

# Формула суммы $n$ первых членов арифметической прогрессии

Урок алгебры в 9 классе.

# Цели урока:

- отрабатывать навыки применения формулы  $n$ -го члена арифметической прогрессии;
- Вывести формулы суммы  $n$ -членов арифметической прогрессии;
- развивать умение выделять главное, сравнивать, обобщать изучаемые факты, логически излагать свои мысли.

# Фронтальная беседа

1. Приведите примеры последовательности.
2. Сформулируйте определение арифметической прогрессии.
3. По какой формуле вычисляется  $n$ -й член арифметической прогрессии?

# Устная работа:

Является ли заданная последовательность арифметической прогрессией, почему?

1.  $3; 6; 9; 12; \dots$
2.  $-1; -1; -1; \dots$
3.  $0; 13; 1; 14; \dots$
4.  $-3; -1; 1; 3; \dots$

# Задача

- Найдите сумму 100 первых натуральных чисел.
- $1+2+3+4+5+\dots+98+99+100=$
- Ваши решения?

# Решение

$$\bullet S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100$$

$$\bullet S = 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 3 + 2 + 1$$

---

$$2S = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101$$

Таких пар 100.

$$2S = 101 \cdot 100$$

Но так как мы складывали дважды все числа, надо сумму разделить на 2, чтобы получить ответ.

$$S = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$$

# Формула

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

- Где  $a_1$  – первый член арифметической прогрессии,  $a_n$  – последний член,  $n$  – количество суммируемых членов.

# Формула

- Если в предыдущей формуле заменить  $a_n = a_1 + d(n-1)$ , то получится новая формула:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$$



# Из истории математики



С формулой суммы  $n$ -первых членов арифметической прогрессии был связан эпизод из жизни немецкого математика Карла Фридриха Гаусса (1777-1855). Когда ему было 9 лет, учитель, занятый проверкой учеников других классов, задал на уроке следующую задачу: «Сосчитать сумму натуральных чисел от 1 до 100 включительно», надеясь, что это займёт много времени. Каково же было удивление учителя, когда один из учеников (это был Гаусс) через минуту воскликнул: «Я уже решил...»

Большинство учеников после долгих вычислений получили неверный результат. В тетради Гаусса было написано одно число и притом верное. Маленький Гаусс сразу сообразил, что  $1+100=101$ ,  $2+99=101$  и т.д. И таких чисел будет 50. Осталось умножить 101 на 50, что он сделал в уме. Изумленный учитель понял, что это самый способный ученик в его практике. В дальнейшем Гаусс сделал много замечательных открытий. Его даже называли «царём математики».

# Решение задач:

**Задача 1:** Найдите сумму первых шестнадцати членов арифметической прогрессии, в которой  $a_1 = 6, d = 4$

**Решение:**

Найдём сумму по формуле:  $S = (a_1 + a_n) : 2 \cdot n$

По формуле  $a_n = a_1 + d(n-1)$  найдём сначала  $a_{16}$ .

$a_{16} = 6 + 4(16 - 1) = 6 + 4 \cdot 15 = 66$ , тогда

$S_{16} = (6 + 66) : 2 \cdot 16 = 72 \cdot 8 = 576$

Ответ: 576



**Задача 2: Тело в первую секунду прошло 16 метров, а в каждую следующую проходило на 3 метра больше, чем в предыдущую. Какой путь прошло это тело за 7 секунд?**

**Решение:**

Найдём сумму по формуле:  $S = (a_1 + a_n) : 2 \cdot n$

По формуле  $a_n = a_1 + d(n-1)$  найдём сначала  $a_7$ .

$a_7 = 16 + 3(7 - 1) = 16 + 18 = 34$ , тогда

$S_7 = (16 + 34) : 2 \cdot 7 = 50 : 2 \cdot 7 = 175$

**Ответ: 175**



# Задача 3

- Найдите сумму первых двадцати членов арифметической последовательности 4; 5,5.....

- Решение: здесь известны  $a_1 = \dots$ ,  $a_2 = \dots$

Найдите  $d$ :  $a_2 - a_1 = 5,5 - 4 = \dots$

Используем формулу .....

Подставьте в неё  $a_1$ ,  $d$ ,  $n$ .

# ОТВЕТ

- 365.

# Задача 4

- Найдите сумму первых сорока членов арифметической последовательности  $(a_n)$ , заданной формулой  $a_n = 5n - 4$ .
- Решение: найдём  $a_1, a_{40}$
- $a_1 = 5 \cdot 1 - 4 = \dots$
- $a_{40} = 5 \cdot 40 - 4 = \dots$
- Подставим в формулу  $\dots$

# Ответ

- 3940.

# Итог урока:

По какой формуле находится сумма первых  $n$ -членов арифметической прогрессии?

В заключении вспомним строки А.С.Пушкина из романа «Евгений Онегин», сказанные о его герое:

«...не мог он ямба от хорея, как мы ни бились, отличить». Отличие ямба от хорея состоит в различных расположениях ударных слогов стиха. Ямб - стихотворный метр с ударениями на чётных слогах стиха, то есть ударными слогами являются 2-й, 4-й, 6-й, 8-й и так далее слоги. Номера ударных слогов образуют арифметическую прогрессию с первым членом 2 и с разностью, равной двум: 2;4;6;8;... Хорей – стихотворный размер с ударением на нечётных слогах стиха. Номера ударных слогов также образуют арифметическую прогрессию, но её первый член равен единице, а разность по-прежнему равна двум: 1;3;5;7;....