Рациональные уравнения

10 класс

Учитель математики
МБОУ СОШ им. А.М. Селищева
Шалобаева Е.Н.

Уравнение, левая и правая части которого есть рациональные выражения относительно х, называют рациональным уравнением с неизвестным х.

Например, уравнения $5x^6 - 9x^5 + 4x - 3x + 1 = 0$,

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = 2x + 3$$

являются рациональными.

Корнем (или решением) уравнения с неизвестным x называют число, при подстановке которого в уравнение вместо x получается верное числовое равенство.

Решить уравнение — значит найти все его корни или показать, что их нет.

При решении рациональных уравнений приходится умножать и делить обе части уравнения на не равное нулю число, переносить члены уравнения из одной части в другую, применять правила сложения и вычитания алгебраических дробей. В результате будет получаться уравнение, равносильное предшествующему, т. е. уравнение, имеющее те же корни, и только их.

Уравнение вида A(x)•B(x) = O,

где A(x) и B(x) — многочлены относительно x, называют **распадающимся уравнением**.

ПРИМЕР 1.

Решим уравнение $(x^2 - 5x + 6)(x^2 + x - 2) = 0$.

Уравнение распадается на два уравнения.

$x^2 - 5x + 6 = 0$ $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$

$x^2 + x - 2 = 0.$ $x_3 = -2$ и $x_4 = 1$

Значит, уравнение исходное имеет корни $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$, $x_4 = 1$.

Ответ. -2; 1; 2; 3.

Уравнение вида $\dfrac{A(x)}{B(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A(x)} = 0 \\ \mathrm{B(x)} \neq 0 \end{cases}$, где A(x) и B(x) — многочлены относительно x.

ПРИМЕР 2.

Решим уравнение $$\frac{x^2 + 4x - 21}{x^2 - x - 6} = 0$$

Сначала решим уравнение

$x^2 + 4x - 21 = 0$. $x_1 = 3$ и $x_2 = -7$

Подставив эти числа в знаменатель левой части исходного уравнения, получим

$x_1^{\ 2} - x_1 - 6 = 9-3-6 = 0$,

$x_2^{\ 2} - x_2 - 6 = 49 + 7 - 6 = 50 \neq 0$.

Это показывает, что число $x_1 = 3$ не является корнем исходного уравнения, а число

$x_2 = -7$ — корень этого уравнения.

Ответ. -7.

Уравнение вида $$\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{C(x)}{D(x)}$$

где A(x), B(x), C(x) и D(x) — многочлены относительно x, обычно решают по следующему правилу.

$$\frac{A(x)}{B(x)}-\frac{C(x)}{D(x)}=0$$

$$\frac{A(x)D(x)-C(x)B(x)}{B(x)D(x)}=0$$

Решают уравнение A(x)•D(x) - C(x)·B(x) = 0 и отбирают из его корней те, которые не обращают в нуль знаменатель уравнения.

ПРИМЕР 3.

Решим уравнение $\frac{x^2-5x+6}{x-3}=2x+3$

$$\frac{x^2-5x+6}{x-3}-\frac{2x+3}{1}=0$$

$$\frac{x^2-5x+6-(2x+3)(x-3)}{x-3}=0$$

Решим уравнение

$x^2 - 5x + 6 - (2x + 3)(x - 3) = 0.$

$x^2 + 2x - 15 = 0$

$x_1 = -5$ и $x_2 = 3$.

Число x_1 не обращает в нуль знаменатель $x - 3$, а число x_2 обращает. Следовательно, уравнение имеет единственный корень = -5.

Ответ. -5.

ПРИМЕР 4.

Решим уравнение $x^8 + 4x^6 - 10x^4 + 4x^2 + 1 = 0$.

Число $x_0 = 0$ не является корнем уравнения, поэтому уравнение равносильно уравнению

$x^4 + 4x^2 - 10 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4} = 0$ Обозначим $t = x^2 + \frac{1}{x^2}$,тогда $x^4 + \frac{1}{x^4} = t^2 - 2$,

получаем $t^2 + 4t - 12 = 0$, $x_1 = 2$ и $x_2 = -6$.

Следовательно, корни уравнения найдем, объединив все корни двух уравнений:

$x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$, и $x^2 + \frac{1}{x^2} = -6$,

Первое уравнение имеет два корня -1 и 1, а второе уравнение не имеет действительных корней, поэтому уравнение имеет только два корня: -1 и 1.

Ответ. -1; 1.