

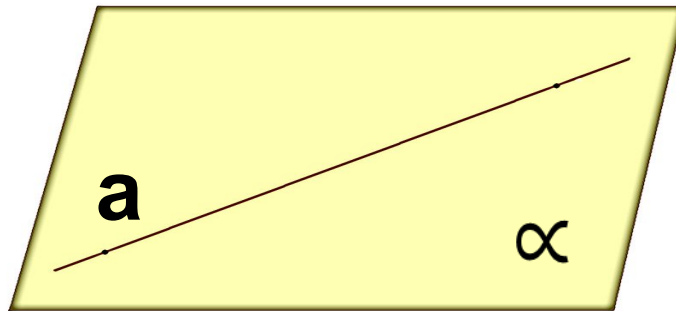
муниципальное автономное общеобразовательное

учреждение

средняя общеобразовательная школа № 45

**Методическое пособие для учащихся 10  
классов**

**«Прямые и плоскости в пространстве».**



Составил  
учитель математики  
первой категории  
Гавинская Елена  
Вячеславовна.

г.Калининград  
2015-2016 учебный год

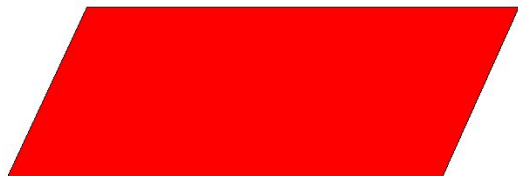
# 1. Понятие плоскости.

Представление о **плоскости** дает гладкая поверхность стола или стены.

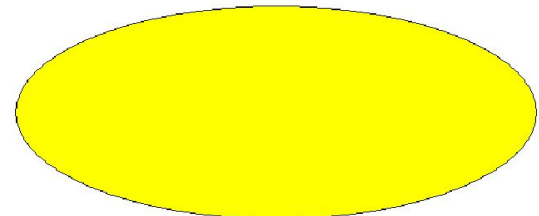
С точки зрения геометрии **плоскость** следует представлять как простирающуюся неограниченно во все стороны.

**Плоскость изображается:**

В виде параллелограмма

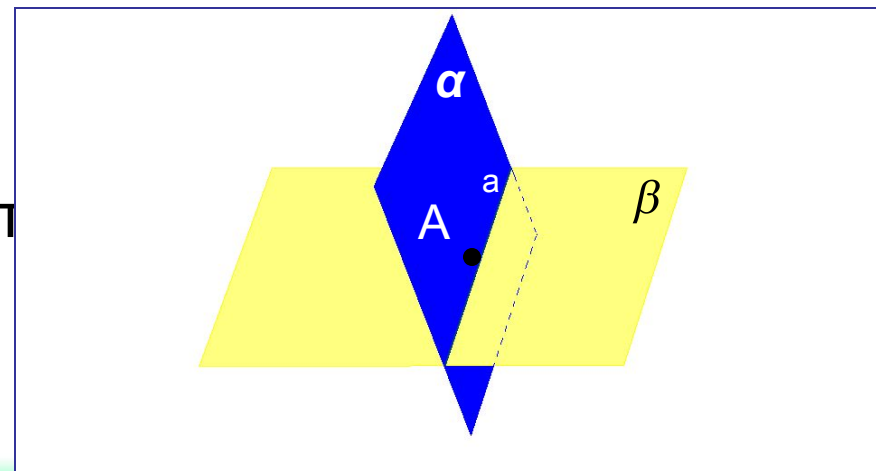
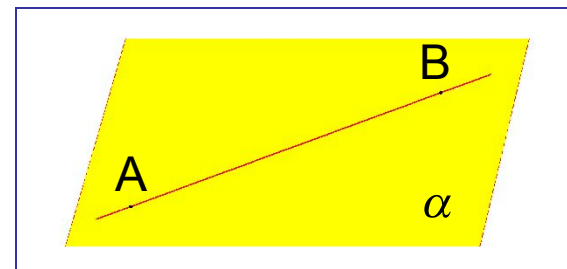
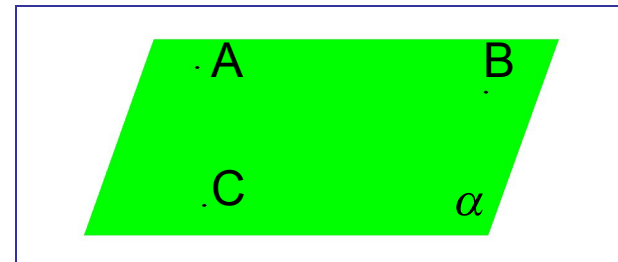


В виде овала(облачка)



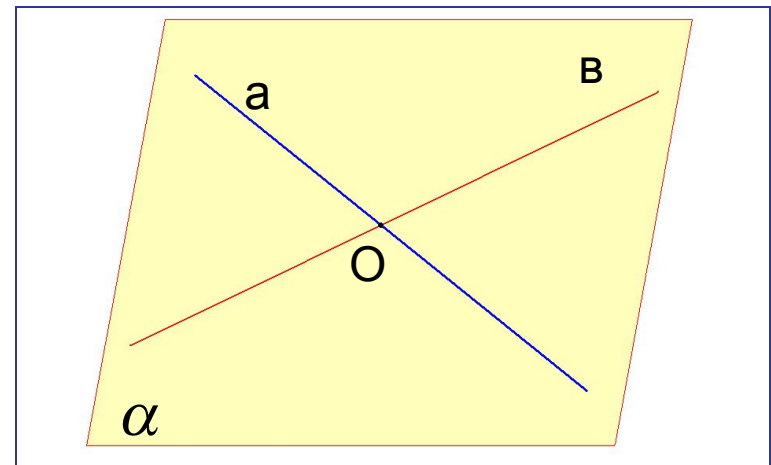
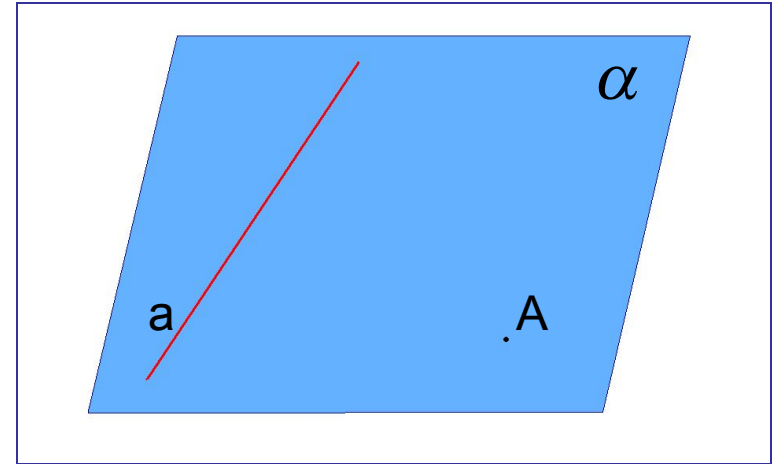
## 2. Аксиомы стереометрии.

- Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.
- Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.
- Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.



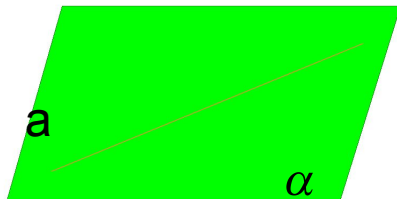
### 3. Следствия из аксиом стереометрии.

- Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.
- Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

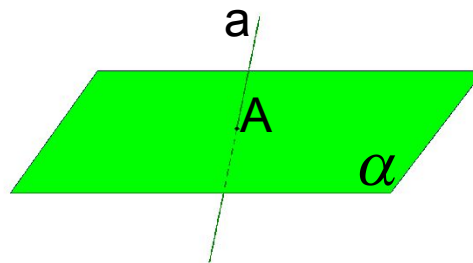


## 4. Взаимное расположение прямой и плоскости

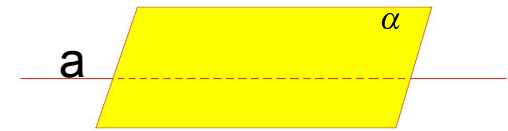
Прямая лежит  
в плоскости.



Прямая и плоскость  
имеют только  
одну общую точку,  
т.е. пересекаются.



Прямая и  
плоскость  
не имеют  
общих точек.



## 5. Параллельность прямой и плоскости.

Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.

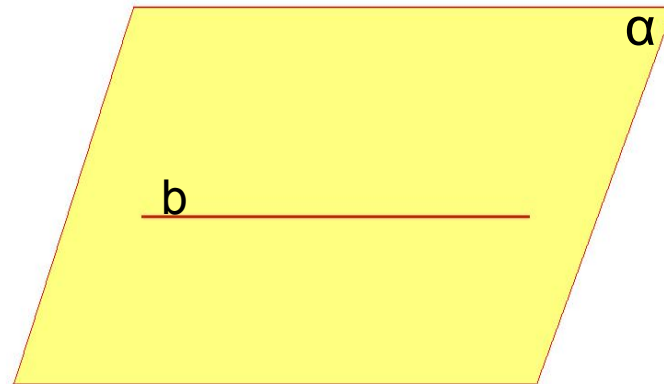


# Признак параллельности прямой и плоскости.



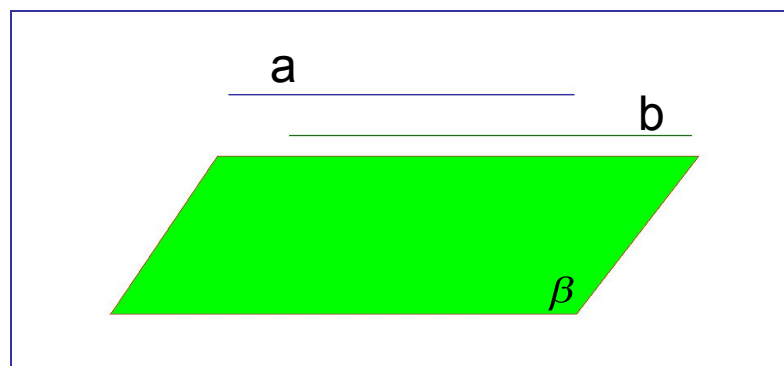
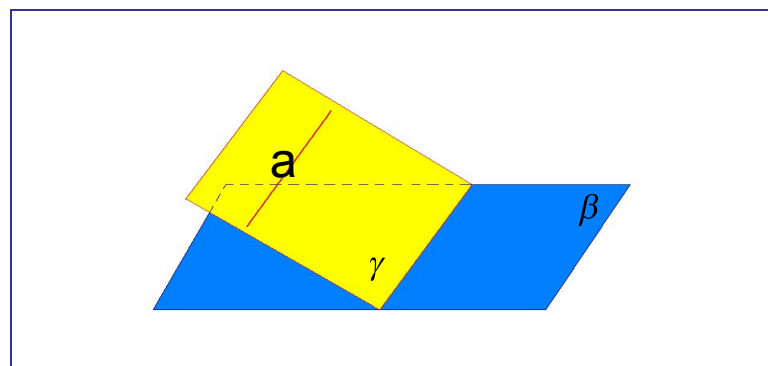
a

---



# Свойства параллельности прямой и плоскости.

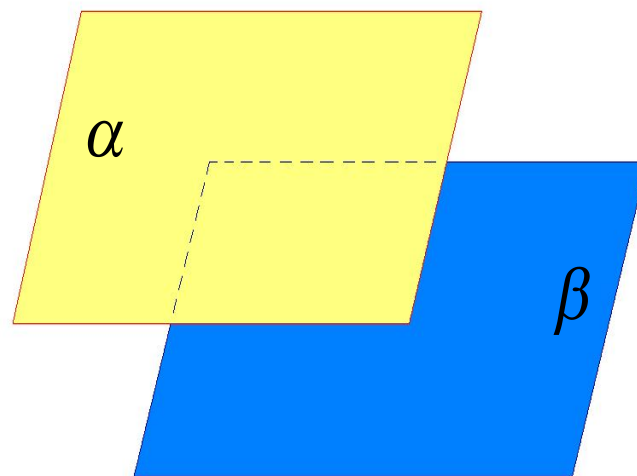
1. Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.
2. Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.





## 6. Параллельность плоскостей.

Две плоскости  
называются  
параллельными,  
если они не  
пересекаются.



# Признак параллельности плоскостей.

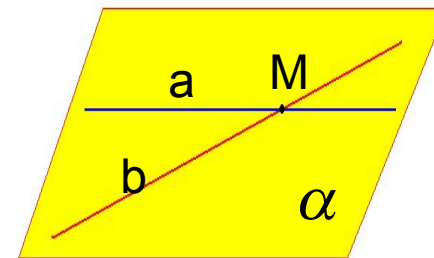
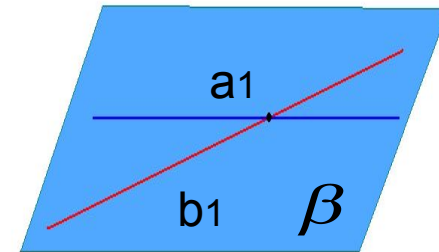
**Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.**

**Дано:**  $\alpha; \beta; a \cap b = M; a \parallel a_1; b \parallel b_1; a \parallel \beta; b \parallel \beta$

**Доказать:**  $\beta \parallel \alpha$

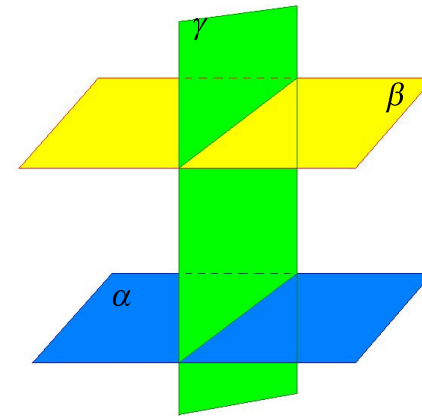
**Доказательство:**

Допустим, что плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  не параллельны. Тогда они пересекаются по некоторой прямой  $s$ . Мы получили, что плоскость  $\alpha$  проходит через прямую  $a$ , параллельную плоскости  $\beta$ , и пересекает плоскость  $\beta$  по прямой  $s$ . Отсюда следует, что прямые  $a$  и  $s$  параллельны. Но плоскость  $\alpha$  проходит также через прямую  $b$ , параллельную плоскости  $\beta$ . Поэтому  $b \parallel s$ . Таким образом, через точку  $M$  проходит две прямые  $a$  и  $b$ , параллельные прямой  $s$ . Но это невозможно, т.к. по теореме о параллельных прямых через точку  $M$  проходит только одна прямая, параллельная прямой  $s$ . Значит, наше предположение неверно,  $\Rightarrow \alpha \parallel \beta$ .

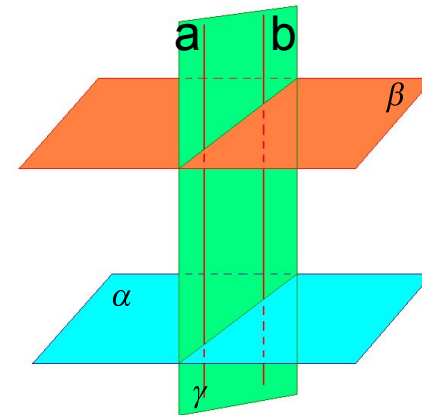


# Свойства параллельных плоскостей.

1. Если две параллельные плоскости пересечены третьей то линии их пересечения параллельны.

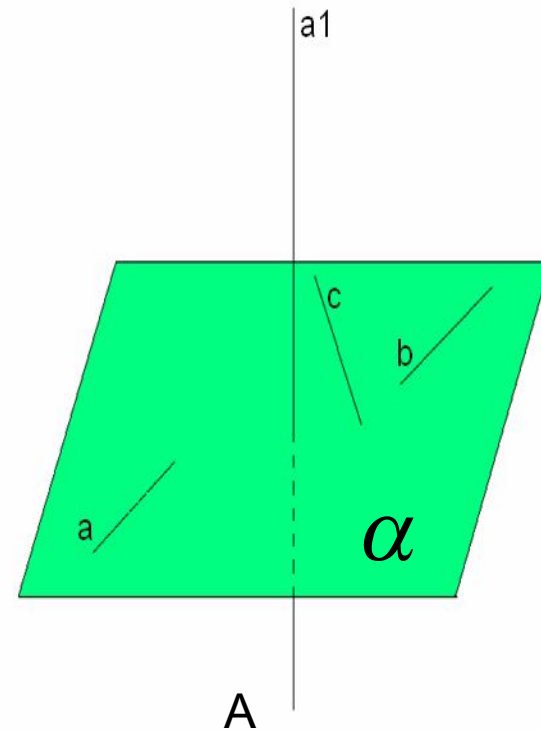


2. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны



## 7. Перпендикулярность прямой и плоскости.

Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.



# Свойства перпендикулярности прямой и плоскости.

**1. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.**

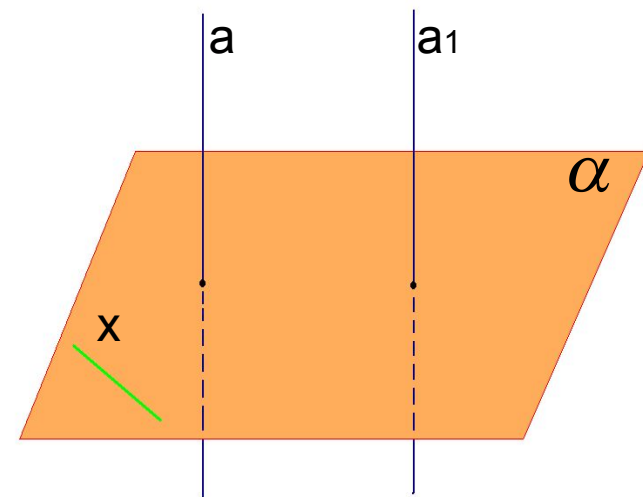
Дано:  $\alpha$

$a \parallel a_1; a \perp \alpha$

Доказать:  $a_1 \perp \alpha$

Доказательство:

Проведем произвольную прямую  $x$  в плоскости  $\alpha$ . Т.к. прямая  $a \perp \alpha$ , то  $a \perp x = a_1 \perp x$  (по лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей)  $\Rightarrow a_1$  перпендикулярна любой прямой в плоскости  $\alpha$ .  $\Rightarrow a_1 \perp \alpha$ .



## 2. Если две прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны.

**Дано:**  $\alpha$

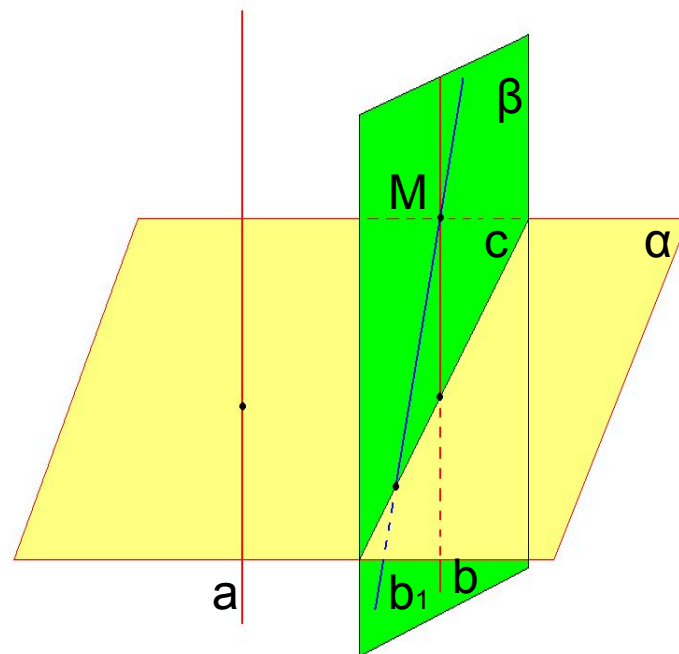
$a \perp \alpha; b \perp \alpha$

**Доказать:**  $a \parallel b$

**Доказательство:**

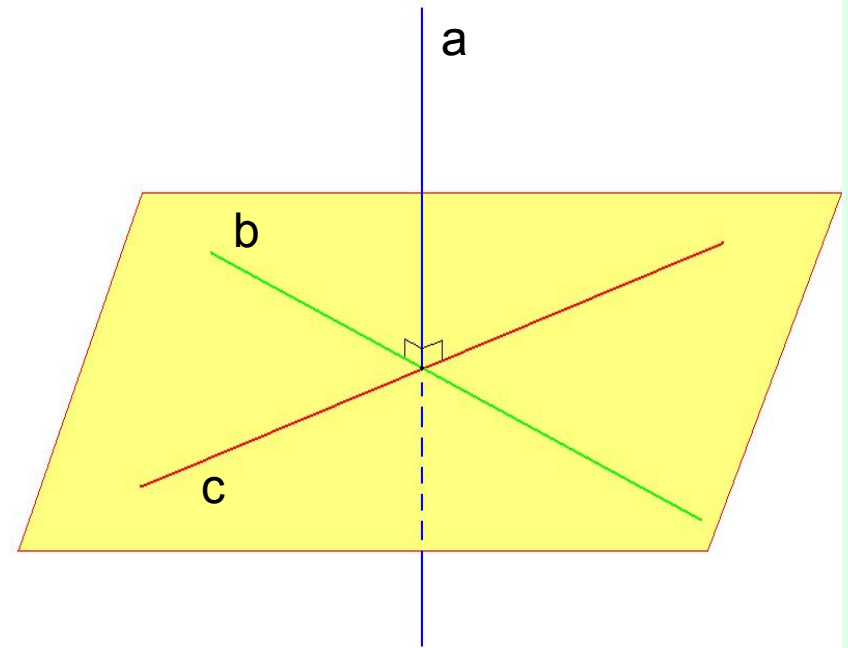
Через какую-нибудь точку  $M$  прямой  $b$  проведем прямую  $b_1 \parallel a$ . Из 1-го свойства получили прямая  $b_1 \perp \alpha$ . Докажем, что прямая  $b_1$  совпадает с прямой  $b$ . Тем самым будет доказано, что  $a \parallel b$ . Допустим, что  $b_1$  и  $b$  не совпадают. Тогда в плоскости  $\beta$ , содержащей прямые  $b$  и  $b_1$ , через

точку  $M$  проходят две прямые, перпендикулярные к прямой  $c$ , по которой пересекаются плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ . Но это невозможно, т.к. если  $b \perp \alpha$  и  $b_1 \perp \alpha$ , то эти прямые перпендикулярны любой прямой в этой плоскости (в данном случае прямой  $c$ ), но согласно теореме, через точку, не лежащую на прямой можно провести только одну прямую перпендикулярную данной, следовательно, прямая  $a \parallel b$ .



# Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

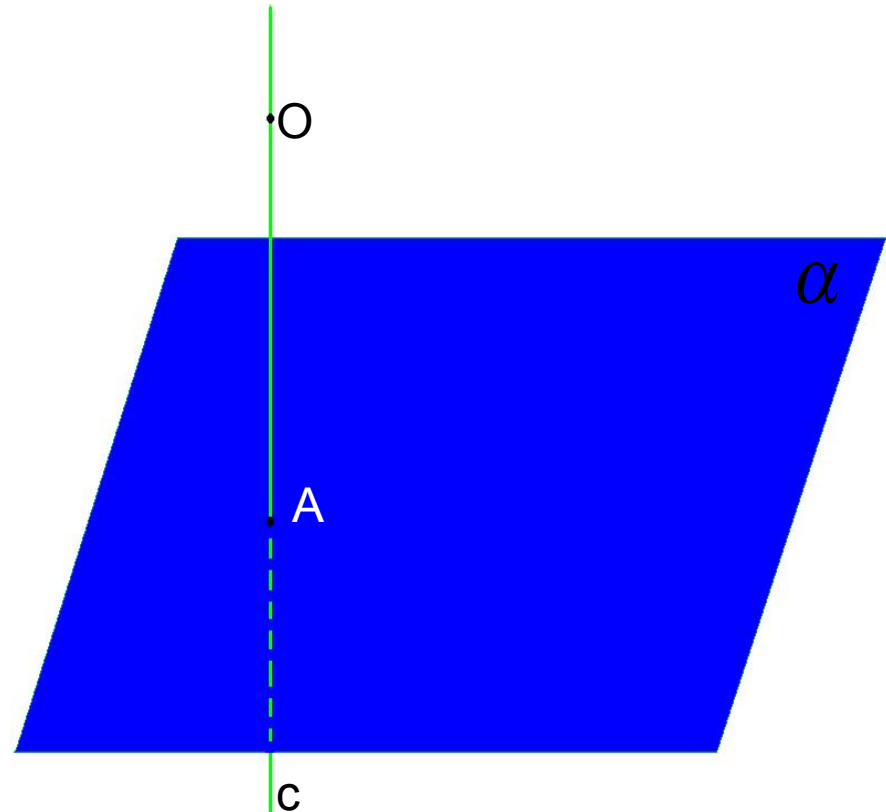
Если прямая  
перпендикулярна к двум  
пересекающимся  
прямым, лежащим в  
плоскости, то она  
перпендикулярна к этой  
плоскости.



Доказательство:

# Теорема о перпендикулярности прямой и плоскости.

Через любую  
точку  
пространства  
проходит  
прямая,  
перпендикуляр-  
ная к данной  
плоскости, и  
притом только  
одна.

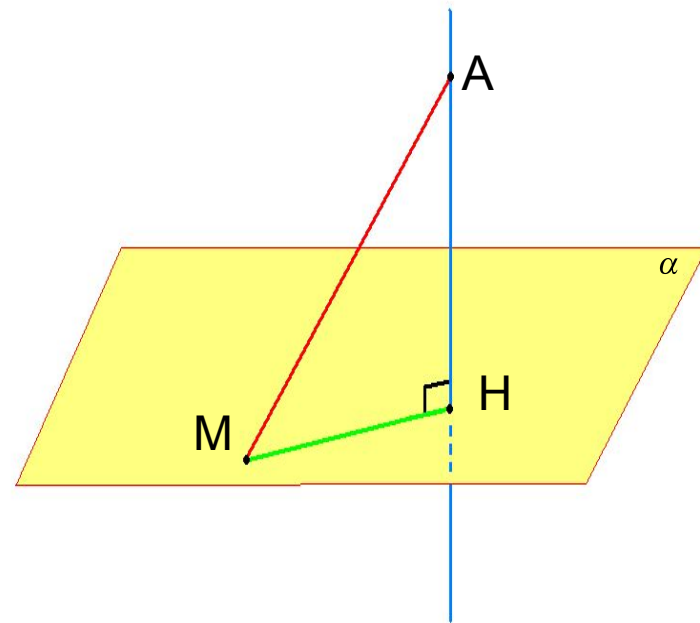




# Расстояние от точки до плоскости.

Расстояние, т.е. длина перпендикуляра, проведенного из точки  $A$  к плоскости  $\alpha$ , называется расстоянием от точки  $A$  до плоскости  $\alpha$ .

Например,  $AH$ .



# Теорема о трех перпендикулярах.

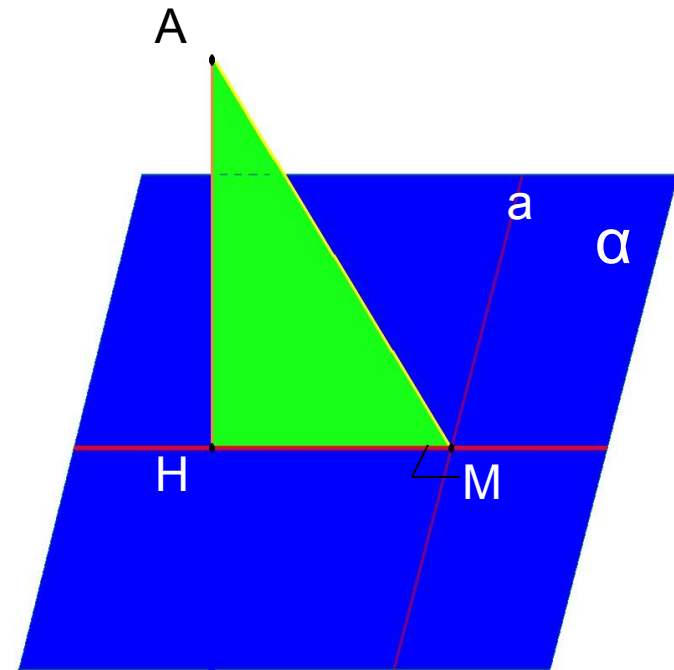
Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.

**Дано:**  $\alpha$ ;  $AH$ - перпендикуляр к плоскости  $\alpha$ ;  $AM$ - наклонная;  $a$ - прямая, проведенная в плоскости  $\alpha$  через точку  $M$  перпендикулярно к проекции  $HM$  наклонной.

**Доказать:**  $a \perp AM$

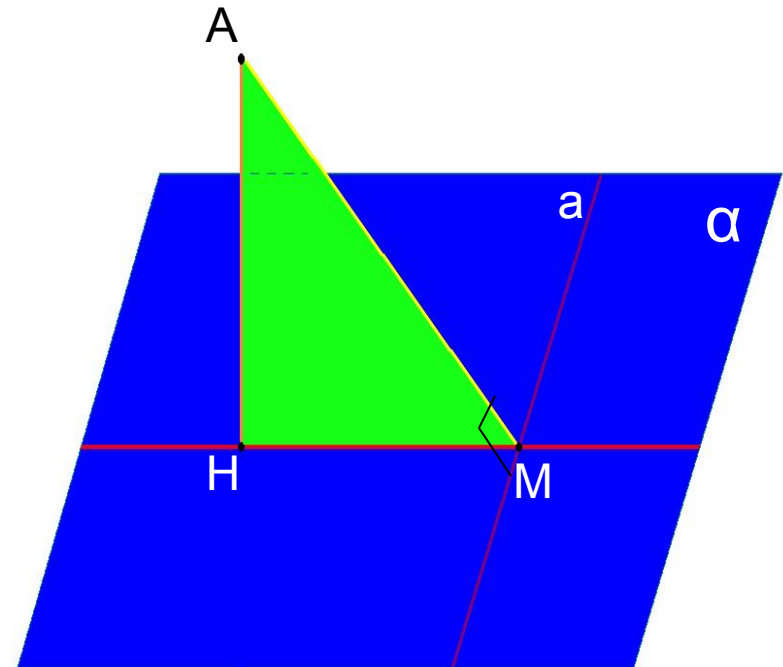
**Доказательство:**

Рассмотрим плоскость  $AMH$ . Прямая  $a$  перпендикулярна к этой плоскости, т.к. она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым  $AH$  и  $MH$ , лежащим в плоскости  $AMH$  ( $a \perp HM$  по условию и  $a \perp AH$ , т.к.  $AH \perp \alpha$ ). Отсюда следует, что прямая  $a$  перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости  $AMH$ , в частности  $a \perp AM$ .



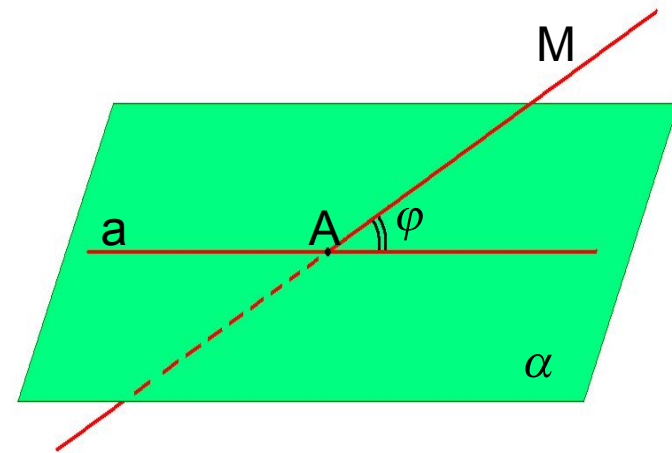
## Обратная теорема о трех перпендикулярах.

Прямая,  
проведенная в  
плоскости через  
основание  
наклонной  
перпендикулярно к  
ней,  
перпендикулярна к  
ее проекции.



## 8. Угол между прямой и плоскостью.

Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.



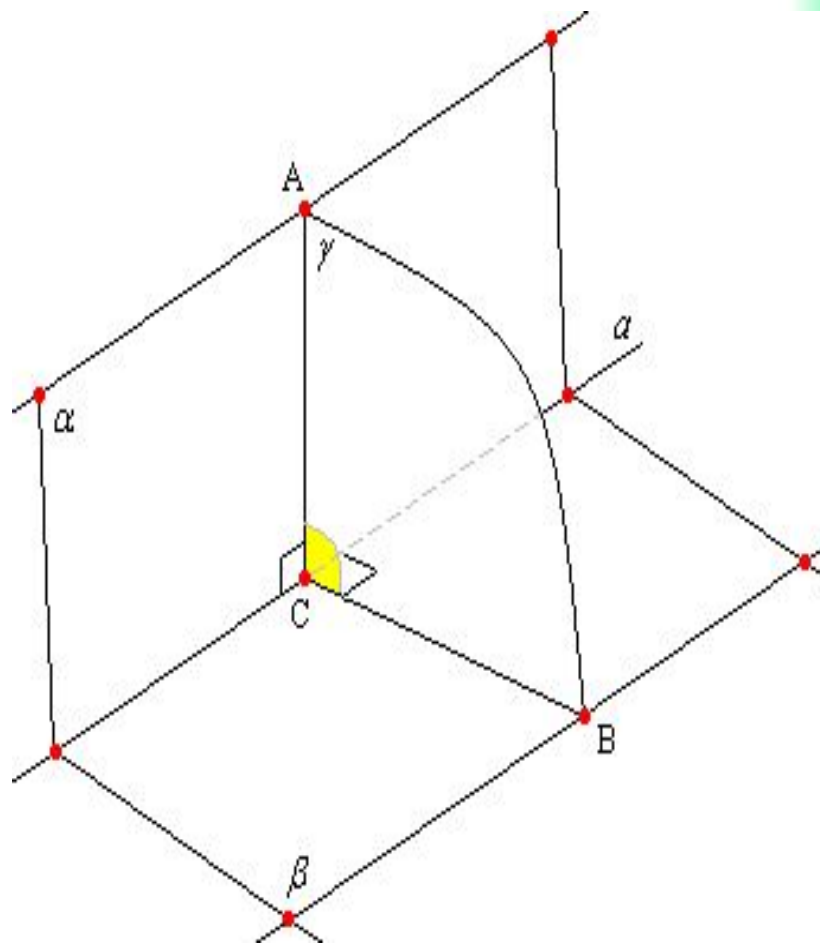
## 9. Двугранный угол.

**Определение 1. Двугранным углом** называется часть пространства, ограниченная двумя полуплоскостями, границей каждой из которых служит их общая прямая. Двугранный угол также называют **углом между данными плоскостями.**

**Определение 2.** Плоскости (полуплоскости), которые ограничивают двугранный угол, называются **гранями двугранного угла.**

**Определение 3.** Линия пересечения граней двугранного угла называется **ребром двугранного угла.**

**Определение 4. Линейным углом** двугранного угла называется угол, образованный двумя полупрямыми, полученными при пересечении граней двугранного угла плоскостью, перпендикулярной ребру этого двугранного угла. Значение линейного угла данного двугранного угла есть значение данного двугранного угла.



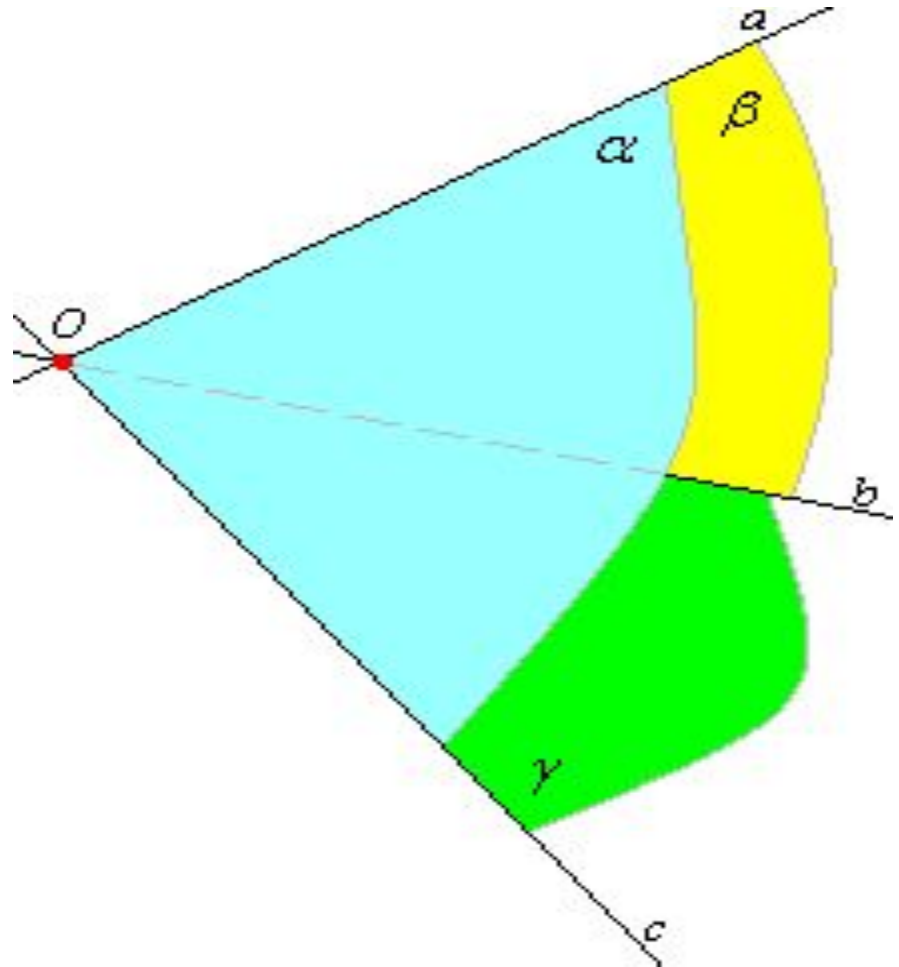
## 9. Трехгранный угол.

**Определение 1.** Фигура, образованная тремя лучами (ребрами), исходящими из одной точки (вершины) и не лежащими в одной плоскости, и тремя частями плоскостей (гранями), заключенных между этими частями, называется **трехгранным углом.**

**Определение 2.** Грань трехгранного угла называется также **плоским углом трехгранного угла.**

**Определение 3.** Двугранные углы, образованные гранями трехгранного угла, называются **двугранными углами трехгранного угла.**

**Определение 4.** Несколько плоскостей, пересекающихся в одной точке, разбивают пространство на части, каждая из которых может быть названа **многогранным углом.**



Дано:  $\alpha$ ;

$a \perp r$ ;  $a \perp q$ ;  $r \in \alpha$ ;  $q \in \alpha$ ;  $r \cap q = O$

Доказать:  $a \perp \alpha$

Доказательство:

1). Рассмотрим случай, когда прямая  $a$  проходит через точку  $O$ . (рис.1). Через точку  $O$  проведем  $\ell \parallel m$ . Отметим на прямой  $a$  точки  $A$  и  $B$  так, чтобы  $AO=OB$ , и проведем в плоскости  $\alpha$  прямую, пересекающую прямые  $r$ ,  $q$  и  $\ell$  соответственно в точках  $P, Q$  и  $L$ .

Т.к. прямые  $r$  и  $\ell$  - серединные перпендикуляры к отрезку  $AB$ , то  $AP=BP$  и  $AQ=BQ$ , причем  $PQ$ -общая  $\Rightarrow \triangle APQ = \triangle BPQ$  по трем сторонам. Поэтому  $\angle APQ = \angle BPQ$ .

$\triangle APL = \triangle BPL$  ( $AP=BP$ ,  $PL$ -общая,  $\angle APL = \angle BPL$ )  $\Rightarrow AL=BL \Rightarrow \triangle ABL$  - равнобедренный и его медиана  $LO$  является и высотой, т.е.  $\ell \perp a$ , но  $\ell \parallel m \Rightarrow m \perp a$  (по лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей)  $\Rightarrow$  прямая  $a$  перпендикулярна к любой прямой в плоскости  $\alpha \Rightarrow a \perp \alpha$ .

2). Рассмотрим теперь случай, когда прямая  $a$  не проходит через точку  $O$ . (рис.2) Проведем через точку  $O$  прямую  $a_1 \parallel a$ . По доказанному в первом случае получаем, что

$a_1 \perp \alpha$ , но  $a \parallel a_1 \Rightarrow a \perp \alpha$ .

Рис.1

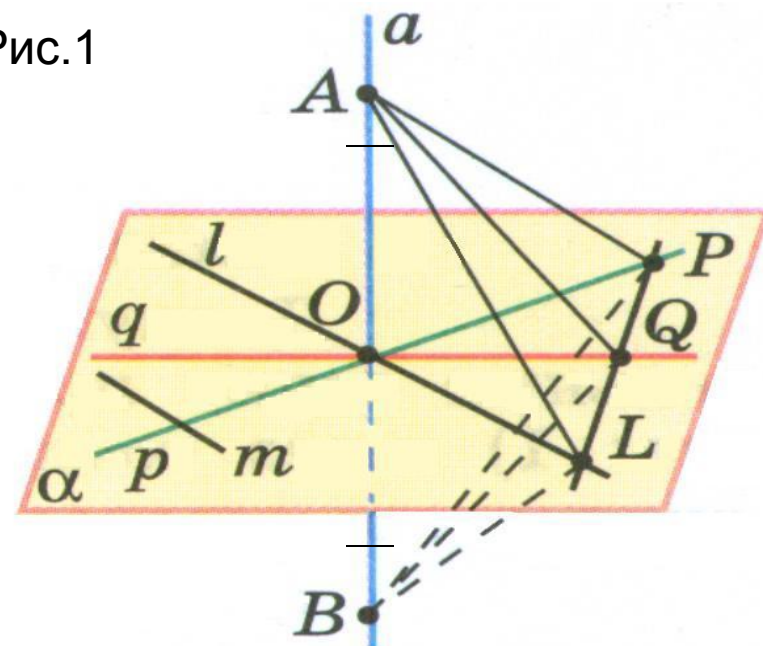
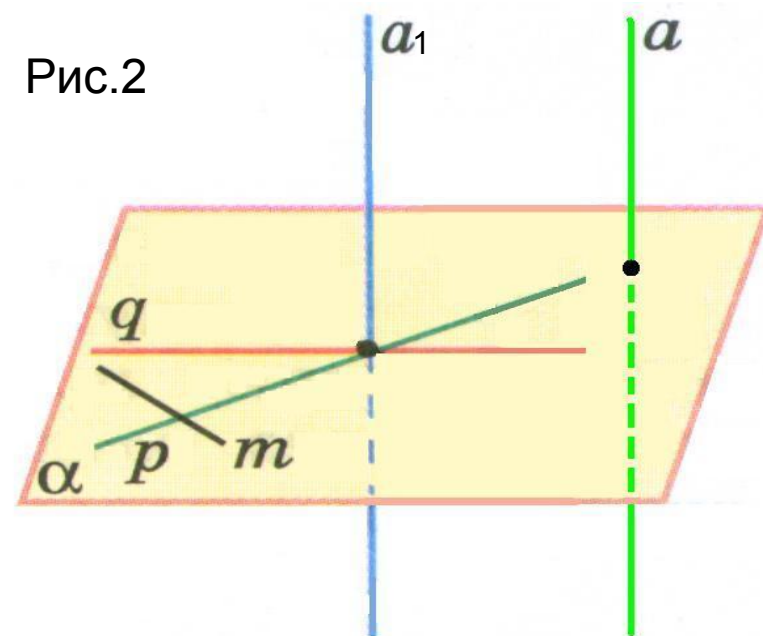


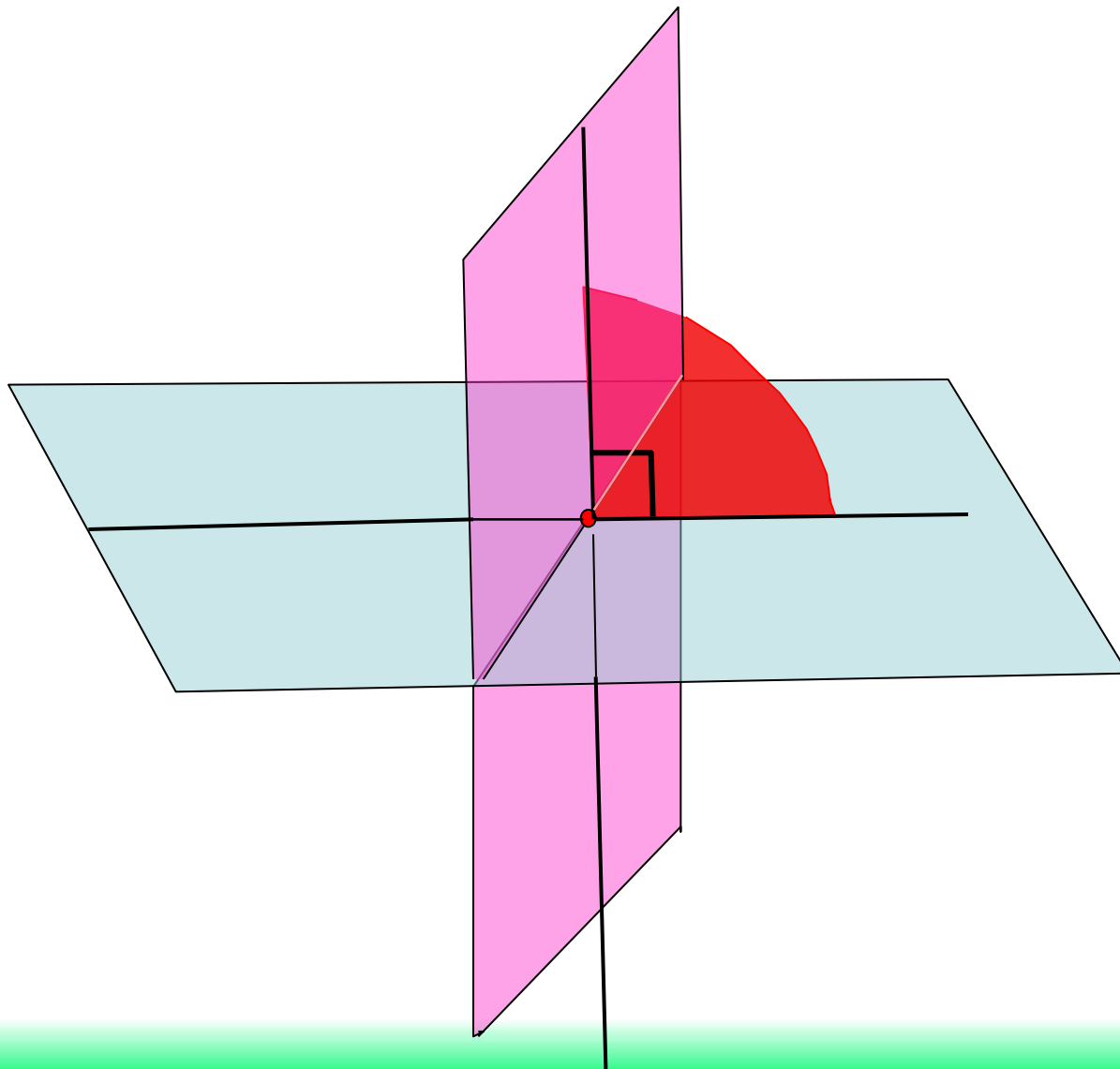
Рис.2



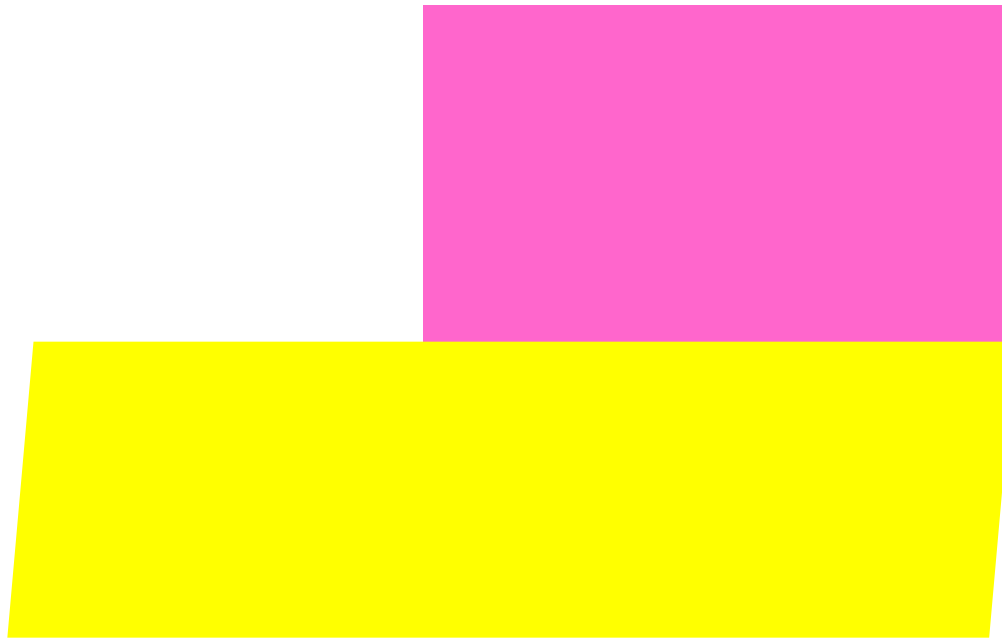
## **10. Перпендикулярность плоскостей.**



Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен  $90^\circ$ .

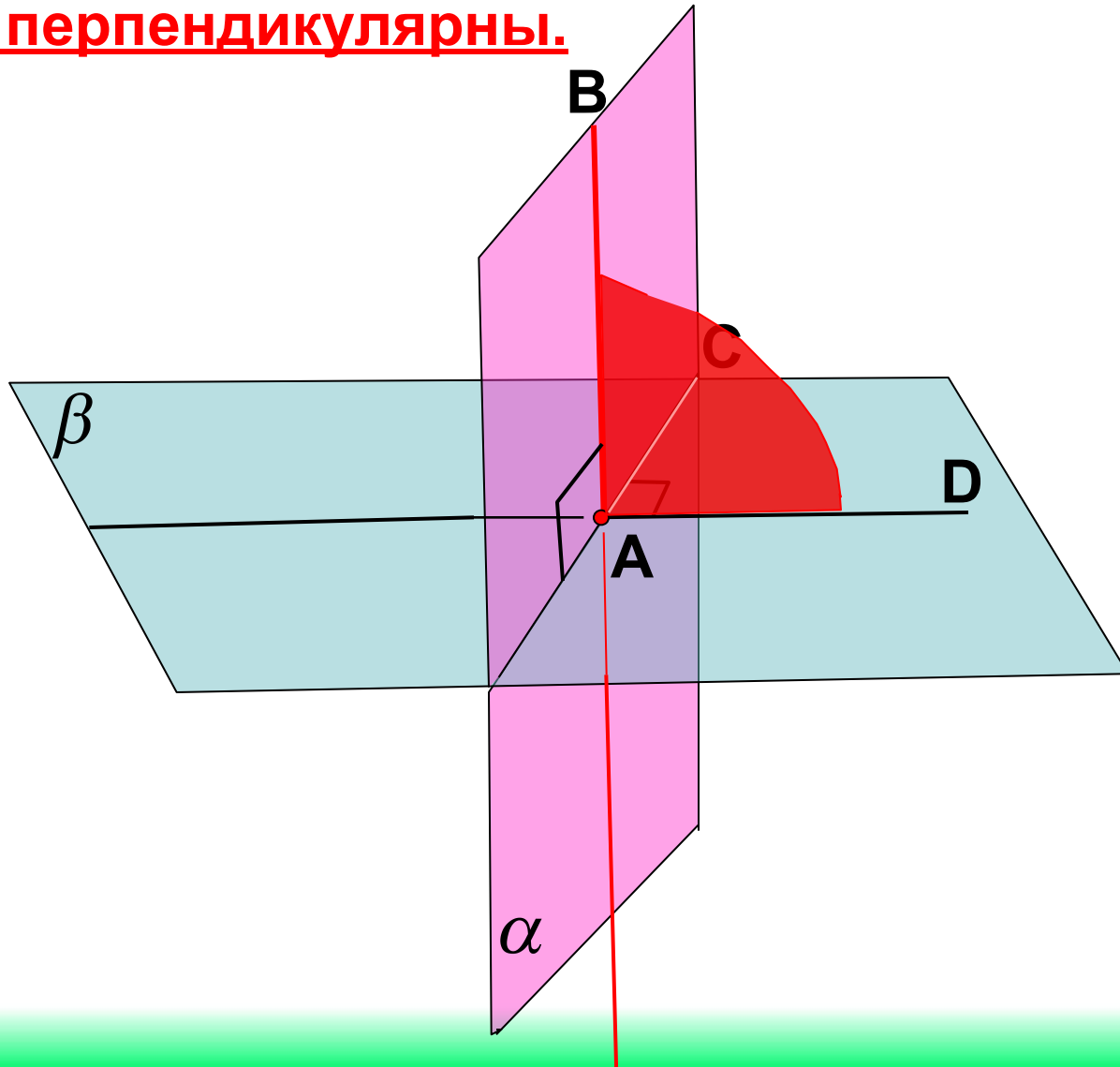


**Другое изображение перпендикулярных  
плоскостей:**



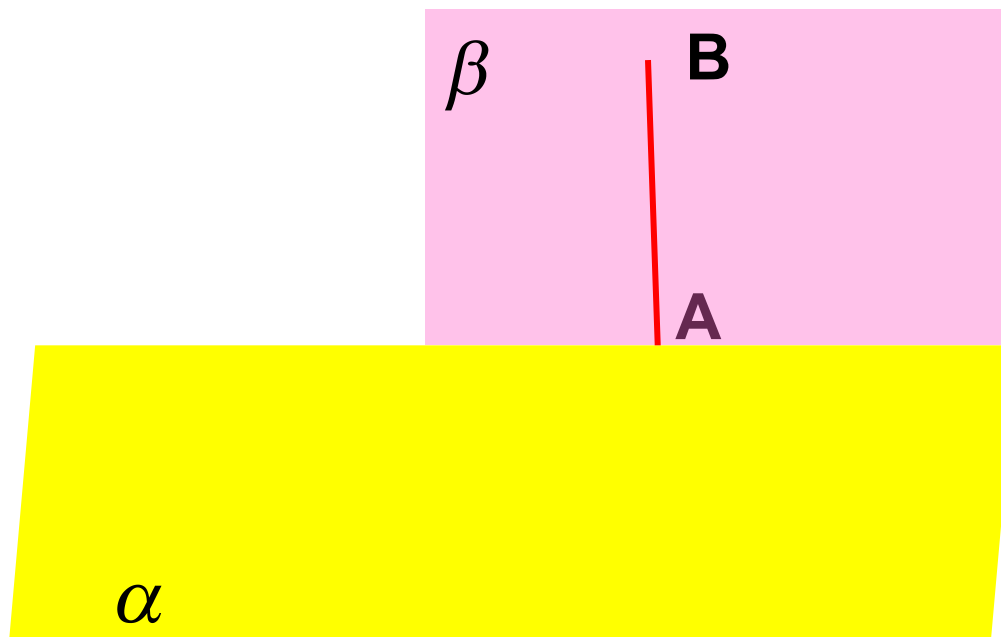
# Признак перпендикулярности плоскостей.

Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.



Другой рисунок.

Если плоскость  $\beta$  проходит через прямую  $AB$ ,  
перпендикулярную к плоскости  $\alpha$ , то  $\beta$   
перпендикулярна  $\alpha$



**Следствие.** Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.

