Делимость

Мирошниченко Н.Е.
МАОУ ШИЛИ
Г. Калининград

Делимость

Определение. **Целое число a делится на целое число b, не равное нулю, если существует такое целое число k, что $a = bk$.**

Свойства делимости

1. ***Всякое число а, отличное от нуля, делится на себя.***

2. ***Нуль делится на любое число b, не равное нулю.***

3. ***Если а делится на b ($b \neq 0$) и b делится на с ($c \neq 0$), то а делится на с.***

4. ***Если а делится на b ($b \neq 0$) и b делится на а ($a \neq 0$), то числа а и b либо равны, либо являются противоположными числами.***

Справедливость первого свойства вытекает из того, что равенство $a \cdot 1 = a$ верно при любом a, а второго — из того, что равенство $b \cdot 0 = 0$ верно при любом $b \neq 0$.

Докажем справедливость третьего свойства. Из определения делимости следует, что $a = bk$, $b = cm$, где k и m — целые числа. Отсюда $a = (cm)k$, т. е. в силу сочетательного свойства умножения $a = c(mk)$, где mk — целое число, а это означает, что a делится на c.

Докажем теперь справедливость четвертого свойства. Из определения делимости следует, что $a = bk$ и $b = am$, где k и m — целые числа. Отсюда $a = (am)k$, т. е. $a = a\,(mk)$. Так как $a \neq 0$, то $mk = 1$. Однако $mk = 1$ для целых чисел m и k тогда и только тогда, когда оба числа m и k равны 1 или равны -1. В первом случае числа a и b равны, во втором — они отличаются только знаком.

Делимость суммы и произведения

1. ***Если в сумме целых чисел каждое слагаемое делится на некоторое число, то сумма делится на это число.***

2. ***Если в разности целых чисел уменьшаемое и вычитаемое делятся на некоторое число, то разность делится на это число.***

3. ***Если в сумме целых чисел все слагаемые, кроме одного, делятся на некоторое число, то сумма не делится на это число.***

4. ***Если в произведении целых чисел один из множителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число.***

5. ***Если в произведении двух целых чисел один из множителей делится на m, а другой на n, то произведение делится на mn.***

При решении задач на делимость часто используются свойства, которые следуют из доказанных свойств и связаны с последовательным расположением целых чисел:

произведение n последовательных целых чисел делится на n;

произведение трех последовательных целых чисел делится на 6;

произведение двух последовательных четных чисел делится на 8.

О п р е д е л е н и е. Целое число r называется остатком от деления целого числа a на натуральное число b, если разность $a - r$ делится на b и $0 \leqslant r < b$.

Т е о р е м а. *Для любого целого числа a и натурального числа b существует единственная пара целых чисел q и r, таких, что $a = bq + r$, где $0 \leqslant r < b$.*

Сравнение по модулю

Везде далее a, b $\in$ Z, m $\in$ N.

Числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если (a−b) делится на m. Иными словами, a сравнимо с b по модулю m, если числа a и b имеют одинаковые остатки при делении на m.

Обозначение $a \equiv b \pmod{m}$.

Примеры: $13 \equiv 37 \pmod{6}$;

$-12 \equiv 3 \pmod{5}$;

$13 \equiv 5 \pmod{4}$.

Теорема 1

Пусть $a \equiv b \pmod m$, $c \equiv d \pmod m$.

Тогда $a + c \equiv b + d \pmod m$;

$a - c \equiv b - d \pmod m$;

$ac \equiv bd \pmod m$.

Доказательство:

Пусть $a - b = pm$, $c - d = qm$, где $p, q \in Z$.

Тогда

- $(a + c) - (b + d) = a + c - b - d = (a - b) + (c - d) = pm + qm = m(p + q)$. Это выражение делится на m.
- $(a - c) - (b - d) = a - c - b + d = (a - b) - (c - d) = pm - qm = m(p - q)$ делится на m;
- $ac - bd = ac - bc + bc - bd = c(a - b) + b(c - d) = cpm + bqm = m(cp + bq)$ делится на m.

Значит $a + c \equiv b + d \pmod m$; $a - c \equiv b - d \pmod m$; $ac \equiv bd \pmod m$.

Следствие 1

Пусть $a \equiv b \pmod{m}$. *Тогда*

$a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$;

$a^3 \equiv b^3 \pmod{m}$;

. . .

$a^n \equiv b^n \pmod{m}, n \in N.$

Иначе говоря, обе части сравнения можно возводить в любую натуральную степень.

Примеры:

$16 \equiv 9 \pmod{7} \Rightarrow 256 \equiv 81 \pmod{7}$;

$5 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow 125 \equiv 8 \pmod{3}$;

$10 \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow 10000 \equiv 81 \pmod{7}$.

Задача. Доказать, что для любого натурального n:

а) $7^n - 1 \,\vdots\, 6$ б) $2^{4n} - 1 \,\vdots\, 15$ в) $13^n + 3^{n+2} \,\vdots\, 10$

Решение: а) $7^n - 1 \,\vdots\, 6 \rightarrow 7^n \equiv 1(\mathrm{mod})6 \rightarrow 7^n \equiv 1^n(\mathrm{mod})6 \rightarrow$

$7^n \equiv 1(\mathrm{mod})6 \rightarrow 7^n - 1 \,\vdots\, 6$

б) $2^{4n} = (2^4)^n = 16^n$

$16 \equiv 1(\mathrm{mod}15) \rightarrow 16^n \equiv 1^n(\mathrm{mod}15) \rightarrow 16 \equiv 1(\mathrm{mod}15) \rightarrow$

$\rightarrow 2^{4n} - 1 \,\vdots\, 15$

в) $13^n + 3^{n+2} = 13^n + 9 \cdot 3^n$

$13 \equiv 3(\mathrm{mod}10) \rightarrow 13^n \equiv 3^n(\mathrm{mod}10)$

$13^n + 9 \cdot 3^n \equiv 3^n + 9 \cdot 3^n(\mathrm{mod}10) \equiv 10 \cdot 3^n(\mathrm{mod}10) \equiv$

$10(\mathrm{mod}10) \equiv 0(\mathrm{mod}10) \rightarrow 13^n + 3^{n+2} \,\vdots\, 10$

Задача

Доказать, что 10^{70} 19^{2} делится на 27.

Число 10 бессмысленно сравнивать по модулю 27, поэтому представим

$$10^{70} = 10^{2\cdot 35} = (10^{2})^{35} = 100^{35}$$

Заметим, что $100 \equiv 19 \equiv -8 \pmod{27}$, откуда получаем

$$10^{70} - 19^{2} = 100^{35} - 19^{2} \equiv (-8)^{35} - (-8)^{2} = -8^{35} - 8^{2} =$$

$$-8^{2}(8^{33}+1)(\mathrm{mod}\,27)$$

$$8^{33} = (8^{3})^{11} = 512^{11} \equiv (-1)(\mathrm{mod}\,27)$$

$$10^{70} - 19^{2} \equiv -8^{2}(8^{33}+1) \equiv -64(-1+1) \equiv 0(\mathrm{mod}\,27) \Rightarrow$$

$$10^{70} - 19^{2} \,□\, 27$$

Задача .

Найти остаток от деления $(75\cdot 56)^{28}+(58\cdot 34)^{31}$ на 19

Заметим, что

$$75\equiv -1(\mathrm{mod}\,19)$$

$$56\equiv -1(\mathrm{mod}\,19)$$

$$58\equiv 1(\mathrm{mod}\,19)$$

$$34\equiv -4(\mathrm{mod}\,19)$$

$$(75\cdot 56)^{28}+(58\cdot 34)^{31}\equiv 1^{28}+(-4)^{31}(\mathrm{mod}\,19)$$

$$4^{31}=4\cdot(4^{2})^{15}=4\cdot 16^{15}\equiv 4\cdot(-3)^{15}\equiv -4\cdot 3^{15}\equiv -4\cdot 27^{5}\equiv$$
$$-4\cdot 8^{5}\equiv -4\cdot 8\cdot 64^{2}\equiv -32\cdot 7^{2}\equiv -32\cdot 49\equiv 6\cdot 11\equiv 66\equiv$$
$$9(\mathrm{mod}\,19)$$

$$(75\cdot 56)^{28}+(58\cdot 34)^{31}\equiv 1^{28}+(-4)^{31}(\mathrm{mod}\,19)$$
$$\equiv 1-9=-8\equiv 11(\mathrm{mod}\,19)$$

Ответ: 11.

Теорема 2 (Малая теорема Ферма)
Пусть p — простое число, тогда для любого натурального a $a^p - a \;\vdots\; p$ или

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

Доказательство.
Рассмотрим два случая: a делится на p; a не делится на p.
1) a делится на p;
Тогда используя сравнения запишем:
$a \equiv 0 \pmod{p}$;
$a^p \equiv 0 \pmod{p}$;
Или $a^p \equiv a \pmod{p}$
В этом случае теорема доказана. $\Rightarrow a^p - a \;\vdots\; p$

2) a не делится на p;

Рассмотрим числа a, $2a$, $3a$,...,$(p - 1)a$ $^{(*)}$.

Покажем, что эти числа дают разные остатки при делении на p. Очевидно, остаток также не может быть 0.

Докажем от обратного.

Пусть какие-то два числа ka, na имеют одинаковые остатки при делении на p (пусть $k > n$). Тогда разность $ka - na$ делится на p. Значит $(k - n)a$ делится на p. Но a не делится на p, а разница $k - n$ меньше p и отлична от нуля, потому также не делится на p. Мы пришли к противоречию - наше предположение, что числа $^{(*)}$ могут давать одинаковые остатки при делении на p ошибочно. Запишем это:

$a \equiv r_1 \pmod{p}$;

$2a \equiv r_2 \pmod{p}$;

...

$(p - 1)a \equiv r_{p-1} \pmod{p}$;

Используя свойства сравнения перемножаем предыдущие сравнения. Так как всего множителей $p - 1$, а все остатки при делении на p разные, то справа будет $(p - 1)!$

$a^{p-1}(p - 1)! \equiv (p - 1)! \pmod{p}$;

$(a^{p-1} - 1)(p - 1)! \equiv 0 \pmod{p}$;

Но $(p - 1)!$ не делится на p, так как p - простое, а все множители факториала меньше p. Значит $(a^{p-1} - 1)$ делится на p.

$(a^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod{p}$; $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$; $a^p \equiv a \pmod{p}$;

Что и требовалось доказать.

Задача. Докажите, что $7^{120}-1$ делится на 143

Решение. Докажем, что $(7^{120}-1)\vdots 11$ и $(7^{120}-1)\vdots 13$

По теореме Ферма

$$7^{11}-7\vdots 11 \Rightarrow 7(7^{10}-1)\vdots 11 \Rightarrow 7^{10}-1\vdots 11 \Rightarrow 7^{10}\equiv 1(\mathrm{mod}\,11) \Rightarrow$$

$$(7^{10})^{12}\equiv 1^{12}(\mathrm{mod}\,11) \Rightarrow 7^{120}\equiv 1(\mathrm{mod}\,11) \Rightarrow 7^{120}-1\vdots 11$$

$$7^{13}-7\vdots 13 \Rightarrow 7(7^{12}-1)\vdots 13 \Rightarrow 7^{12}-1\vdots 13 \Rightarrow 7^{12}\equiv 1(\mathrm{mod}\,13) \Rightarrow$$

$$(7^{12})^{10}\equiv 1^{10}(\mathrm{mod}\,13) \Rightarrow 7^{120}\equiv 1(\mathrm{mod}\,13) \Rightarrow 7^{120}-1\vdots 13$$

По свойствам делимости, если $(7^{120}-1)\vdots 11$ и $(7^{120}-1)\vdots 13$

то $(7^{120}-1)\vdots 143$

Задача.

Пусть n – натуральное число, не кратное 17. Докажите, что либо $n^8 + 1$, либо $n^8 - 1$ делится на 17.

Решение. $$(n^8+1)(n^8-1)=n^{16}-1$$

По теореме Ферма

$$(n^{17}-n)\,\vdots\,17 \Rightarrow n(n^{16}-1)\,\vdots\,17 \Rightarrow n(n^8-1)(n^8+1)\,\vdots\,17$$

а значит один из множителей делится на 17.

Задача. Докажите, что при любом целом *a*: $a^5 - a$ делится на 30.

Решение.

С одной стороны по теореме Ферма $(a^5 - a) \vdots 5$

с другой стороны

$$a^5 - a = a(a^4 - 1) = \underline{a(a-1)(a+1)}(a^2+1) \vdots 6$$

Т.к.произведение трех последовательных натуральных чисел делится на 6.

Если число делится на 5 и на 6 , то оно делится и на 30

Задача. Докажите, что для любого целого числа а число a^{561}- а делится на 561.

Решение

По малой теореме Ферма, при любом целом а и простом р число a^p - а делится на р (или a^{p-1}-1 делится на р при а, не делящемся на р). Также будем пользоваться тем фактом, что x^n-1 делится на x-1 при любом целом x и любом натуральном n. (Это следует из разложения $x^n - 1=(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1)$.) Прямо теоремой Ферма воспользоваться нельзя, так как 561=3*11*17 - составное число. Докажем вначале, что a^{561} - а делится на 17. Если а делится на 17, то все ясно. Если нет, то $a^{561}-a = a(a^{560}-1) = a((a^{16})^{35}-1)$ делится на a^{16}-1, что в свою очередь делится на 17 по теореме Ферма (можно в этом убедиться и непосредственно, перебирая остатки от деления на 17). Таким же образом, используя, что 561 - 1=560 делится на11-1=10 и 3 - 1=2, доказываем, что a^{561}-а делится на 11 и на 3.

Если число делится на 17, на 11 и на 3, то оно делится на 561=3*11*17.

Задача. Написано 1992-значное число. Каждое двузначное Число, образованное соседними цифрами,
делится на 17 или на 23. Последняя цифра числа 1.

а) Делится ли данное число на 3?

б) Какова первая цифра числа?

Решение. Выпишем все двузначные числа, делящиеся на 17 или 23. Это 17, 34, 51, 68, 85, 23, 46, 69, 92. У всех этих чисел последние цифры различны, значит, искомое число мы сможем восстановить однозначно.

Последняя цифра 1, значит, соответствующее двузначное чисто 51, т.е. предыдущая
цифра в числе 5.

Эта цифра 5 соответствует двузначному числу 85, следовательно, перед ней стоит цифра 8.

Рассуждая аналогично, получим ряд из девяти последних цифр числа: 692346851.

Набор 92346 будет теперь всё время повторяться. Всего же цифр 1992, в том числе: 3 последние, 5 цифр из периода, встречающиеся 397 раз, и ещё 4 цифры — последние 4 цифры периода, они же — первые 4 цифры числа. Таким образом, первая цифра искомого числа 2.

Найдем сумму цифр этого числа:

$2 + 3 + 4 + 6 + 397(9 + 2 + 3 + 4 + 6) + 8 + 5 + 1 = 9557.$

Это число не делится на 3, значит и данное в условии число не делится на 3.

Ответ: а) нет; б) 2.

Задача. Можно ли расставить числа а) от 1 до 7;
б) от 1 до 9
по кругу так, чтобы любое из них делилось на разность своих соседей?

Решение. а) Например, так: -1-5-6-2-7-3-4-

б) Заметим, что нечётное число не делится на чётное, а значит, не может стоять в окружении чисел одинаковой чётности. Отсюда следует, что нечётные числа стоят парами. Однако среди чисел 1, 2, ..., 9 нечётных чисел пять, и поэтому из них нельзя образвать пары.

Ответ: а) да; б) нет.

Задача. Даны натуральные числа a,b и c такие, что $a > b > c$. Среднее арифметическое этих чисел делится на 13.

а) Найдите наименьшую сумму $a+b+c$ такую, что она является квадратом натурального числа.

б) Найдите наибольшее значение числа c, если $a = 32$ и сумма $a+b+c$ имеет наименьшее значение.

в) Найдите наименьшее число b, если известно, что числа c, b и a в указанном порядке составляют арифметическую прогрессию с разностью n.

г) Если известно, что числа c, b и a в указанном порядке составляют возрастающую арифметическую прогрессию с разностью n при котором число c будет наименьшим , и все члены арифметической прогрессии будут являться квадратами натурального числа.

а) По условию $\frac{a+b+c}{3} = 13k$ где k – натуральное.

Значит, a + b + c = 39k. Таким образом, a + b +c является квадратом и делится на 39 = 13 · 3 поэтому минимальное возможное значение a + b + c = 39^2 =1521

б) Из пункта а) получаем, что b + c = 39k - 32. Если сумма a + b + c минимальна, то и b + c минимально, значит k = 1 и b + c = 7 Вспомнив, что по условию b < c получаем, что c < 3

в) По условию a + b + c = 39k, а из того, что c, b, a — арифметическая прогрессия, следует равенство b – c = a – b или 2b = a + c или a + b + c = 3b Значит, 3b=39k или b=13k . b должно быть минимально, поэтому b=13 в) Пусть $c = p^2, b = q^2, a = r^2$. Тогда $2q^2 = r^2 + p^2$.

Из предыдущего пункта q кратно 13. Если n и c минимально, то и b должно быть минимально, значит $p^2 + q^2 = 2 \cdot 169 = 338$. Подбором получаем, что единственная пара чисел (p, q) такая, что $p<q$ и удовлетворяющая последнему равенству это $p = 7, q = 17$. Тогда получаем, что $n=b-c=169-49=120$

В вершинах треугольника записано по натуральному числу, на каждой стороне — произведение чисел, записанных в её концах, а внутри треугольника — произведение чисел, записанных в его вершинах. Сумма всех семи чисел равна 1000. Какие числа записаны в вершинах треугольника?

Решение.

Пусть в вершинах треугольника стоят числа a, b и c . Из условия следует равенство:

$a + b + c + ab + bc + ac + abc = 1000$

Добавим к обеим частям единицу:

$a + b + c + ab + bc + ac + abc + 1 = 1001$

$(c+1)+(c+1)a+(c+1)b+(c+1)ab=1001$

$(c+1)(1+a+b+ab)=7 \cdot 11 \cdot 13$

$(c+1)(a+1)(b+1)= 7 \cdot 11 \cdot 13$

Ясно, что все скобки в левой части больше единицы, а все множители в правой части — простые числа. Значит, с точностью до перестановки, числа $a + 1$, $b + 1$ и $c + 1$ равны 7, 11, 13. Значит числа в вершинах треугольника на единицу меньше и равны 6, 10, 12.

Задача.

Можно ли привести пример пяти целых чисел, произведение которых равно 720 и

а) пять из них; б) три из них

образуют геометрическую прогрессию?

Решение.

1. Предположим, что существует пять чисел, образующих геометрическую прогрессию и произведение их равно 720, т.е.

$$b_1 \cdot (b_1 q) \cdot (b_1 q^2) \cdot (b_1 q^3) \cdot (b_1 q^4) = b_1^5 q^{10} = (b_1 q^2)^5$$

но 720 не является пятой степенью никакого целого числа.

2. Разложим 720 на множители:

$$720 = 1 \cdot 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Из этих чисел только три могут образовать геометрическую прогрессию 1, 2, 4

Получим произведения пяти чисел:

$$720 = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 10 = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 15$$

Задача.

На доске написано число 7. Раз в минуту Вася дописывает на доску одно число: либо вдвое большее какого-то из чисел на доске, либо равное сумме каких-то двух чисел, написанных на доске (таким образом, через одну минуту на доске появится второе число, через две — третье и т.д.).

а) Может ли в какой-то момент на доске оказаться число 2012?

б) Может ли в какой-то момент сумма всех чисел на доске равняться 63?

в) Через какое наименьшее время на доске может появиться число 784?

Решение.

1. Каждое число на доске будет делиться на 7. Действительно, исходное число делится на 7, в случае удвоения числа делящегося на 7, получится число, делящееся на 7. А при сложении чисел, делящихся на 7, также получится число, делящееся на 7. Таким образом, все числа на доске будут делиться на 7, а 2012 на 7 не делится, следовательно, оно не может появиться на доске .

2. В условии не сказано, что одно число нельзя удваивать несколько раз, поэтому получим:

$$7+14+14+28=63$$

или

7+14+14+14+14=63

3. Все числа на доске будут делиться на 7. Рассмотрим аналогичную задачу, разделив исходное число 7 и то число, которое нужно получить, т.е. 784, на 7. От этого количество операций не изменится. Таким образом, достаточно за наименьшее количество операций получить число 112, начав с числа 1.

Покажем, что за 7 минут число 112 из 1 получить невозможно.

. $1 \Rightarrow 1,2 \Rightarrow 1,2,4 \Rightarrow 1,2,4,8 \Rightarrow 1,2,4,8,16 \Rightarrow 1,2,4,8,16,32 \Rightarrow 1,2,4,8,16,32,64 \Rightarrow 1,2,4,8,16,32,64,128$ или $\Rightarrow 1,2,4,8,16,32,64,96$

Приведем пример, как его получить за 8 минут:

$1 \Rightarrow 1,2 \Rightarrow 1,2,4 \Rightarrow 1,2,4,8 \Rightarrow 1,2,4,8,16 \Rightarrow 1,2,4,8,16,32 \Rightarrow 1,2,4,8,16,32,64 \Rightarrow 1,2,4,8,16,32,64,96 \Rightarrow 1,2,4,8,16,32,64,96,112$