+c=0$	Если $c=0$, то $ax^2+bx=0$	Если $b=0$, $c=0$, то $ax^2=0$
$ax^2+c=0$, $ax^2=-c$, $x^2=-c/a$, Если $-c/a \geq 0$, то уравнение имеет 2 корня $x=\pm\sqrt{-c/a}$ Если $-c/a < 0$, то уравнение корней не имеет.	$ax^2+bx=0$, $x(ax+b)=0$, <=> $x=0$, $ax+b=0$; $x=0$, $x=-b/a$.	$ax^2=0$, $x^2=0$, $x=0$.

Формулы квадратного трехчлена

- $ax^2+bx+c=0$
- Выделив полный квадрат, получим уравнение:
- $ax^2+bx+c=a(x+b/2a)^2$ $-b^2-4ac/4a=0$.
- Обычно выражение b^2-4ac обозначают буквой D и называют дискриминантом квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$



Алгоритм решения квадратных уравнений

-
- Вычислить Д квадратного уравнения по формуле:
- $D=b^2-4ac$
- Сделать вывод о знаке D и о количестве корней.
  - Если $D<0$, то корней нет.
  - Если $D=0$, то один корень $x=-b/2a$
  - Если $D>0$ то, два корня $x_1=-b-\sqrt{D}/2a$ $x_2=-b+\sqrt{D}/2a$
- Записать ответ.

Алгоритм устного решения квадратных уравнений

- Приведенное квадратное уравнение имеет вид
- $$x^2 + px + q = 0$$
- его корни удовлетворяют теореме Виета, которая при a = 1 имеет вид
- $$x_1 \cdot x_2 = q,$$
- $$x_1 + x_2 = - p$$
- Отсюда можно сделать следующий вывод:
- Если в уравнении последним знаком является «минус», то корни имеют разные знаки, причем знак меньше корня совпадает со знаком второго коэффициента в уравнении
- Зная, что при сложении чисел с разными знаками их модули, вычитаются затем: для нахождения корней приведенного уравнения необходимо выполнить следующие действия:
- найти такие множители числа **q**, чтобы их разность была равна числу **p**;
- поставить пред меньшим из найденных чисел второй знак уравнения, другой корень будет иметь противоположный знак.

Теорема Виета

- Теорема: Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.
- Доказательство:
- Если x_1 и x_2 – корни, то их можно вычислять по формуле: $x_{1,2}=-p\pm\sqrt{D}/2$
- $x_1=-p-\sqrt{D}/2$
- $+$
- $x_2=-p+\sqrt{D}/2$
- ______________
- $-p+\sqrt{D}/2+-p-\sqrt{D}/2=-p+\sqrt{D}+-p-\sqrt{D}/2=-2p/2=-p$
- $x_1 \cdot x_2=-p+\sqrt{D}/2 \cdot -p-\sqrt{D}/2=(-p+\sqrt{D})(-p-\sqrt{D})/4=p^2-D/4=p^2-(p^2-4q)/4= p^2- p^2+4q/4=$
- $=4q/4=q.$

- Обратная теорема:
- Если числа x_1 и x_2 таковы, что $x1+x2=-p$, $x1 \cdot x2=q$, то эти числа корни приведенного уравнения $x^2+px+q=0$.
- Доказательство:
- По условию $x_1+x_2=-p$, $x_1 \cdot x_2=q$, тогда можно составить квадратное уравнение $x^2+px+q=0$.
- $x^2+px+q=x^2-(x1=x2) \cdot x+x1 \cdot x2=x^2-x1 \cdot x-x2 \cdot x+x1 \cdot x2=x(x-x1)-x2(x-x1)=(x-x1)(x-x2)$
- $(x-x1)(x-x2)=0 \Leftrightarrow$ $x-x_1=0$ $x=x_1$
- $x-x_2=0$ $x=x_2$

Следствие из теоремы Виета

- Следствие 1:
- Для того, чтобы корни квадратного трехчлена имели одинаковые знаки необходимо и достаточно выполнение условий: чтобы D ≥ 0; чтобы $x_1 \cdot x_2 > 0$
- Причем: 1) оба корня положительные если дополнительно выполняется равенство $x_1 + x_2 > 0$
- $\Leftrightarrow$ $b^2 - 4ac \geq 0$
- $c/a > 0$
- $-b/a > 0$
- 2) оба корня отрицательные если дополнительно выполняется равенство $x_1 + x_2 < 0$
- $\Leftrightarrow$ $b^2 - 4ac \geq 0$
- $c/a > 0$
- $-b/a < 0$
- Следствие 2:
- Для того, чтобы корни квадратного трехчлена имели различные знаки необходимо выполнения условий: чтобы D>0; чтобы $x_1 \cdot x^2 < 0$
- $\Leftrightarrow$ $b^2 - 4ac > 0$
- $c/a < 0.$

неравенства

- Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены на некотором множестве . Поставим задачу: найти множество , на котором значения одной из функций больше (меньше) значений другой из них, другими словами, найти все значения , для которых выполняется неравенство: > (<).
- Множество называется <u>множеством решений</u> данного неравенства.
- Решить неравенство – значит найти множество всех , для которых данное неравенство выполняется.

Свойства неравенств

$a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$

пусть

$c > 0$
$a \geq b \Leftrightarrow a \cdot c \geq b \cdot c$

$a \geq b$
$b \geq c \Rightarrow a \geq c$

$a \geq b \Leftrightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$

$a \geq b \Leftrightarrow a + c \geq b + c$

пусть

$a > 0 \; b > 0$
$a \geq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$

$a^2 \geq b^2 \Leftrightarrow |a| \geq |b|$

Решение неравенств
Решение неравенств, содержащих квадратный трехчлен

- Решение неравенств, содержащих квадратный трехчлен:
- Пусть - дискриминант квадратного трехчлена.

Вид неравенства	$D<0$	$D>0$	$D=0$
$a>0$ $a\cdot x^2+b\cdot x+c\geq 0$	$x\in(-\infty;\infty)$	$x\in(-\infty;x_1]\cup[x_2;\infty)$	$x=-\frac{b}{2\cdot a}$
$a>0$ $a\cdot x^2+b\cdot x+c>0$	$x\in(-\infty;\infty)$	$x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;\infty)$	Решений нет
$a<0$ $a\cdot x^2+b\cdot x+c\geq 0$	Решений нет	$x\in[x_1;x_2]$	$x=-\frac{b}{2\cdot a}$
$a<0$ $a\cdot x^2+b\cdot x+c>0$	Решений нет	$x\in(x_1;x_2)$	Решений нет

§2.Решение целых рациональных неравенств

- Если в неравенстве функции и заданы целыми рациональными выражениями, то его называют целым рациональным неравенством.
- Если неравенство привести к равносильному и разложить левую часть на линейные множители, то такое неравенство можно решить методом интервалов.
- Суть этого метода в следующем:
- Перенести все слагаемые в левую часть и решить уравнение, приравняв выражение в левой части к нулю;
- Найденные корни уравнения нанести на числовую ость. Эти корни разбивают числовую ось на промежутки, на каждом из которых выражение, стоящее в левой части, сохраняет знак;
- Выбрать в каждом из промежутков какое-нибудь значение («пробную» точку) и определить знак выражения в этой точке;
- Выбрать промежутки, в которых выражение имеет требуемый знак и записать ответ, взяв их объединения.

§3.Решение дробно-рациональных неравенств

- Дробно рациональные неравенства можно привести к равносильному неравенству , тогда метод интервалов применим и для решения дробно-рациональных неравенств.

§4.Неравенства, содержащие знак модуля.

- Одним из методов решения неравенств, содержащих знак модуля, является метод промежутков, который был рассмотрен при решении уравнений с модулем.
- Разобъем числовую ось точками, в которых обращаются в нуль выражения, стоящие под знаком модуля.
- Выбирая на этих промежутках контрольные точки, проверяем, удовлетворяется ли на них заданное неравенство или нет. Ответом к задаче служит объединение промежутков, где выполняется данное неравенство.

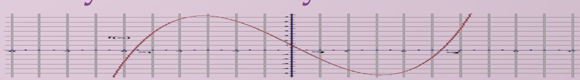
§5.Иррациональные неравенства.

- Рассмотрим решение иррациональных неравенств, т.е. неравенств, в которых неизвестная содержится под знаком радикала. Простейшие из них имеют вид:
- или .
- При рассмотрении этих неравенств будут применяться следующие утверждения:
- 1. Неравенство вида (при натуральном) равносильно системе неравенств:
- 2. Неравенство вида равносильно совокупности двух систем неравенств:
- и

§6.Уравнения и неравенства с параметрами.

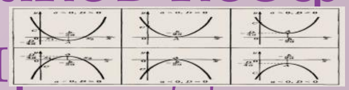
- Иногда в уравнениях и неравенствах некоторые коэффициенты или свободные члены заданы не конкретными числовыми значениями, а обозначены буквами. Такие буквы называются <u>параметрами</u>. Предполагается, что эти параметры могут принимать любые значения.
- Решить уравнение с параметрами означает следующее:
- а) исследовать, при каких значениях параметров уравнение имеет корни и сколько их при различных значениях параметров;
- б) найти все выражения для корней и указать для каждого из них те значения параметров, при которых это выражение действительно определяет корень уравнения.

6.1.Графический метод решения задач с параметрами.

- Метод интервалов основан на методе полной индукции (перебор всех вариантов) и на свойстве непрерывной функции сохранять знак между значениями, в которых она обращается в 0 (интервалы знакопостоянства)
- **Решение неравенств**.
- Рассмотрим график многочлена.. Это непрерывная функция. Значение 0 она приобретает 3 раза, f(x) = 0 в точках x_1, x_2, x_3, корнях многочлена.
- В промежутках между ними она сохраняет знак.
- 
- Поскольку для решение неравенства f(x)>0 нас интересует только знак функции, перейдем от графика к координатной прямой.
- 

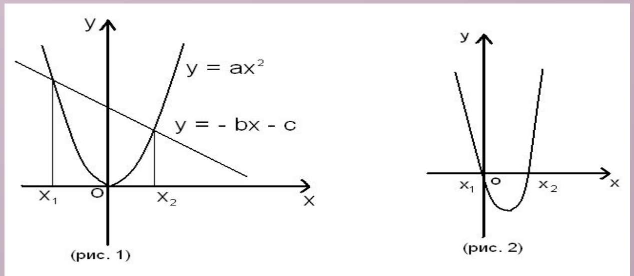
- f(x)>0 при x $(x_1; x_2)$ и при x $(x_3;)$
- f(x)<0 при x $(- ; x_1)$ и при x $(x_2; x_3)$
- Синим и красным цветом выделены решения неравенств f(x)<0, а красным – f(x)>0
- Для определения знака функции на интервале достаточно знать знак функции в одной из точек интервала знакопостоянства.
- Этим методом удобно решать неравенства, левая часть которых разложена на множители, поскольку в них не представляет труда найти корни.

§8.Решение неравенств с помощью параболы

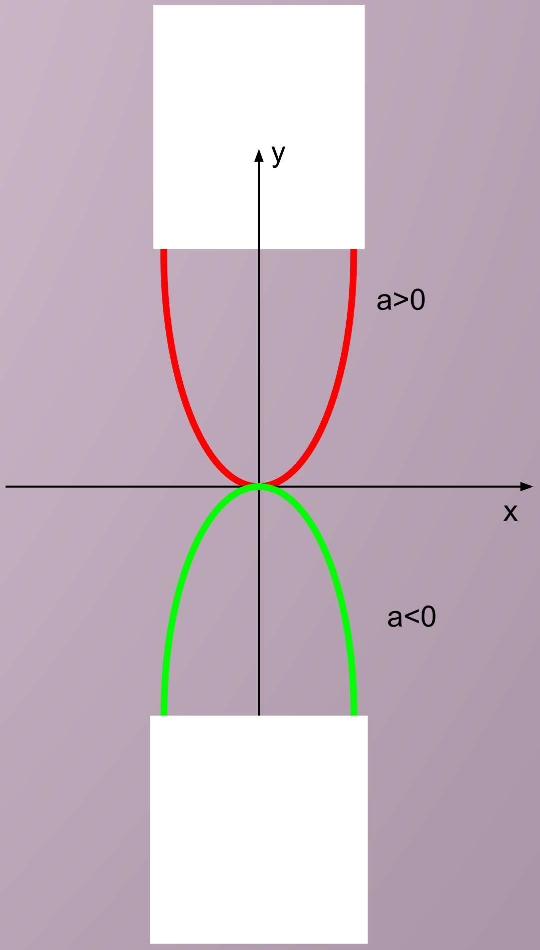
- Графиком квадратичной функции (квадратного трехчлена) $y = ax^2 + bx + c$ является парабола. Расположение параболы в зависимости от знаков коэффициента a и дискриминанта D пр  на рис.
- Числа x_1 и x_2 на оси абсцисс — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + + c = 0$; координаты вершины параболы (точки А) во всех случа $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$
- точка пересечения параболы с осью ординат имеет координаты (0; c).

Решение квадратных уравнений графическим способом

- Квадратное уравнение можно решать и графическим способом. Решим графически уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Оно равносильно уравнению $ax^2 = -(bx + c)$. Постоим графики функций $y = ax^2$ и $y = -bx - c$ в одной системе координат (рис. 1). В точках x_1 *и* x_2 значения обеих функций равна. Следовательно, x_1 *и* x_2 являются корнями уравнения $ax^2 = -(bx + c)$ и равносильного ему уравнения $ax^2 + bx + c = 0$
- Если парабола и прямая касаются. То квадратное уравнение имеет два равных корня.
- Если же парабола и прямая не пересекаются и не касаются, то квадратное уравнение не имеет корней.
- Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ можно решить иначе, построив параболу $y = ax^2 + bx + c$ и найдя точки ее пересечения с осью Ох, если D≥0 (рис. 2)^2



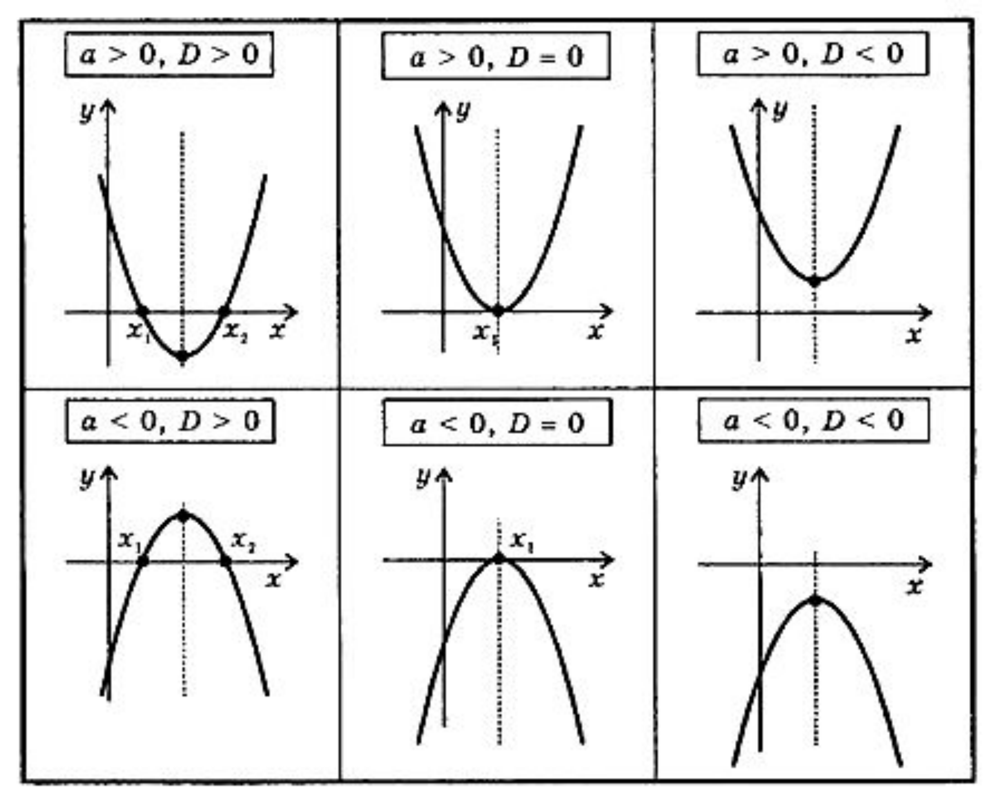
- Область определения этой функции - множество R действительных чисел.
- Придавая переменной *x* несколько значений из области определения функции и вычисляя соответствующие значения *y* по формуле $y = x^2$, изображаем график функции.
-
- График функции $y = ax^2$ называется *параболой*.



Свойства функции $y = ax^2$.

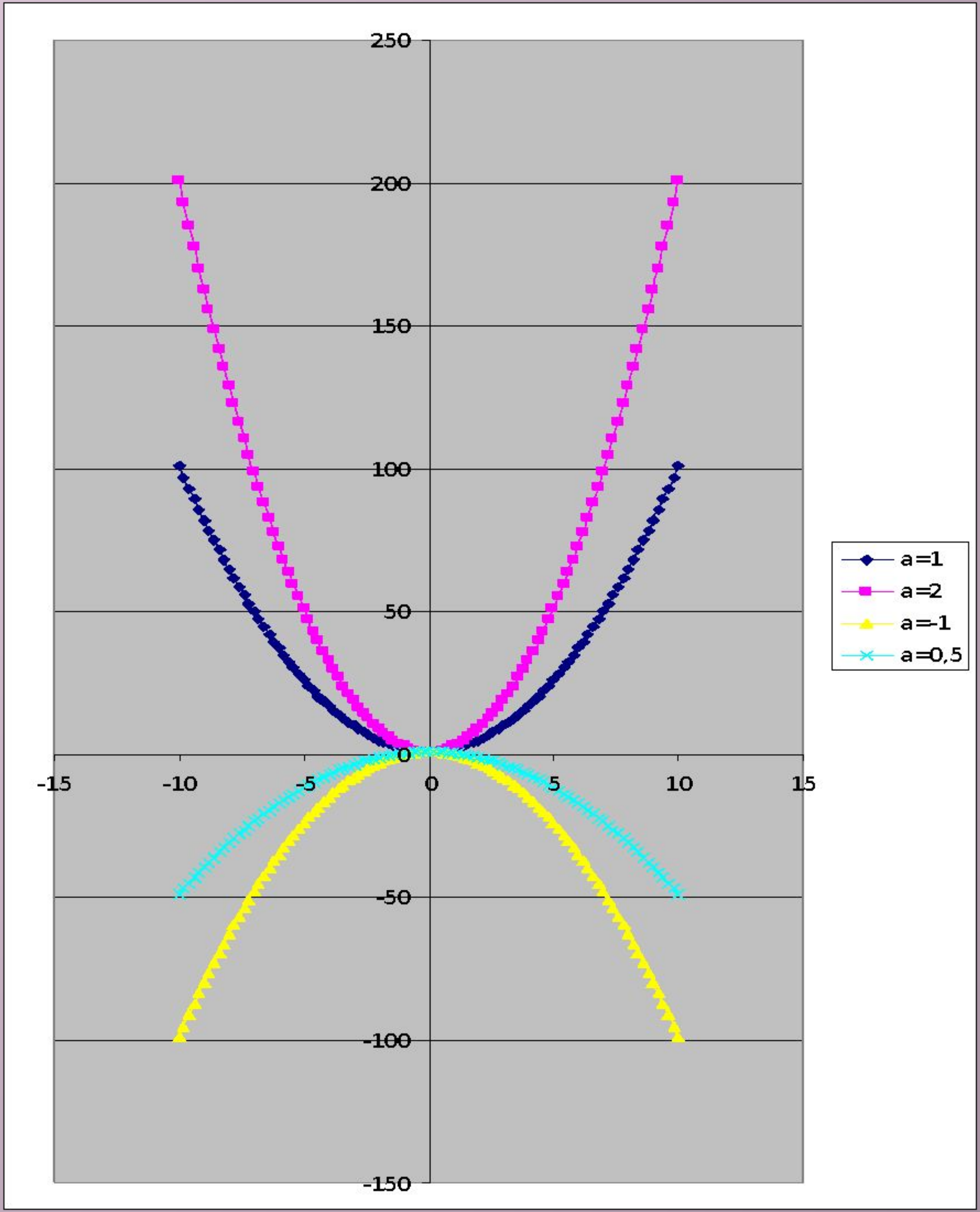
- 1. Если $x = 0$, то $y = 0$, т.е. парабола имеет с осями координат общую точку (0;0) - начало координат.
- 2. Если $x \neq 0$, то $y > 0$, т.е. все точки параболы, кроме начала координат, лежат над осью абсцисс.
- 3. Множеством значений функции $y = ax^2$ является промежуток $[0; +\infty)$.
- 4. Если значения аргумента отличаются только знаком, то значения функции равны, т.е. парабола симметрична относительно оси ординат (функция $y = ax^2$ - четная).
- 5. На промежутке $[0; +\infty)$ функция $y = ax^2$ возрастает.
- 6. На промежутке $(-\infty; 0]$ функция $y = ax^2$ убывает.
- 7. Наименьшее значение функция принимает в точке $x = 0$, оно равно 0. Наибольшего значения не существует.

- Квадратичной функцией называется функция, которую можно записать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где x – независимая переменная, a, b и c – некоторые числа, причем $a \neq 0$.
- Свойства функции и вид ее графика определяются, в основном, значениями коэффициента a и дискриминанта .



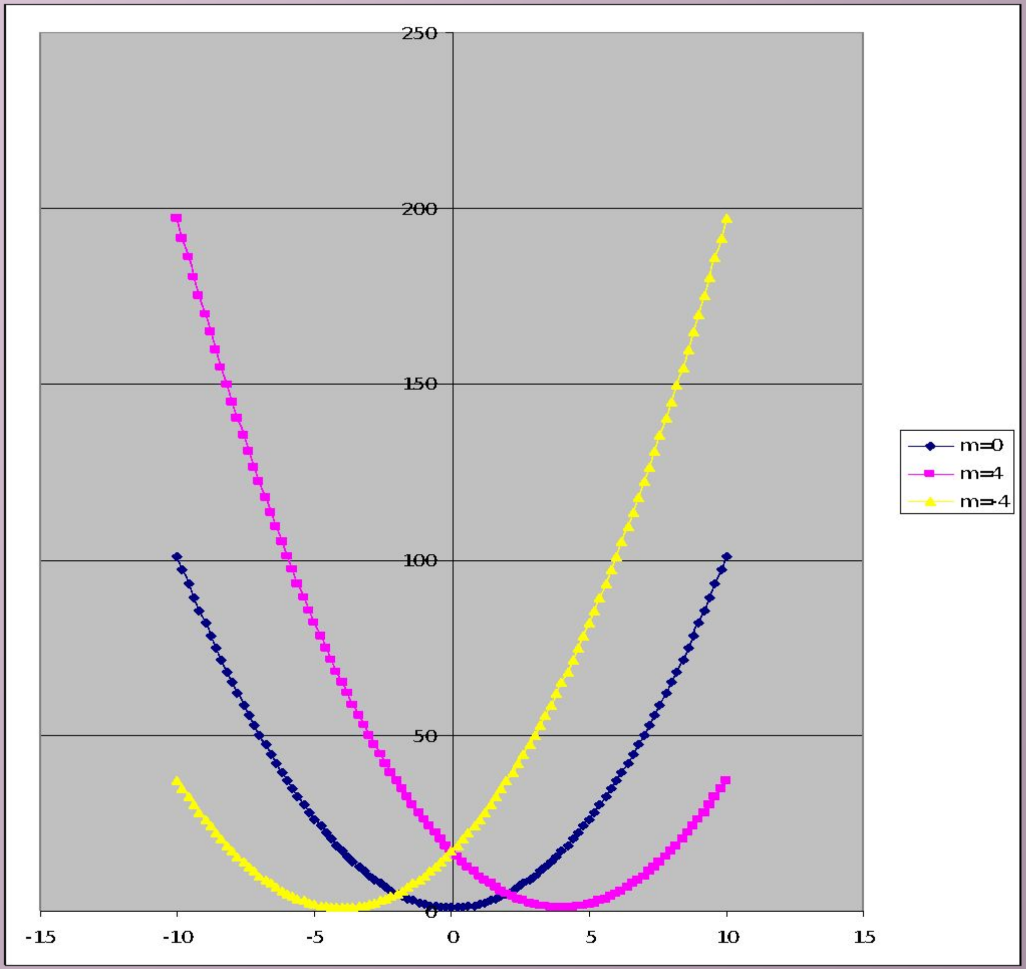
Преобразование графиков функции $y=a(x-m)^2+n$
§1. Растяжение

- Растяжение графика y = x2 вдоль оси y в |a| раз (при |a| < 1 — это сжатие в 1/|a| раз).
- Если, a < 0, произвести, кроме того, зеркальное отражение графика отно сительно оси x
- Результат: график функции y = ax2.



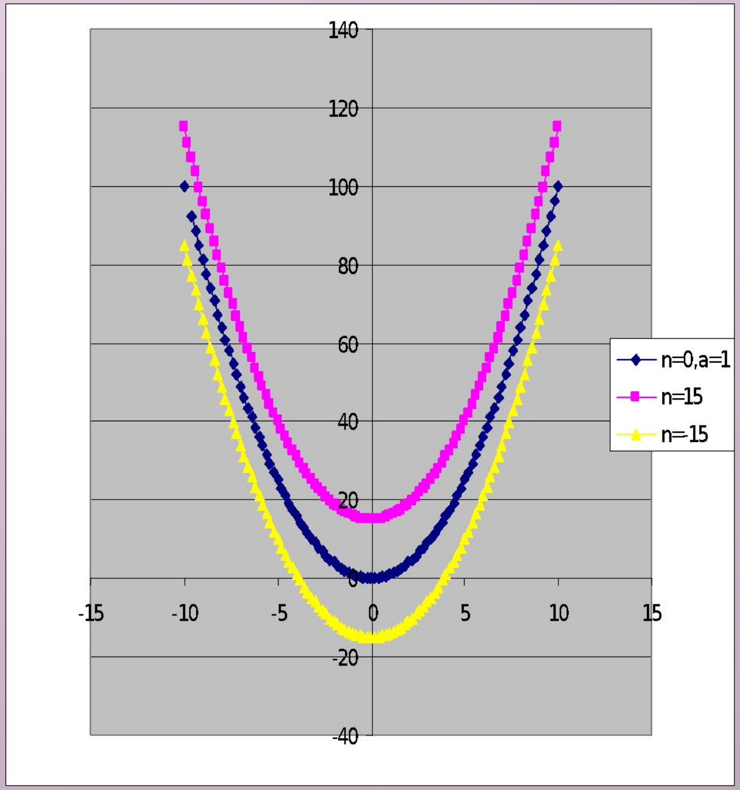
§2. Параллельный перенос по оси Ox

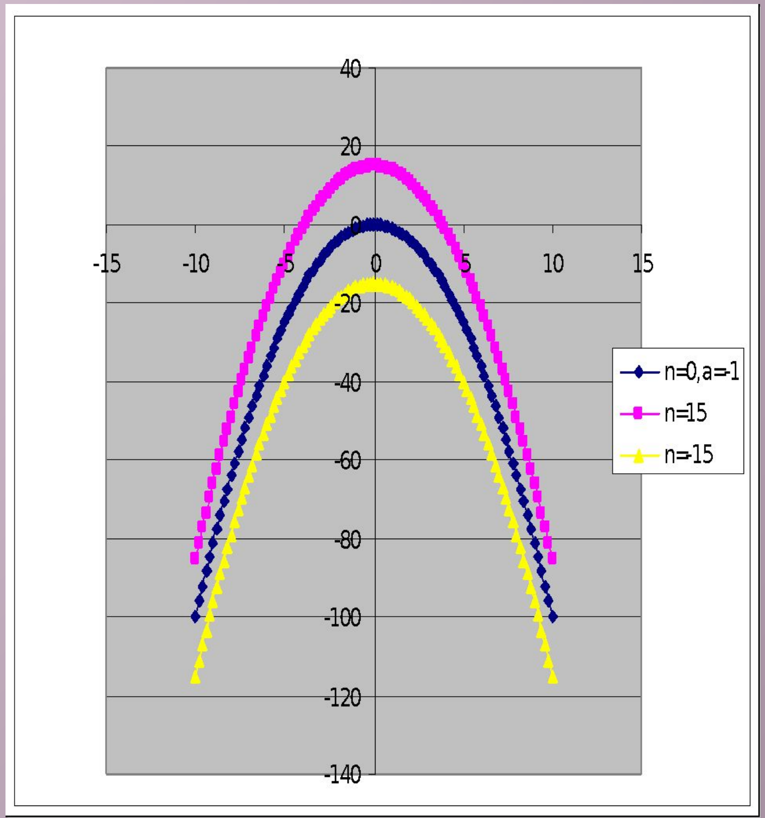
-
-
- Параллельный перенос графика функции $y = ax^2$ вдоль оси x на $|m|$ (вправо при
- $m > 0$ и влево при $m < 0$).
- Результат: график функции $y = a(x - m)^2$.
-



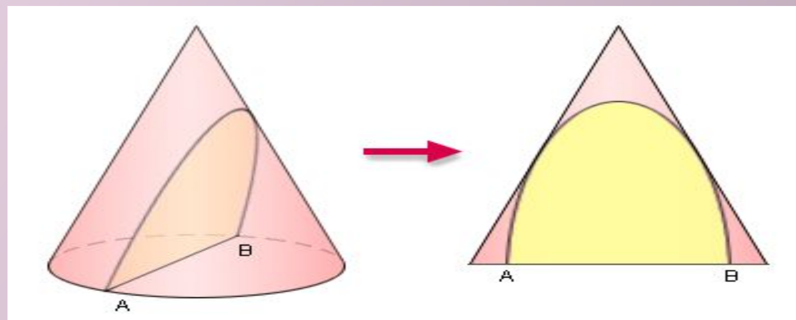
§3. Параллельный перенос по оси Оу

- Параллельный перенос графика функции вдоль оси y на $|n|$ (вверх при $n > 0$ и вниз при $n < 0$).
- Результат: график функции $y = a(x - m)^2 + n$.





Сечение конуса



- Парабола является одним из конических сечений
- Точка $x = -\frac{b}{2a}$ является точкой экстремума и называется ***вершиной параболы***. Если $a > 0$, то в этой точке достигается минимум функции, и

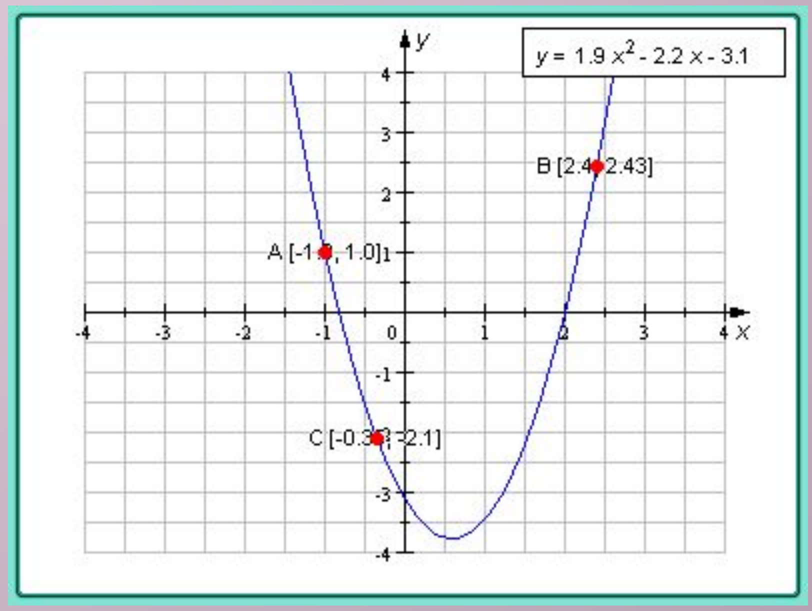
$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{D}{4a}.$$

- Если $a < 0$, то в этой точке достигается максимум функции, и

$$\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{D}{4a}.$$

Построение параболы по трем точкам

- Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ при $b = 0$ является четной, а в общем случае уже не является ни четной, ни нечетной.



Заключение

- В результате выполнения исследования можно сделать следующие выводы:
- Изучение научно – методической литературы по теме выполненной работы показали, что использование различных способов решения квадратных уравнений является важным звеном изучении математики, повышает интерес, развивает внимание и сообразительность.
- Система использования различных способов решений уравнений на разных этапах урока является эффективным средством активизации учащихся, положительно влияет на повышение качества знаний, умений и навыков учащихся, развивает умственную деятельность.
- Основным в решении квадратных уравнений является правильно выбрать рациональный способ решения и применить алгоритм решения
- Работа над докладом способствует дальнейшему изучению решений уравнений.

Список использованной литературы

- 1) Газета «Математика» № 18 2004 г.
- 2) Газета «Математика» №4 2004 г.
- 3) Газета «Математика» № 11 2004 г.
- 4) Газета «Математика» № 42 2001 г.
- 5) Газета «Математика» №48 2001 г.
- 6) Епишева О. Б. Специальная методика обучения арифметики, алгебре и началом анализа в средней школе. Курс лекций: Учебное пособие для студентов физ. – мат. Специальностей педагогических институтов. – Тобольск: Изд. ТГПИ им Д. И. Менделеева, 1997г.
- 7) Зайцев В. В., Рыжков В. В., Сканави М. И.   «Элементарная математика» Москва   1976 г.
- 8) Крамор В. С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. «Просвещение» 1990 г.
- 9) http://e-science.ru/math/theory/?t=144
- 10)http://info.territory.ru/univer/qvadro_func.htm
- 11) http://www.ido.rudn.ru/nfpk/matemat/10/main_1.htm
- 12)В.А.Касьянов «Физика» 10 класс, Издательство ДРОФА, Москва 2004 год