

*** Общие методы решения
тригонометрических
уравнений**

*** Среди уравнений, данных на слайде, выбрать те, которые решаются**

- * Заменой переменной;
- * Разложением на множители;
- * Делением на старшую степень синуса или косинуса, т. е. как однородные;
- * Понижением степени;
- * С помощью формул суммы или разности;
- * Методом вспомогательного аргумента.
- * С помощью формул произведения;

$$1. 2\sin^2 x - 5\cos^2 x = 3\sin x \cos x$$

$$2. \sin^2 x + \cos^2 2x = 3/2.$$

$$3. \cos x \cdot \sin 7x = \cos 3x \cdot \sin 5x,$$

$$4. \sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0,$$

$$5. \sqrt{2} \cos x - \sin x = 0,$$

$$6. \sin x + \sin 3x = \sin 5x - \sin x,$$

$$7. \sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x = 0,$$

$$8. 3\sin^2 x + 2\cos^2 x + 2\cos x = 0,$$

$$9. \sin^2 x - \sqrt{3}/3 \sin 2x = \cos^2 x,$$

$$10. \sin x + \cos x = 1, \quad 3$$

$$11. \sin x + \sin^2 x + \cos x = 0$$

Способ	Номер уравнения
Заменой переменной	4;8
Делением на старшую степень синуса или косинуса, т.е. как однородные	1;5;9
Понижением степени	2
С помощью формул суммы или разности	6;7
Методом вспомогательного угла (аргумента)	10
С помощью формул произведения	3
Методом универсальной подстановки	10
Разложение на множители	11

Уравнения	Способы							
	1	2	3	4	5	6	7	8
$3\sin^2x + \cos^2x = 1 - \sin x \cos x$		+						+
$3\sin x + 5\cos x = 2$					+		+	
$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$				+				+
$3\sin^2x + \cos x = 1$	+							
Вариант №2								
$4\cos^2x - \sin x \cos x - 1 = 0$		+						
$6\sin x - \cos x = 1$					+		+	
$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$				+				+
$4\cos^2x - \sin x - 1 = 0$	+							



Домашнее задание.

* Выясните при каких значениях параметра a уравнения имеют решения:

$$* \sin x + 2 \cos x = a,$$

$$* \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = a,$$

$$* \sin 2x = -3a^2 + 6a - 4$$



Домашнее задание.

- * При каких значениях параметра a уравнения не имеют решений.
- * $2\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg} x + a = 0,$
- * $\sin^2 x - 2(a - 3) \sin x + a^2 - 6a + 5 = 0$

* Приведением к квадратному и заменой переменной решаются уравнения 4, 8.

$$\underline{* \sin^2 x - 2 \sin x - 3 = 0}$$

пусть $\sin x = t$,

тогда $t^2 + 2t - 3 = 0$,

где $t = -3; 1$.

Учитывая, что

$|\sin x| \leq 1$,

а $-3 < -1$,

имеем $\sin x = 1$,

$x = \pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

$$\underline{3 \sin^2 x + 2 \cos^2 x + 2 \cos x = 0}$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x,$$

значит,

$$3 - 3 \cos^2 x + 2 \cos^2 x + 2 \cos x = 0,$$

$$\cos^2 x - 2 \cos x - 3 = 0,$$

пусть $\cos x = t$,

$$\text{тогда } t^2 - 2t - 3 = 0,$$

где $t = 3; -1$

$3 > 1$, ЗНАЧИТ,

$$\cos x = -1,$$

$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

* Делением на старшую степень решаются уравнения 1, 5, 9.

* $2\sin^2 x - 5\cos^2 x = 3\sin x \cos x$

* Разделив каждое слагаемое на $\cos^2 x$, получим.

*
$$2\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 5 = 0,$$

* Пусть $\operatorname{tg} x = p$, тогда $2p^2 - 3p - 5 = 0$, где $p = 2,5; -1$,

* $\operatorname{tg} x = 2,5$, $x = \operatorname{arctg} 2,5 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

* $\operatorname{tg} x = -1$, $x = \pi/4 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

* Ответ: $\operatorname{arctg} 2,5 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\pi/4 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

* Делением на старшую степень
решаются уравнения 1, 5, 9.

* $\sqrt{2} \cos x - \sin x = 0$: $\cos x, \cos x \neq 0$,

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{2}, x = \operatorname{arctg} \sqrt{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

ответ: $\operatorname{arctg} \sqrt{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

* Делением на старшую степень
решаются уравнения 1, 5, 9.

* $\sin^2 x - \sqrt{3}/3 \sin 2x = \cos^2 x$ |: $\cos^2 x$,
 $\cos x \neq 0$

$$\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3}/3 \operatorname{tg} x - 1 = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}/6(1 \pm \sqrt{13}),$$

$$x = \operatorname{arctg} \sqrt{3}/6(1 \pm \sqrt{13}) + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

ответ: $\operatorname{arctg} \sqrt{3}/6(1 \pm \sqrt{13}) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

* Понижение степени используют при решении уравнения 2.

* $\sin^2 x + \cos^2 2x = 3/2$

$$\sin^2 x + \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = 3/2,$$

$$2 \sin^2 x + 1 + \cos 2x - 3 = 0,$$

* $2 - 2 \cos^2 x + 1 + \cos 2x - 3 = 0,$

$$2 \cos^2 x - \cos 2x = 0,$$

* $\cos x(2 \cos x - 1) = 0,$

* $\cos x = 0$ или $\cos x = 1/2$

* $x = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ или $x = \pm \pi/3 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

* Ответ: $\pm \pi/3 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

* С помощью формул суммы или разности решаются уравнения 6. 7.

* $\sin x + \sin 3x = \sin 5x - \sin x$

* $2 \sin 2x \cos x - 2 \sin 2x \cos 3x = 0,$

$\sin 2x (\cos x - \cos 3x) = 0,$

* $\sin^2 2x \sin x = 0,$

* $\sin 2x = 0$ или $\sin x = 0,$

* $X = \pi/2 n, n \in Z$ или $X = \pi n, n \in Z.$

* Объединив множества,

* получим, $X = \pi/2 n, n \in Z$

* Ответ: $\pi/2 n, n \in Z$

* Методом вспомогательного аргумента, который состоит в преобразовании выражения $a\sin x \pm b\cos x$ к виду $\sqrt{a^2 + b^2} \sin(x \pm \varphi)$, где $\varphi = \arcsin(b/\sqrt{a^2 + b^2})$ решается уравнение 10.

* $\sin x + \cos x = 1$.

* Учитывая, что $a = 1$, $b = 1$, получим уравнение

* $\sqrt{2} \sin(x + \varphi) = 1$, где $\varphi = \arcsin \sqrt{2}/2$,

* $\sin(x + \pi/4) = \sqrt{2}/2$,

* $x = -\pi/4 + (-1)^n \pi/4 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

* Ответ: $-\pi/4 + (-1)^n \pi/4 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

** Определить при каких значениях параметра a уравнения не имеют решений.*

- * $x + 2x \sin \alpha - \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha = 0,$*
- * $\alpha \in (-\pi/2; \pi/2)$*
- * Уравнение не имеет решений,*
- * если $1/4D < 0,$ т. е. при условии*
- * $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha < 0,$*
- * $\sin \alpha > 1/2,$ откуда,*
- * учитывая условие*
- * $\alpha \in (-\pi/2; \pi/2),$*
- * получаем $\alpha \in (\pi/6; \pi/2).$*

* *Определить при каких значениях параметра a уравнения не имеют решений.*

* $2 \sin x = (a + 1):(a - 3), a \neq 3.$

* Уравнение не имеет корней при условии $|a + 1|:(a - 3)| > 2.$

* Так как $|a + 1| > 2|a - 3|$, то $(a + 1 + 2a - 6)(a + 1 - 2a + 6) > 0,$

* А, отсюда, $(3a - 5)(a - 7) < 0$, поэтому, $a \in (5/3; 7).$

* С учетом $a \neq 3$, получим $a \in (5/3; 3) \cup (3; 7).$

* Ответ: $a \in (5/3; 3) \cup (3; 7)$