



Параметры



Задание 1.

При каких значениях k верно следующее утверждение:

“неравенство $(k-1)x^2+(2k-3)x+k-3>0$ выполняется хотя бы при одном $x<0$ ”



Задание 2.

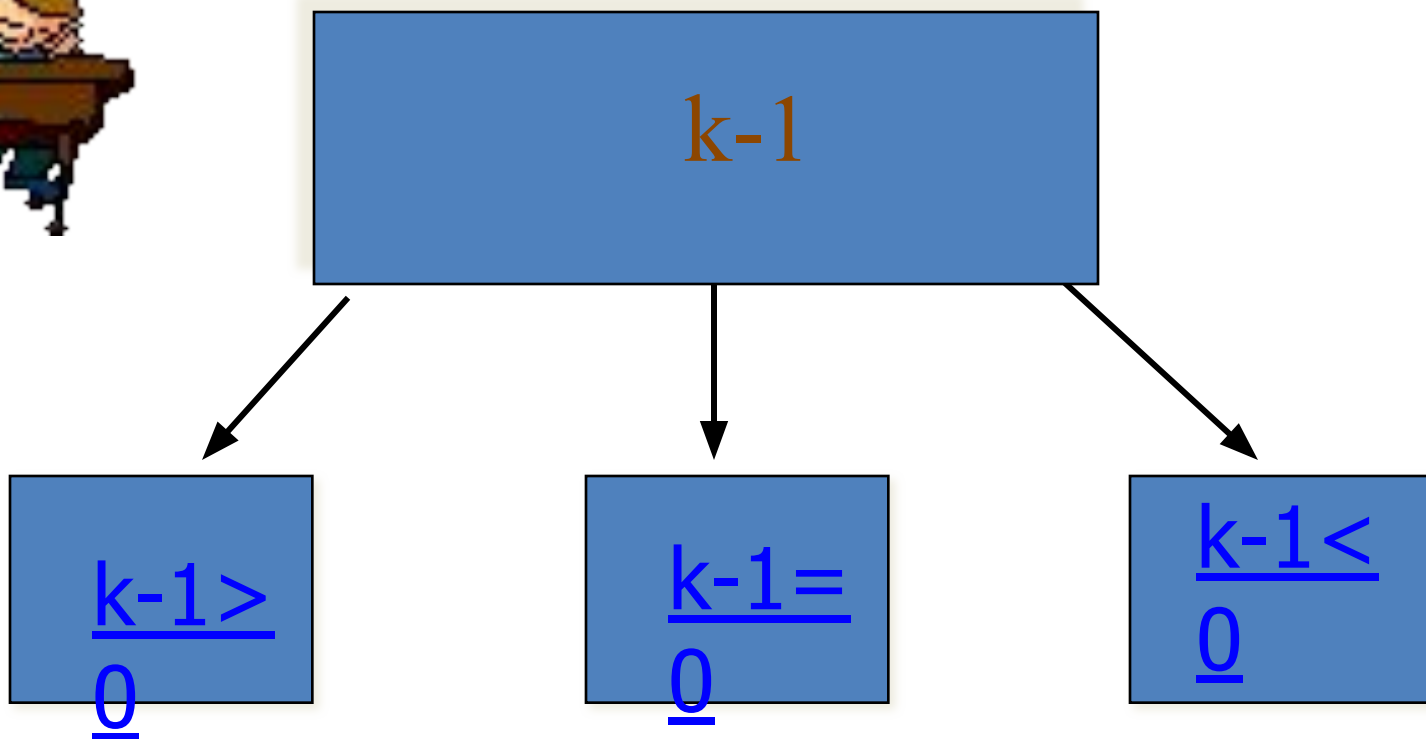
Найти все значения параметра a , при каждом из которых корни квадратного трёхчлена $x^2 + ax + 1$ различны и лежат на отрезке $[0;2]$?

Задание 3.

Найти все значения параметра, при каждом из которых уравнение $4^x - a \cdot 2^{x+1} - 3a^2 + 4a = 0$ имеет единственный корень.

При каких значениях k верно следующее утверждение:
“неравенство $(k-1)x^2+(2k-3)x+k-3>0$
выполняется хотя бы при одном $x<1$?”

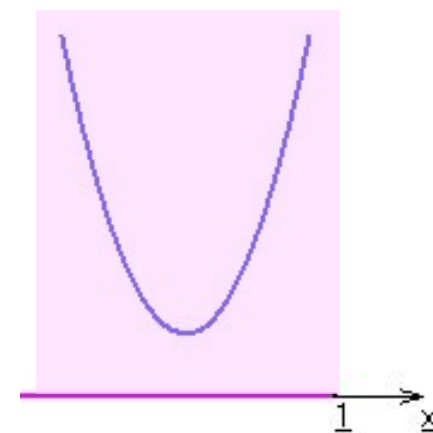
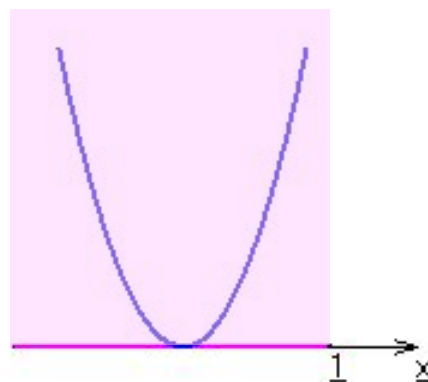
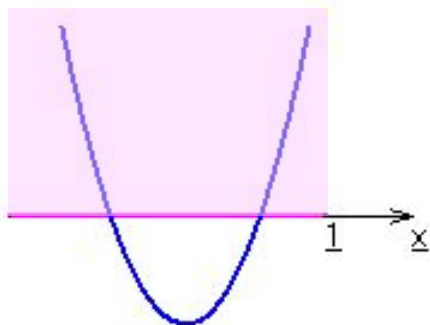
Алгоритм решения:
исследуем изменение параметра k



1 случай Если $k-1 > 0$, т.е. $k > 1$,
то ветви квадратичной функции
 $f(x) = (k-1)x^2 + (2k-3)x + k-3$ направлены вверх.



Изобразим на координатной плоскости графики функций в зависимости от количества точек пересечения с осью Ox .



т. к. решаем неравенство $(k-1)x^2 + (2k-3)x + k-3 > 0$, то покажем решение в верхней полуплоскости.



Вывод: при $k > 1$ всегда найдутся значения $x < 1$, при которых выполняется данное неравенство.



2 случай.

$$(k-1)x^2+(2k-3)x+k-3>0$$

если $k-1=0$, то $k=1$



Данное неравенство

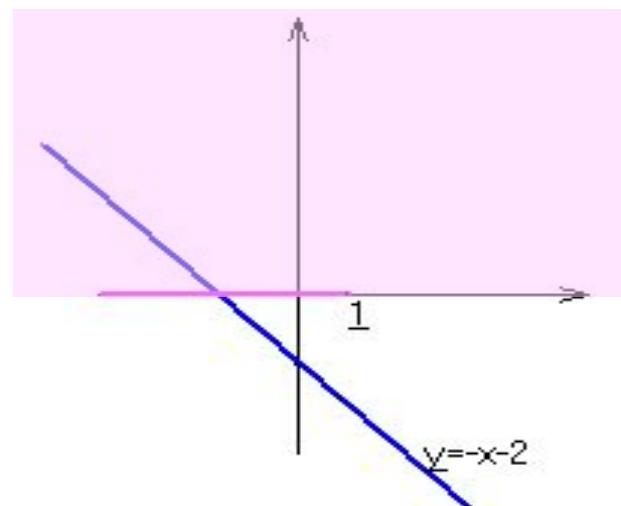
$$(k-1)x^2+(2k-3)x+k-3>0$$

примет вид:

$$-x-2>0,$$

$$-x>2,$$

$$x<-2$$



Рассматриваемая функция будет линейной $y=-x-2$, графиком является прямая условие $-x-2>0$

Покажем решение на координатной плоскости.
выполняется в верхней полуплоскости



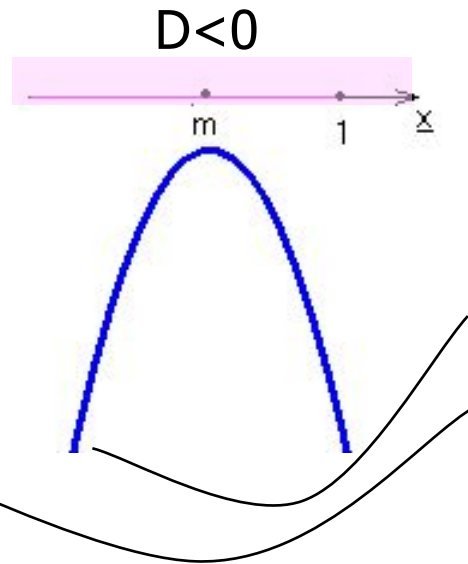
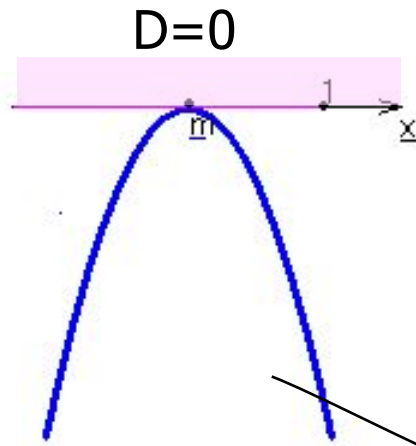
Вывод: при $k=1$ найдутся значения $x<1$, при которых выполняется данное неравенство.



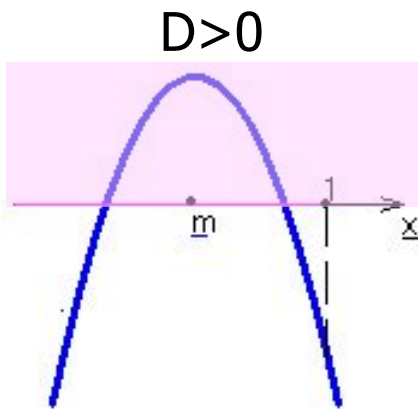
Если $k-1 < 0$, т.е. $k < 1$, то ветви квадратичной функции
 3 случай функции $f(x) = (k-1)x^2 + (2k-3)x + k-3$ направлены вниз.



Изобразим на координатной плоскости графики функций зависимости от количества точек пересечения с осью Ox .



Ни одно из значений k , удовлетворяющих условию $k < 1$ не отвечает неравенству:
 $(k-1)x^2 + (2k-3)x + k-3 > 0$



Итак,

$$\begin{cases} D > 0 \\ k - 1 < 0 \\ f(1) \\ m > 1 \end{cases} \begin{cases} (2k-3)^2 - 4(k-3)(k-1) > 0 \\ k < 1 \\ f(1) = k-1 + 2k + 2k-3 + k-3 < 0 \\ \frac{3-2k}{2(k-1)} < 1 \end{cases}$$

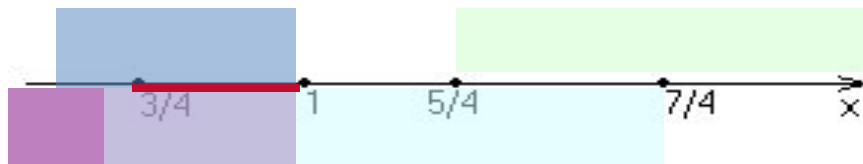


Решим систему неравенств



$$\left\{ \begin{array}{l} (2k-3)^2 - 4(k-3)(k-1) > 0, \\ k < 1, \\ f(1) = k-1 + 2k + 2k - 3 + k - 3 < 0, \\ \frac{3-2k}{2(k-1)} < 1, \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} 4k-3 > 0, \\ k < 1, \\ 4k < 7, \\ \frac{-4k+5}{2(k-1)} < 0, \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} k > \frac{3}{4}, \\ k < 1, \\ k < \frac{7}{4}, \\ \left[\begin{array}{l} k < 1, \\ k > \frac{5}{4}. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Отметим решение системы неравенств на координатной прямой:



Вывод: при $\frac{3}{4} < k < 1$ найдутся значения, при которых выполняется данное неравенство.



Объединяя найденные значения k ,
делаем вывод:



- Утверждение

“неравенство $(k-1)x^2+(2k-3)x+k-3>0$ выполняется хотя бы
при одном $x<1$?” верно :

1. при $k>1$
2. при $k=1$ \longleftrightarrow $k>3/4$.
3. при $3/4<k<1$

Ответ: при $k > 3/4$
неравенство $(k-1)x^2+(2k-3)x+k-3>0$
выполняется хотя бы при одном $x<1$.



Молодец!
Посмотри ещё один примерчик!



Найти все значения параметра a , при каждом из которых корни квадратного трёхчлена $x^2 + ax + 1$ различны и лежат на отрезке $[0; 2]$

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + ax + 1$



Оценим значения:

для существования различных корней необходимо выполнение условия $D > 0$
т.е. $a^2 - 4 > 0$ или $a < -2$ и $a > 2$,

D

Положение
вершины
параболы

Коэффициент
 a
при x^2

внутри отрезка $[0; 2]$ т.
е. $0 < -a/2 < 2$

положителен, то
 $f(2) = 2a + 5 > 0$

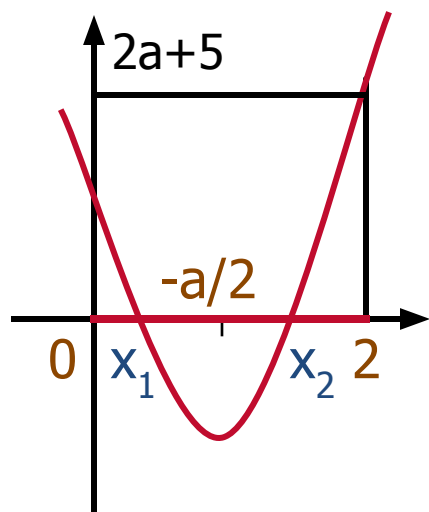


Итак, искомое значение параметра a должно удовлетворять системе неравенств:

$$\begin{cases} a^2 - 4 > 0 \\ 0 < -\frac{a}{2} < 2 \\ 2a + 5 \geq 0 \end{cases}$$



Решая данную систему неравенств находим искомое множество значений параметра $-\frac{5}{2} \leq a < -2$



если параметр удовлетворяет данным условиям, то заданный квадратный трёхчлен $x^2 + ax + 1$ имеет различные корни, принадлежащие отрезку $[0; 2]$.



Ответ:

корни квадратного трёхчлена $x^2 + ax + 1$ различны и лежат на отрезке $[0; 2]$ при

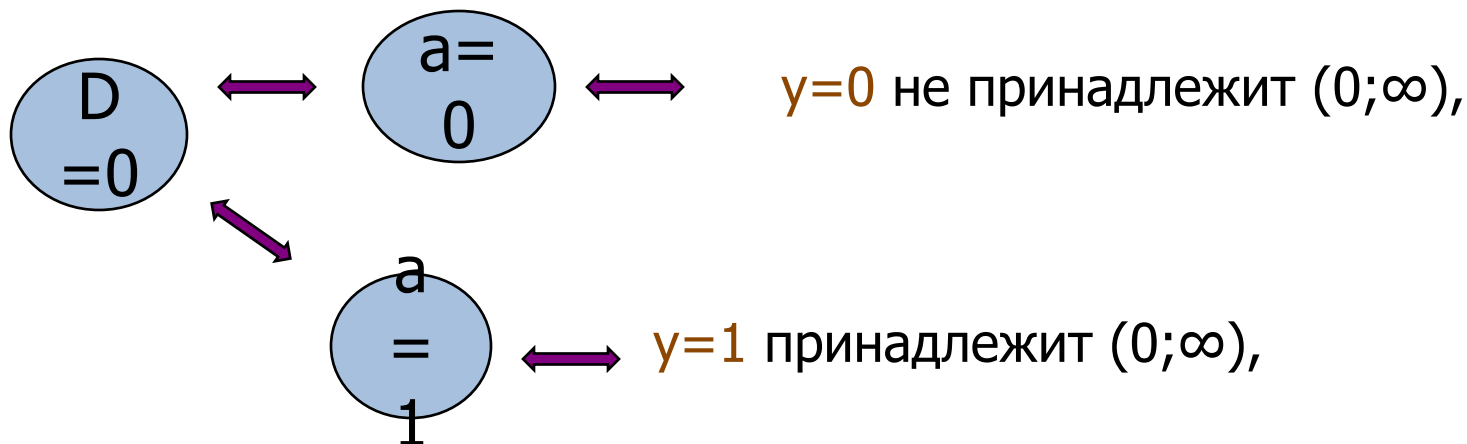
$$-\frac{5}{2} \leq a < -2$$



Найти все значения параметра, при каждом из которых уравнение $4^x - a \cdot 2^{x+1} - 3a^2 + 4a = 0$ имеет единственный корень.



- Рассмотрим функцию $y = 2^x$
 $D(y) = (0; \infty)$, возрастающая, каждое свое значение принимает один раз.
- Тогда $y^2 - 2ay - 3a^2 + 4a = 0$
- Найдём все значения a при которых уравнение $y^2 - 2ay - 3a^2 + 4a = 0$
- Вместе с условием D для квадратного трёхчлена $f(y) = y^2 - 2ay - 3a^2 + 4a$, $D = 16a(a-1)$
- Оценим значение D



$$D < 0$$



Нет действительных корней

$$D > 0$$



$f(y) = y^2 - 2ay - 3a^2 + 4a$
имеет 2 различных корня y_1, y_2



Есть ли среди них корни равные 0?

Да! При условии
 $3a^2 + 4a = 0$
 $a = 0, a = 4/3$
не удовл. тогда $y = 8/3$

Если y_1, y_2 не равны 0?

Тогда чтобы у квадратного трёхчлена $f(y) = y^2 - 2ay - 3a^2 + 4a$ существовал 1 корень необходимо по теореме Виета чтобы $y_1 \cdot y_2 < 0$, т.е.
 $-3a^2 + 4a < 0, 3a^2 - 4a > 0, a(3a - 4) > 0$
 $a < 0, a > 4/3$.

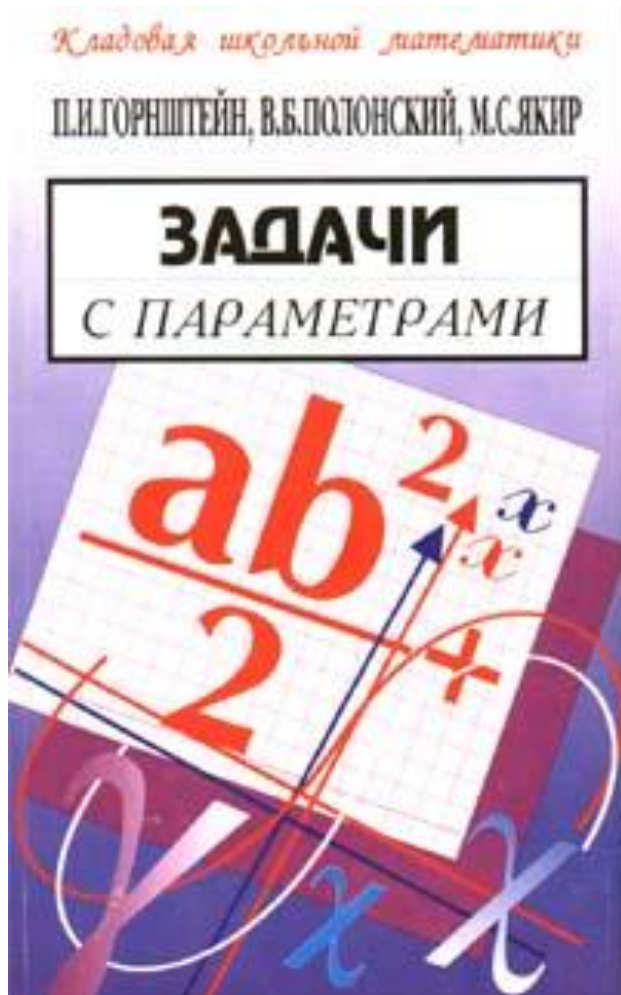


Вывод: $f(y) = y^2 - 2ay - 3a^2 + 4a$ имеет один положительный корень при $a < 0, a = 1, a = 4/3, a > 4/3$

Ответ: $a < 0, a = 1, a > 4/3, a = 4/3$



При оформлении использовались материалы:



- М.К.Потапов. Уравнения и неравенства с параметрами.
- Крамор В.С. Примеры с параметрами и их решение. Пособие для поступающих в вузы.
- Изображения из коллекции картинок в Интернете.
- П.И. Горнштейн. Задачи с параметрами