Параметры

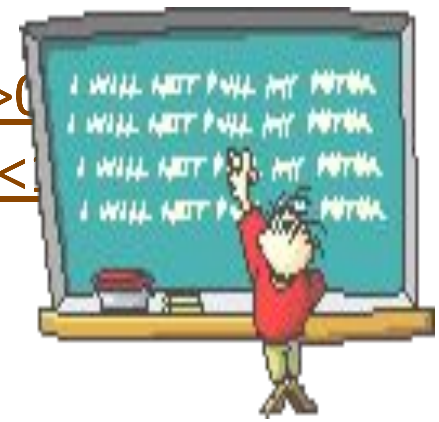
Автор- учитель математики Самсонова И. А.

Задание 1.

При каких значениях *k* верно следующее утверждение:

“неравенство $(k-1)x^2+(2k-3)x+k-3>0$

выполняется хотя бы при одном $x<$



Задание 2.

Найти все значения параметра а, при каждом из которых корни квадратного трёхчлена x^2+ax+1 различны и лежат на отрезке $[0;2]$?

Задание 3.

Найти все значения параметра, при каждом из которых уравнение $4^x-a\cdot 2^{x+1}-3a^2+4a=0$ имеет единственный корень.

При каких значениях *k* верно следующее утверждение:

"неравенство $(k-1)x^2+(2k-3)x+k-3>0$

выполняется хотя бы при одном $x<1$?"

Алгоритм решения:

исследуем изменение параметра k

$k-1$

$k-1>0$

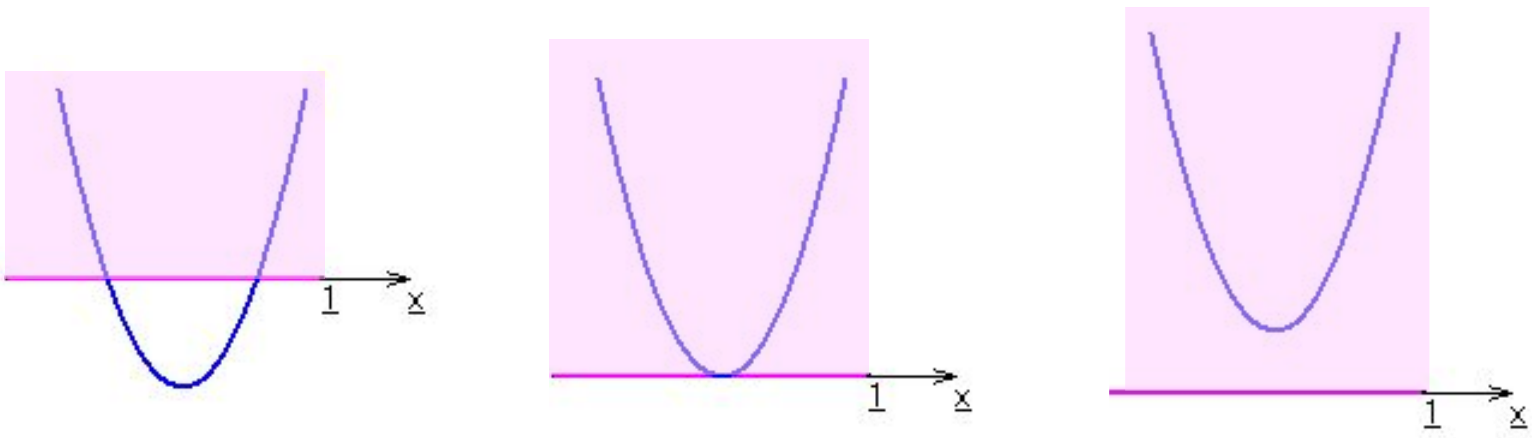
$k-1=0$

$k-1<0$

1 случай

Если $k-1>0$, т.е. $k>1$,
то ветви квадратичной функции
$f(x)=(k-1)x^2+(2k-3)x+k-3$ направлены вверх.

Изобразим на координатной плоскости графики функций в зависимости от количества точек пересечения с осью ОХ.



т. к. решаем неравенство $(k-1)x^2+(2k-3)x+k-3>0$, то покажем решение в верхней полуплоскости.

Вывод: при $k>1$ всегда найдутся значения $x<1$, при которых выполняется данное неравенство.

2 случай. $(k-1)x^2+(2k-3)x+k-3>0$

если $k-1=0$, то $k=1$

Данное неравенство

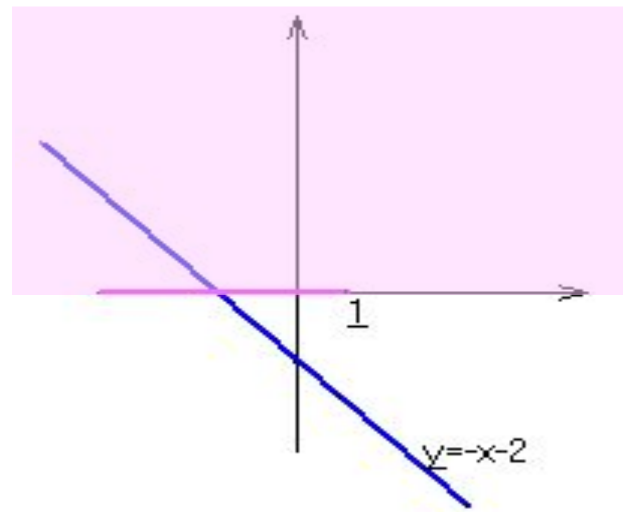
$(k-1)x^2+(2k-3)x+k-3>0$

примет вид:

$-x-2>0,$

$-x>2,$

$x<-2$



Рассматриваемая функция будет линейной $y=-x-2$, графиком является прямая условие $-x-2>0$

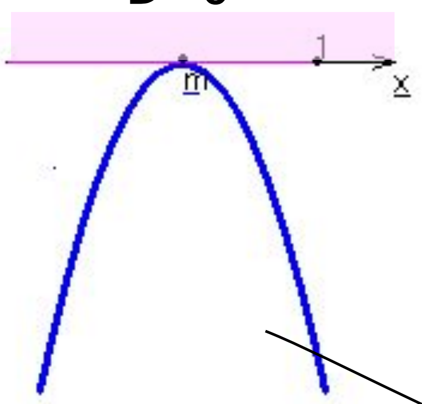
Покажем решение на координатной плоскости.
выполняется в верхней полуплоскости

Вывод: при $k=1$ найдутся значения $x<1$, при которых выполняется данное неравенство.

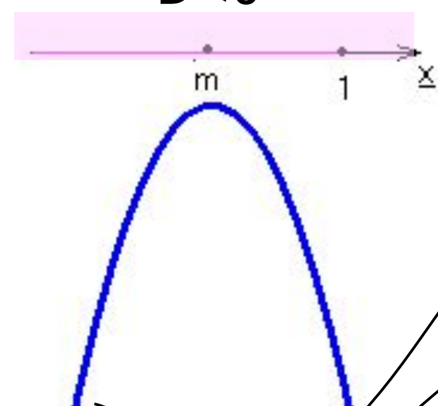
3 случай Если $k-1<0$, т.е. $k<1$, то ветви квадратичной функции $f(x)=(k-1)x^2+(2k-3)x+k-3$ направлены вниз.

Изобразим на координатной плоскости графики функций зависимости от количества точек пересечения с осью ОХ.

D=0

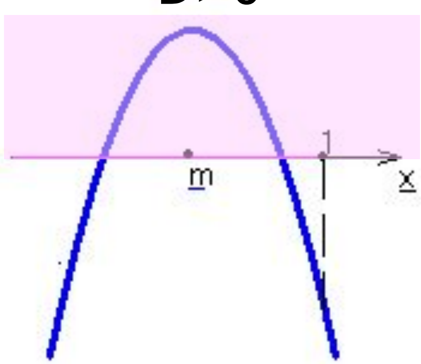


D<0



Ни одно из значений k, удовлетворяющих условию $k<1$ не отвечает неравенству: $(k-1)x^2+(2k-3)x+k-3>0$

D>0

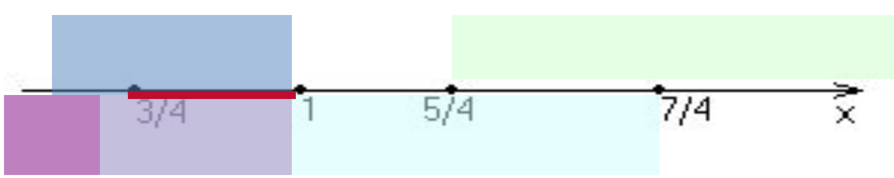


Итак, $\begin{cases} D>0 \\ k-1<0 \\ f(1) \\ m>1 \end{cases}$ $\begin{cases} (2k-3)^2-4(k-3)(k-1)>0 \\ k<1 \\ f(1)=k-1+2k+2k-3+k-3<0 \\ \dfrac{3-2k}{2(k-1)}<1 \end{cases}$

Решим систему неравенств

$$\begin{cases} (2k-3)^2-4(k-3)(k-1)>0, \\ k<1, \\ f(1)=k-1+2k+2k-3+k-3<0, \\ \dfrac{3-2k}{2(k-1)}<1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k-3>0, \\ k<1, \\ 4k<7, \\ \dfrac{-4k+5}{2(k-1)}<0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k>\dfrac{3}{4}, \\ k<1, \\ k<\dfrac{7}{4}, \\ \left[\begin{array}{l} k<1, \\ k>\dfrac{5}{4}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Отметим решение системы неравенств на координатной прямой:



Вывод: при 3/4<k<1 найдутся значения, при которых выполняется данное неравенство.

Объединяя найденные значения k, делаем вывод:

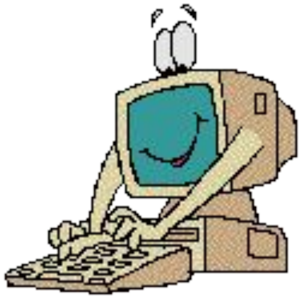
- Утверждение

“неравенство $(k-1)x^2+(2k-3)x+k-3>0$ выполняется хотя бы при одном $x<1$?” верно :

1. при $k>1$
2. при $k=1$ $\Longleftrightarrow$ $k>3/4$.
3. при $3/4<k<1$

Ответ: при $k>3/4$
неравенство $(k-1)x^2+(2k-3)x+k-3>0$ выполняется хотя бы при одном $x<1$.

Найти все значения параметра a, при каждом из которых корни квадратного трёхчлена $x^2 + ax + 1$ различны и лежат на отрезке $[0;2]$



Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + ax + 1$

Оценим значения:

D

Положение вершины параболы

Коэффициен
т
при x^2

для существования различных корней необходимо выполнение условия $D>0$
т.е. $a^2-4>0$ или
$a<-2$ и $a>2$,

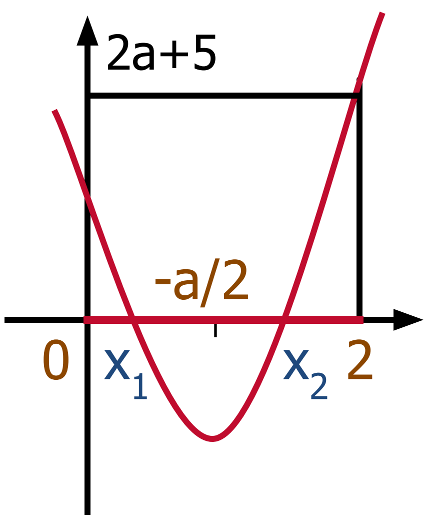
внутри отрезка $[0;2]$ т. е. $0<-a/2<2$

положителен, то $f(2)= 2a+5>0$

Итак, искомое значение параметра а должно удовлетворять системе неравенств:

$$\begin{cases} a^2 - 4 > 0 \\ 0 < -\dfrac{a}{2} < 2 \\ 2a + 5 \geq 0 \end{cases}$$

Решая данную систему неравенств находим искомое множество значений параметра $-\frac{5}{2} \leq a < -2$



если параметр удовлетворяет данным условиям, то заданный квадратный трёхчлен $x^2 + ax + 1$ имеет различные корни, принадлежащие отрезку [0;2].

Ответ: корни квадратного трёхчлена $x^2 + ax + 1$ различны и лежат на отрезке [0;2] при $-\frac{5}{2} \leq a < -2$

Найти все значения параметра, при каждом из которых уравнение $4^x - a \bullet 2^{x+1} - 3a^2 + 4a = 0$ имеет единственный корень.

- Рассмотрим функцию $y = 2^x$
  $D(y) = (0;\infty)$, возрастающая, каждое свое значение принимает один раз.
- Тогда $y^2 - 2ay - 3a^2 + 4a = 0$
- Найдём все значения а при которых уравнение
  $y^2 - 2ay - 3a^2 + 4a = 0$
  Имеет единственный положительный корень
- Вычислим значений D для квадратного трёхчлена
  $f(y) = y^2 - 2ay - 3a^2 + 4a$, $D = 16a(a-1)$
- Оценим значение D

$D = 0$ ⟷ $a = 0$ ⟷ $y = 0$ не принадлежит $(0;\infty)$,

$D = 0$ ⟷ $a = 1$ ⟷ $y = 1$ принадлежит $(0;\infty)$,

$D<0$ ⟷ Нет действительных корней

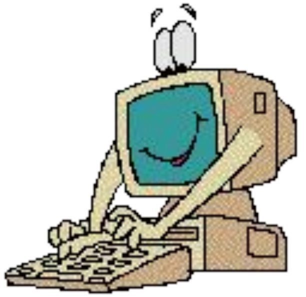
$D>0$ ⟷ $f(y)= y^2-2ay-3a^2+4a$ имеет 2 различных корня y_1, y_2

Есть ли среди них корни равные 0?	Если y_1, y_2 не равны 0?
Да! При условии $3a^2+4a=0$ $a=0$, $a=4/3$ не удовл. тогда $y= 8/3$	Тогда чтобы у квадратного трёхчлена $f(y)= y^2-2ay-3a^2+4a$ существовал 1 корень необходимо по теореме Виета чтобы $y_1 \bullet y_2<0$, т.е. $-3a^2+4a<0$, $3a^2-4a>0$, $a(3a-4)>0$ $a<0$, $a>4/3$.

Вывод: $f(y)= y^2-2ay-3a^2+4a$ имеет один положительный корень при $a<0$, $a=1$, $a=4/3$, $a> 4/3$

Ответ: $a<0$, $a=1$, $a>4/3$, $a=4/3$

При оформлении использовались материалы:



- М.К.Потапов. Уравнения и неравенства с параметрами.
- Крамор В.С. Примеры с параметрами и их решение. Пособие для поступающих в вузы.
- Изображения из коллекции картинок в Интернете.
- П.И. Горнштейн. Задачи с параметрами