Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии

Урок алгебры в 9 классе.

Цели урока:

- отрабатывать навыки применения формулы n-го члена арифметической прогрессии;
- Вывести формулы суммы n-членов арифметической прогрессии;
- развивать умение выделять главное, сравнивать, обобщать изучаемые факты, логически излагать свои мысли.

Фронтальная беседа

1. Приведите примеры последовательности.
2. Сформулируйте определение арифметической прогрессии.
3. По какой формуле вычисляется n-й член арифметической прогрессии?

Устная работа:

Является ли заданная последовательность арифметической прогрессией, почему?

1. $3; 6; 9; 12; \ldots$
2. $-1; -1; -1; \ldots$
3. $0; 13; 1; 14; \ldots$
4. $-3; -1; 1; 3; \ldots$

Задача

- Найдите сумму 100 первых натуральных чисел.
- 1+2+3+4+5…..+98+99+100=
- Ваши решения?

Решение

- S=1 + 2 +3 +4 …… +98+ 99+ 100
- S=100+99+98+97+….. + 3 + 2 + 1

2S=101+101+101+…………101+101+101

Таких пар 100.

2S=101•100

Но так как мы складывали дважды все числа, надо сумму разделить на 2, чтобы получить ответ.

S= $\dfrac{101 \bullet 100}{2}$; S=5050

Формула

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

- Где a_1 – первый член арифметической прогрессии, a_n – последний член, n – количество суммируемых членов.

Формула

- Если в предыдущей формуле заменить $a_n = a_1 + d(n-1)$, то получится новая формула:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$$

Из истории математики

С формулой суммы n-первых членов арифметической прогрессии был связан эпизод из жизни немецкого математика Карла Фридриха Гаусса (1777-1855). Когда ему было 9 лет, учитель, занятый проверкой учеников других классов, задал на уроке следующую задачу: «Сосчитать сумму натуральных чисел от 1 до 100 включительно», надеясь, что это займёт много времени. Каково же было удивление учителя, когда один из учеников (это был Гаусс) через минуту воскликнул : «Я уже решил…»

Большинство учеников после долгих вычислений получили неверный результат. В тетради Гаусса было написано одно число и притом верное. Маленький Гаусс сразу сообразил, что 1+100=101, 2+99=101 и т.д. И таких чисел будет 50. Осталось умножить 101 на 50, что он сделал в уме. Изумленный учитель понял, что это самый способный ученик в его практике. В дальнейшем Гаусс сделал много замечательных открытий. Его даже называли «царём математики».

Решение задач:

Задача *1:* **Найдите сумму первых шестнадцати членов арифметической прогрессии**, **в которой** $a_1 = 6$, $d = 4$

Решение*:*

Найдём сумму по формуле: $S=(a_1 + a_n) :2 \cdot n$

По формуле $a_n=a_1+ d(n-1)$ найдём сначала a_{16}.

$a_{16} = 6 + 4\ (16 – 1) = 6 + 4\cdot 15=66$, тогда

$S_{16} = (6 +66) : 2 \cdot 16 = 72\cdot 8 =576$

Ответ:576

Задача 2: Тело в первую секунду прошло 16 метров, а в каждую следующую проходило на 3 метра больше, чем в предыдущую. Какой путь прошло это тело за 7 секунд?

Решение:

Найдём сумму по формуле: $S=(a_1 + a_n) :2 \cdot n$

По формуле $a_n=a_1+ d(n-1)$ найдём сначала a_7.

$a_7 = 16 + 3\ (7 – 1) = 16+18=34$, тогда

$S_7= (16 +34) : 2 \cdot 7 = 50:2 \cdot 7 =175$

Ответ:175

Задача 3

- Найдите сумму первых двадцати членов арифметической последовательности 4; 5,5…..
- Решение: здесь известны a_1=….., a_2=…

Найдите d: $a_2 - a_1$= 5,5 – 4=……

Используем формулу …..

Подставьте в неё a_1, d, n.

Ответ

- 365.

Задача 4

- Найдите сумму первых сорока членов арифметической последовательности (a_n), заданной формулой $a_n=5n-4$.
- Решение: найдём a_1, a_{40}
- $a_1=5\cdot 1-4=$….
- $a_{40}=5\cdot 40-4=$….
- Подставим в формулу …..

Ответ

- 3940.

Итог урока:

По какой формуле находится сумма первых *n*-членов арифметической прогрессии?

В заключении вспомним строки А.С.Пушкина из романа «Евгений Онегин», сказанные о его герое:

«…не мог он ямба от хорея, как мы ни бились, отличить». Отличие ямба от хорея состоит в различных расположениях ударных слогов стиха. Ямб - стихотворный метр с ударениями на чётных слогах стиха, то есть ударными слогами являются 2-й, 4-й,6-й,8-й и так далее слоги. Номера ударных слогов образуют арифметическую прогрессию с первым членом 2 и с разностью, равной двум: 2;4;6;8;… Хорей – стихотворный размер с ударением на нечётных слогах стиха. Номера ударных слогов также образуют арифметическую прогрессию, но её первый член равен единице, а разность по-прежнему равна двум:1;3;5;7;….