ГБПОУ ВО «ВЮТ»

# Интегральное исчисление

Преподаватель математики:
Будаева А.Б

Воронеж-2015

# Интегральное исчисление

***Цель:*** рассмотреть понятие первообразной функции, неопределенного и определенного интеграла, свойства неопределенного и определенного интеграла, формулу Ньютона-Лейбница. Ознакомиться с таблицей интегралов, понятием криволинейной трапеции и нахождением ее площади. Освоить навыки вычисления интеграла.

Развивать познавательный интерес, логическое мышление, внимание. Формировать потребности в приобретении знаний.

Воспитывать ответственность, самостоятельность, культуру общения и учебного труда.

***В результате проведения занятия студент должен:***

***Знать*** основные понятия: неопределенный интеграл, свойства неопределенного интеграла (таблица интегралов), определенный интеграл, свойства определенного интеграла.

***Уметь*** находить неопределенный и определенный интеграл.

# Интегральное исчисление

- Определенный интеграл
- Первообразная
- Неопределенный интеграл
- Свойства определенного интеграла
- Свойства неопределенного интеграла
- Приложения определенного интеграла
- Примеры
- Таблица основных интегралов

# Первообразная

*Задача дифференциального исчисления: по данной функции найти её производную.*

*Задача интегрального исчисления: найти функцию, зная её производную.*

- Функция F($x$) называется **первообразной** для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если для любого $x$ из этого промежутка справедливо равенство $\mathbf{F'(x)=f(x)}$.

## *Для всякой ли функции f(x) существует первообразная?*

**Теорема.**

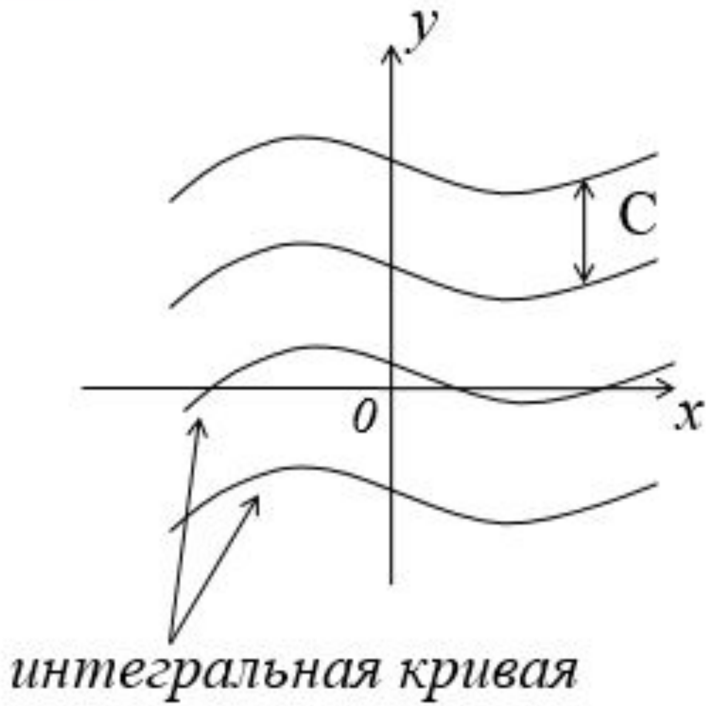
Если функция непрерывна на каком-нибудь промежутке, то она имеет на нём первообразную.

## Теорема.

Если функция F($x$) является первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, то множество всех первообразных этой функции имеет вид **F($x$)+C,** где $C \in R$.

***Геометрически:***

F($x$)+C представляет собой семейство кривых, получаемых из каждой из них параллельным переносом вдоль оси OY.



# Неопределённый интеграл

Множество всех первообразных F($x$)+C функции $f(x)$ на некотором промежутке называется **неопределённым интегралом** и обозначается символом $\int f(x)dx$, т.е

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C}$$

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C}$$

$f(x)$ - подынтегральная функция

$f(x)\,dx$ - подынтегральное выражение

$\boldsymbol{x}$ – переменная интегрирования

$\int$ - знак неопределённого интеграла

F($x$)+C – множество всех первообразных

C – постоянная интегрирования

Процесс нахождения первообразной функции называется **интегрированием,** а раздел математики- **интегральным исчислением.**

# Свойства неопределённого интеграла

1. Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx, \qquad \left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

2. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная, т.е

$$\int d\,F(x) = F(x) + C$$

# Свойства неопределённого интеграла

3. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен алгебраической сумме их интегралов, т.е

$$\int \left( f(x) \pm g(x) \right) dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е

$$\int a \cdot f(x)\, dx = a \cdot \int f(x)\, dx\,, \quad a \neq 0$$

# Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int x^a\,dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1,$ 1'. $\int dx = x + C.$

2. $\int \dfrac{dx}{x}\,dx = \ln|x| + C.$

3. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1,$ 3'. $\int e^x\,dx = e^x + C.$

4. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C.$

# Таблица основных неопределенных интегралов

7. $$\int \frac{dx}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C.$$

8. $$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$$

9. $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0.$$

10. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$$

11. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + b}\right| + C.$$

**Пример 1.** $\int (3x^5 + 4\cos x - 2x + 1)dx =$

Интеграл суммы выражений равен сумме интегралов этих выражений

Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла

$$\int 3x^5 dx + \int 4cosxdx - \int 2xdx + \int 1dx =$$

$$3\int x^5 dx + 4\int cosxdx - 2\int xdx + 1\int dx =$$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} +$

$\int cosxdx = sinx +$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} +$

$\int dx = x + c$

$$\frac{3x^{5+1}}{5+1} + 4sinx - \frac{2x^2}{2} + x + C \Rightarrow \frac{1}{2}x^6 + 4sinx - x^2 + x + C$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\left(2x^{4}+3\sin x-5e^{x}\right)dx$

$$\int\left(2x^{4}+3\sin x-5e^{x}\right)dx=\int 2x^{4}dx+\int 3\sin x\,dx-\int 5e^{x}dx=$$

$$=2\cdot\int x^{4}dx+3\cdot\int\sin x\,dx-5\cdot\int e^{x}dx=2\cdot\frac{x^{4+1}}{4+1}+C_{1}+3\cdot\left(-\cos x\right)+C_{2}-5\cdot e^{x}+C_{3}=$$

$$=\frac{2}{5}x^{5}-3\cos x-5e^{x}+C,\qquad C=C_{1}+C_{2}+C_{3}$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \frac{2x\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$

$$\int \frac{2x\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx = 2\cdot\int x\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}dx = 2\cdot\int x^{\frac{7}{6}}dx =$$

$$= 2\cdot\frac{x^{\frac{13}{6}}}{\frac{13}{6}} + C = \frac{12}{13}\cdot\sqrt[6]{x^{13}} + C = \frac{12}{13}\cdot x^2\cdot\sqrt[6]{x} + C$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \frac{2+x^4}{x}dx$

$$\int \frac{2+x^4}{x}dx = \int \left(\frac{2}{x}+\frac{x^4}{x}\right)dx = \int \frac{2}{x}dx + \int x^3 dx =$$

$$= 2\cdot\int \frac{dx}{x} + \int x^3 dx = 2\cdot\ln|x| + \frac{x^4}{4} + C$$

**Пример 5.** Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx =$$

$$= \int \left( \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \right) dx = \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \tan x - \cot x + C$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int 3^x \cdot 4^{2x}\,dx$

$$\int 3^x \cdot 4^{2x}\,dx = \int 3^x \cdot 16^x\,dx = \int 48^x\,dx = \frac{48^x}{\ln 48} + C$$

# Определенный интеграл

Выражение вида $\boxed{\int_a^b f(x)dx}$ называется определенным интегралом

Числа *a* и *b* называются соответственно ***нижними и верхними пределами интегрирования***,

***f(x)*** – подынтегральной функцией;

***f(x)dx***- подынтегральным выражением,

***x***- переменной интегрирования,

***отрезок [a;b]*** – областью (отрезком) интегрирования.

# Свойства определенного интеграла

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, c - const$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

# Связь между определенным интегралом и первообразной (Формула Ньютона - Лейбница)

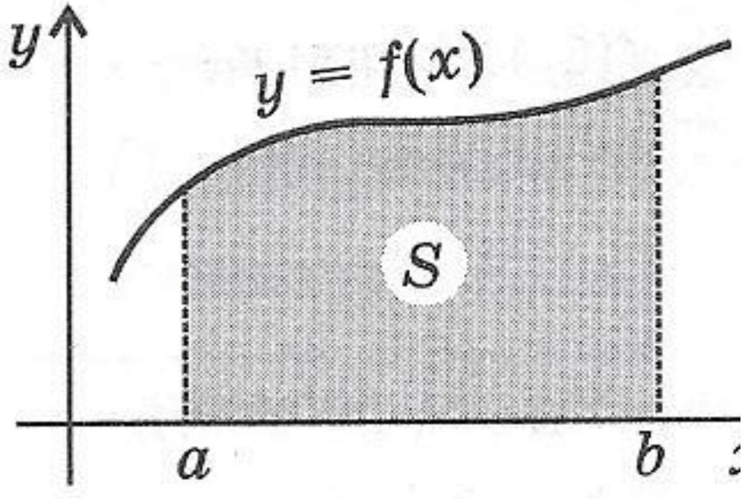
- Для непрерывной функции

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\,\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

где F(x) – первообразная функции f(x).

# Геометрический смысл определенного интеграла

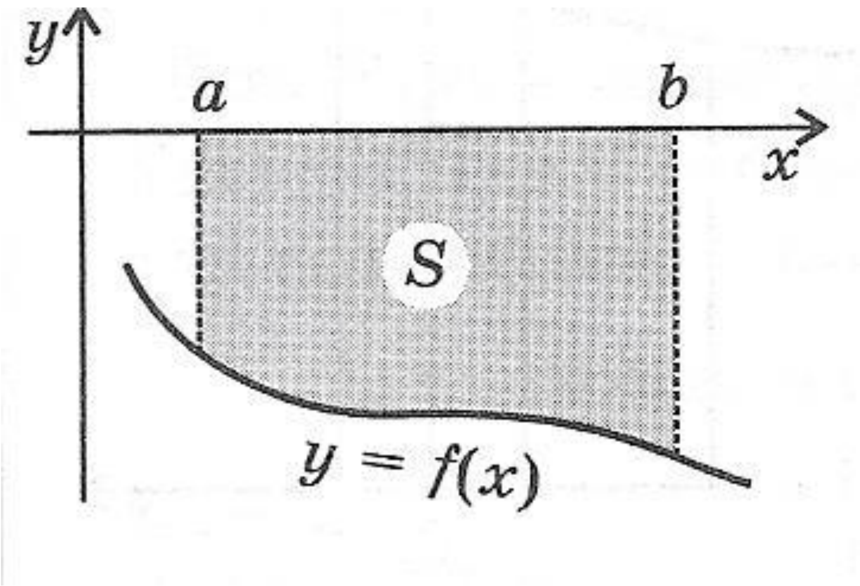
- Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной положительной на промежутке [a;b] функции f(x), осью x и прямыми x=a и x=b:




$$S = \int_a^b f(x)dx$$

# Геометрический смысл определенного интеграла

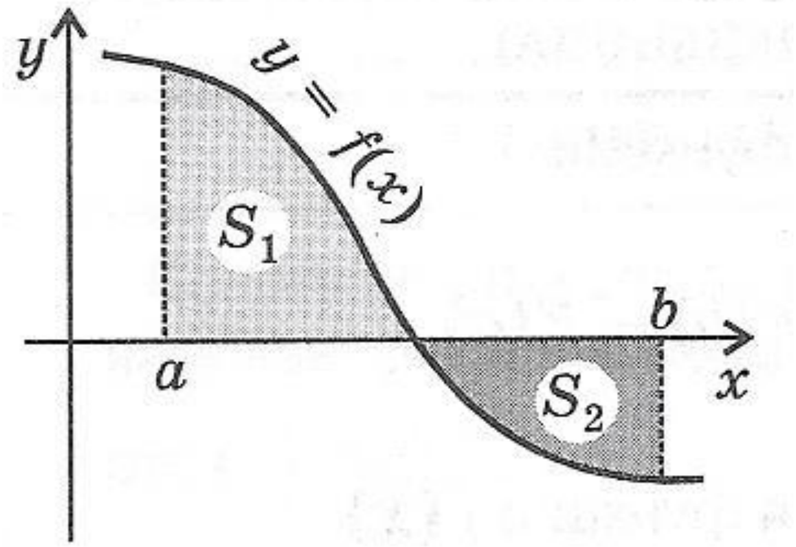
- Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной отрицательной на промежутке [a;b] функции f(x), осью x и прямыми x=a и x=b:




$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

# Геометрический смысл определенного интеграла

- **Замечание**: Если функция изменяет знак на промежутке [a;b] , то




$$S_1 - S_2 = \int_a^b f(x)dx$$

# Вычисление площадей плоских фигур

**Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x-2$ и $y=x^2-4x+2$**

1. $y=x^2-4x+2$, $x_в=2$, $y_в=-2$

2. $y=x-2$: $x=0$, $y=-2$; $x=2$, $y=0$

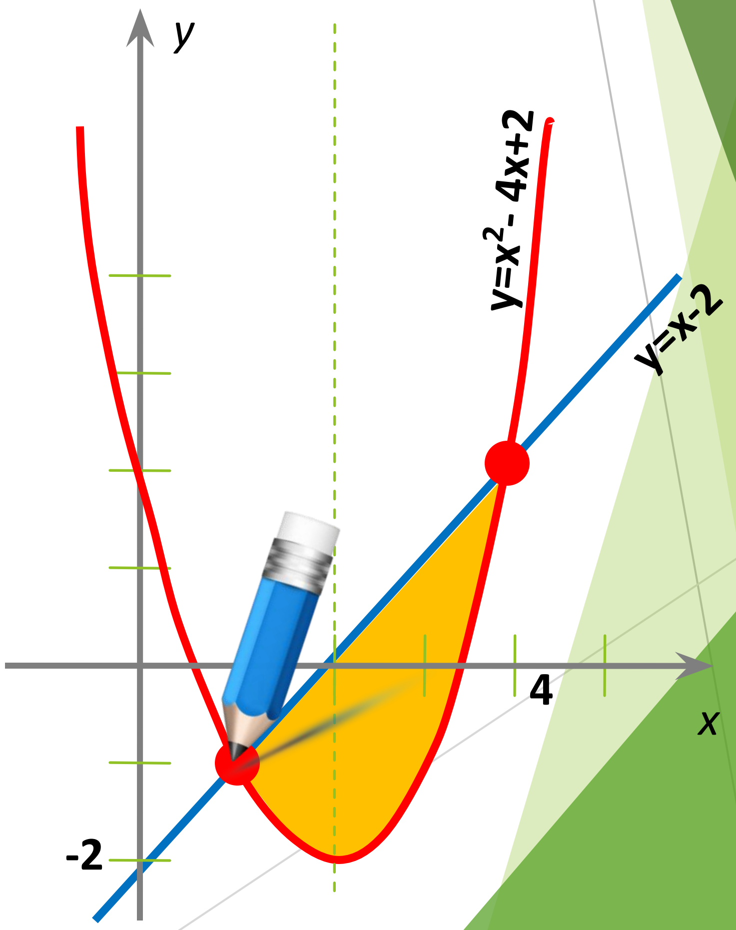
3. Абсциссы точек пересечения:

$$x^2-4x+2=x-2$$

$$x_1=1,\ x_2=4$$

4. $$S=\int_1^4((x-2)-(x^2-4x+2))dx=$$

$$=\int_1^4(5x-x^2-4)dx=\left(\frac{5x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-4x\right)\Big|_1^4=4{,}5$$

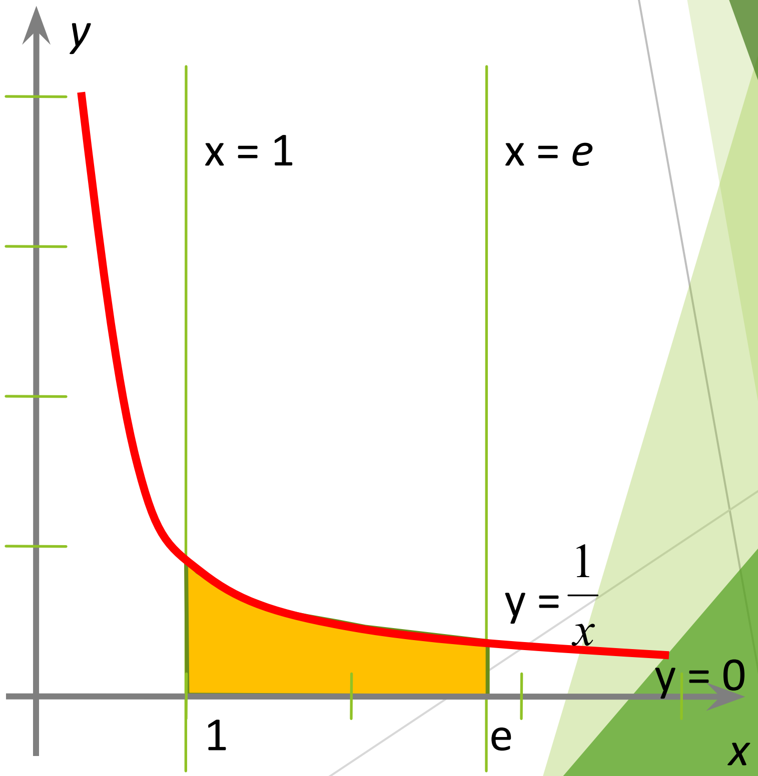



**Ответ: *S=4,5***

# Вычисление площади криволинейной трапеции

**Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:** $y = 0$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = e$.

$$S = \int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$




**Ответ:** ***S = 1***

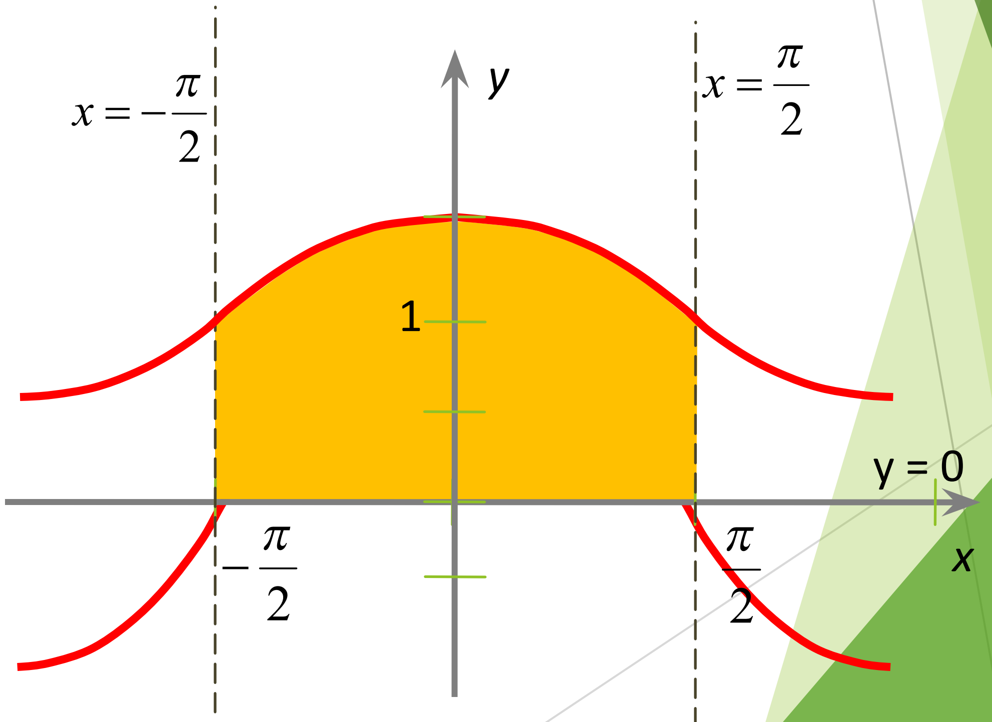
# Вычисление площади криволинейной трапеции

**Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:**

$$y = 1 + \frac{1}{2}\cos x, y = 0, x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}$$

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \frac{1}{2}\cos x)dx =$$

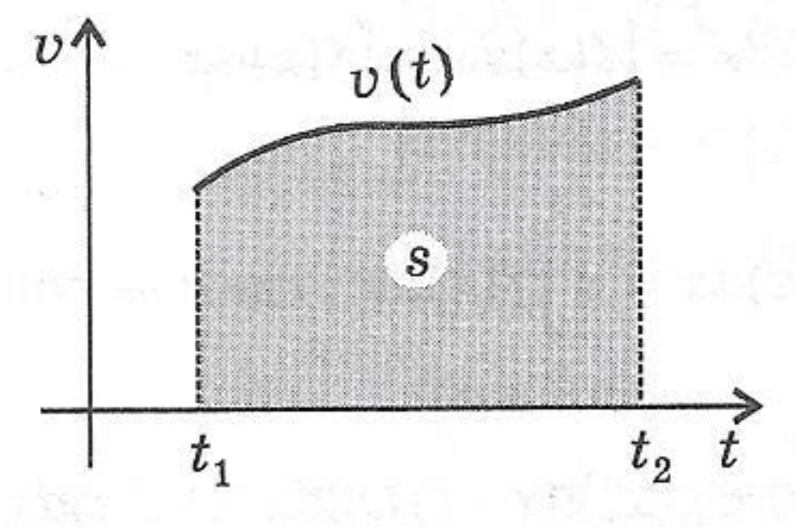
$$= (x + \frac{1}{2}\sin x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi + 1$$




**Ответ:** ***S = π+1***

# Физический смысл определенного интеграла

- При прямолинейном движении перемещение s численно равно площади криволинейной трапеции под графиком зависимости скорости v от времени t:

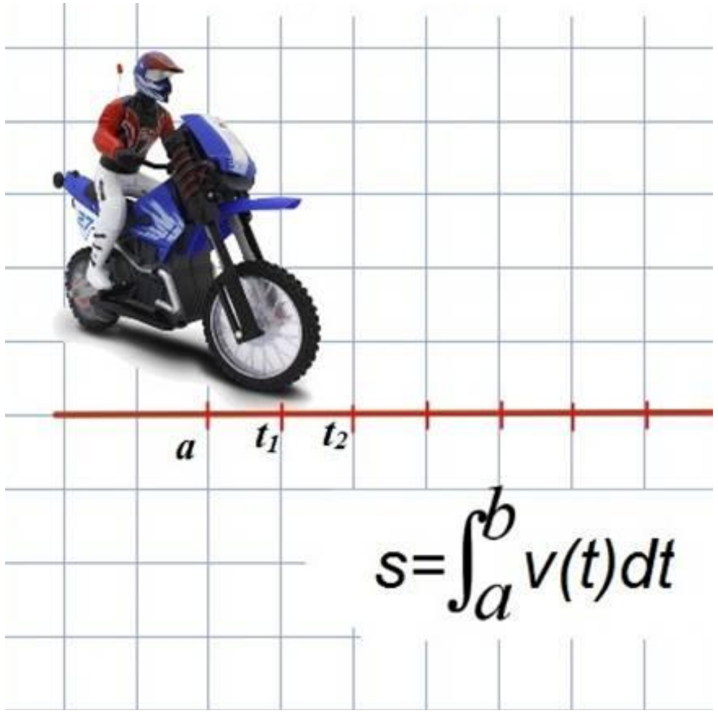



$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

# Физический смысл определенного интеграла

**Материальная точка движется по прямой со скоростью, определяемой формулой *v* = *$3t^2$-4t+1*, *(время измеряется в секундах, скорость – в сантиметрах в секунду).***

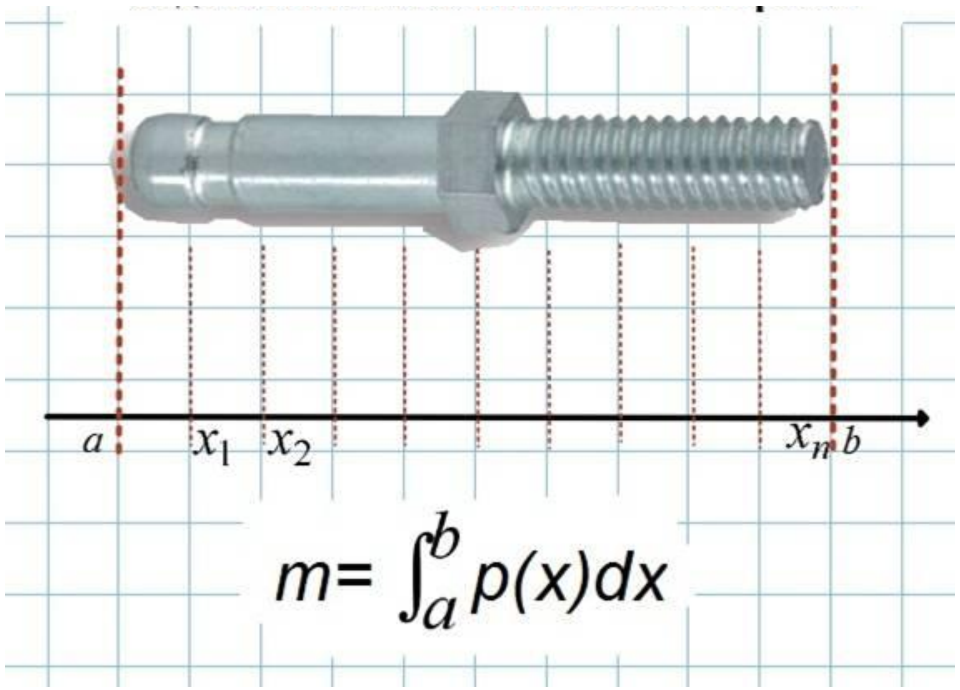
**Какой путь пройдёт точка за 3 секунды,**
**считая от начала движения (t=0)?**




**Ответ:** *12см*

# Физический смысл определенного интеграла

**Дан прямолинейный неоднородный стержень *[0;6]*, его плотность в точке *x* определяется по формуле $p(x) = x^2+x+1$. Найдите массу стержня.**




**Ответ:** ***96***

# Основные источники

1. Алимов, Ш.А. Алгебра и начала математического анализа: учеб. для образовательных учреждений: базовый уровень / [Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др.]. – М.: Просвещение, 2011. – 464 с.
2. Атанасян, Л.С. Геометрия: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.]. – М.: Просвещение, 2011. – 384 с.
3. Башмаков, М.И. Математика: учебник / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2013. – 400, с.
4. Богомолов, Н.В. Математика: учебник для бакалавров / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Издатльство Юрайт, 2013. – 396 с.
6. Колмогоров, А.Н. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10-11 кл. общеобрзоват. Учреждений / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов и др. – М.: Просвещение, 2013. – 365 с.

**Интернет-ресурсы**

www.interneturok.ru
www.researcher.ru
www.schools.keldysh.ru/labmro
www.urokimatematiki.ru
www.1september.ru
www.pedsovet.org