«Древнейшие задачи на прогрессии»

Подготовила:
Клещеногова В.А.,
учитель математики
МБОУ «Мордовско-Полянская СОШ»

«История возникновения прогрессии»

Древнейшие древнеегипетские математические тексты относятся к началу II тысячелетия до н. э. Математика тогда использовалась в астрономии, мореплавании, землемерии, при строительстве зданий, плотин, каналов и военных укреплений. Денежных расчётов, как и самих денег, в Египте не было. Египтяне писали на папирусе, который сохраняется плохо, и поэтому наши знания о математике Египта существенно меньше, чем о математике Вавилона или Греции.

Вероятно, она была развита лучше, чем можно представить, исходя из дошедших до нас документов — известно, что греческие математики учились у египтян.

Нам ничего не известно о развитии математических знаний в Египте как в более древние, так и в более поздние времена. После воцарения Птолемеев начинается чрезвычайно плодотворный синтез египетской и греческой культур.

В клинописных табличках вавилонян, в египетских пирамидах(II в. до н. э) встречаются примеры арифметических прогрессий.

Некоторые формулы, относящиеся к прогрессиям, были известны китайским и индийским ученым. Ариабхатта (v в.) применял формулы общего числа, суммы арифметической прогрессии. Но правило для нахождения суммы членов произвольной арифметической прогрессии впервые встречается в сочинении «Книги абака» в

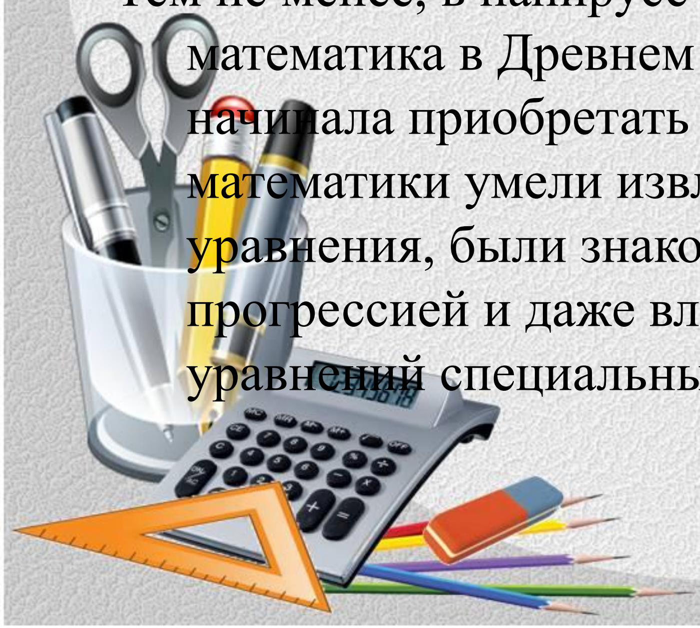
1202г.(Леонардо Пизанский)

Математический папирус Ахмеса — древнеегипетское учебное руководство по арифметике и геометрии периода Среднего царства, переписанное ок. 1650 до н. э. писцом по имени Ахмес на свиток папируса длиной 5,25 м. и шириной 33 см.

Папирус Ахмеса был обнаружен в 1858 и часто называется папирусом Райнда по имени его первого владельца. В 1870 папирус был расшифрован, переведён и издан. Ныне большая часть рукописи находится в Британском музее в Лондоне, а вторая часть — в Нью-Йорке

Все задачи из папируса Ахмеса (записан ок. 1650 года до н. э.) имеют прикладной характер и связаны с практикой строительства, размежеванием земельных наделов и т. п. Задачи сгруппированы не по методам, а по тематике. По преимуществу это задачи на нахождение площадей треугольника, четырёхугольников и круга, разнообразные действия с целыми числами и аликвотными дробями, пропорциональное деление, нахождение отношений, возведение в разные степени, определение среднего арифметического, арифметические прогрессии, решение уравнений первой и второй степени с одним неизвестным.

Тем не менее, в папирусе есть целый ряд свидетельств того, что математика в Древнем Египте тех лет имела или, по крайней мере, начинала приобретать теоретический характер. Так, египетские математики умели извлекать корни и возводить в степень, решать уравнения, были знакомы с арифметической и геометрической прогрессией и даже владели зачатками алгебры: при решении уравнений специальный иероглиф «куча» обозначал неизвестное.



Задачи на прогрессии, дошедшие до нас из древности, были связаны с запросами хозяйственной жизни: распределение продуктов, деление наследства и др.

Первые представления об арифметической и геометрической прогрессиях были еще у древних народов. Некоторые формулы, относящиеся к прогрессиям, были известны китайским и индийским ученым. В клинописных вавилонских табличках и египетских папирусах встречаются задачи на прогрессии и указания, как их решать.

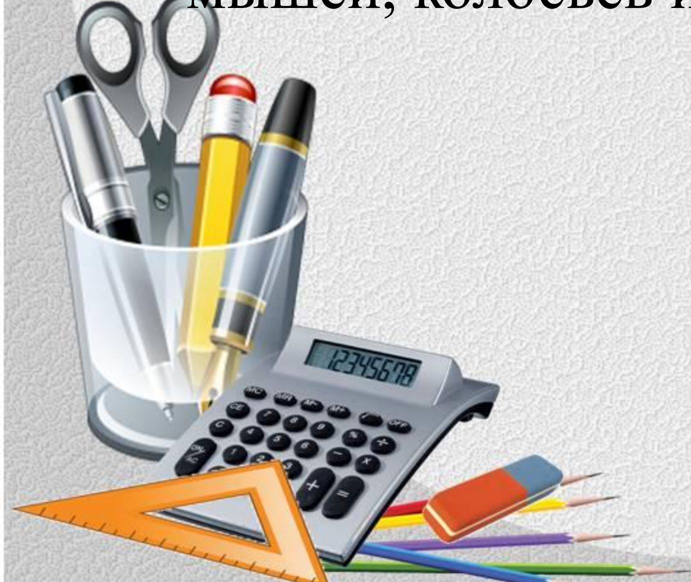
Задачи Древности

Задача из <u>«Книги об абаке»</u> Леонардо Пизанского (Фибоначчи) XIII в. :

7 старух, направляющихся в Рим (очевидно, паломниц), у каждой из которых 7 мулов, на каждом из которых по 7 мешков, в каждом из которых по 7 хлебов, в каждом из которых по 7 ножей, каждый из которых в 7 ножнах. В задаче спрашивается, сколько всего предметов.

Задача из Древней Греции:

В одном древнегреческом папирусе приводится задача: “Имеется 7 домов, в каждом по 7 кошек, каждая кошка съедает 7 мышей, каждая мышка съедает 7 колосьев, каждый из которых, если посеять зерно, дает 7 мер зерна. каждая кошка съедает 7 мышей, каждая мышка съедает 7 колосьев, каждый из которых, если посеять зерно, дает 7 мер зерна. нужно подсчитать сумму числа домов, кошек, мышей, колосьев и мер зерна.”



Задача из древней Руси:

Еще в XIX веке в деревнях загадывали:

“Шли 7 старцев.

У каждого старца по 7 костылей.

На каждом костыле по 7 сучков.

На каждом сучке по 7 кошелей.

В каждом кошеле по 7 пирогов.

В каждом кошеле по 7 воробьев.

Сколько всего?

Задача Древнего Египта

У семи лиц по семь кошек; каждая кошка съедает по семь мышей, каждая мышь съедает по семь колосьев, из каждого колоса может вырасти по семь мер ячменя. Как велики числа этого ряда и их сумма?»

Решение: Людей всего 7, кошек 72 = 49, они съедают всего 73 = 343 мыши, которые съедают всего 74 = 2401 колосьев, из них вырастает 75 = 16807 мер ячменя, в сумме эти числа дают 19 607.

Задача Древнего Египта

В древнеегипетском папирусе Ахмеса (ок. 2000 до н. э.) приводится задача: “Пусть тебе сказано: раздели 10 мер ячменя между 10 людьми так, чтобы разность мер ячменя, полученного каждым человеком и его соседом, равнялась 1/8 меры”. В этой задаче речь идет об арифметической прогрессии. Условие задачи, пользуясь современными обозначениями, можно записать так: $S=10$, $d=1/8$, $a1$, $a2$, …, $a10$.Решение этой задачи приводит к сумме пяти членов геометрической прогрессии

«Задача о шахматах»

В древней индии шах Шерам посулил любую награду за интересную игру, к которой он долгой время не потерял бы интерес. Ученый Сета изобрел шахматы и попросил в награду за свое изобретение столько пшеничных зерен, сколько их получится, если на первую клетку шахматной доски положить одно зерно, на вторую - в 2 раза больше, т. е. 2 зерна, на третью - еще в 2 раза больше, т. е. 4 зерна, и т. д. до 64 клетки. Шерам рассмеялся, услышав, какую награду попросил у него изобретатель шахмат

Решение:

К ужасу шаха он не мог выполнить пожелание ученого.

Нетрудно сосчитать, используя формулу

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

что количество зерна, нужное для расплаты, составляет:

18 446 744 073 709 551 615

Если бы принцу удалось засеять пшеницей площадь всей поверхности Земли, считая и моря, и океаны, и пустыни, и Арктику с Антарктикой, то получить удовлетворительный урожай, то за пять лет он смог бы рассчитаться с просителем. Такое количество зерен пшеницы можно собрать лишь с площади в 2000 раз большей поверхности Земли. Это превосходит количество пшеницы, собранной человечеством до нашего времени.

«Древнейшая прогрессия»

Древнейшая задача на прогрессии - не вопрос о вознаграждении изобретателя шахмат, насчитывающий за собой двухтысячелетнюю давность, а гораздо более старая задача о делении хлеба, которая записана в знаменитом египетском папирусе Ринда. Папирус этот, разысканный Риндом в конце прошлого столетия, составлен около 2000 лет до нашей эры и является списком с другого, еще более древнего математического сочинения, относящегося, быть может, к третьему тысячелетию до нашей эры. В числе арифметических, алгебраических и геометрических задач этого документа имеется такая :

Сто мер хлеба разделить между пятью людьми так, чтобы второй получил на столько же больше первого, на сколько третий получил больше второго, четвертый больше третьего и пятый больше четвертого. Кроме того, двое первых должны получить в 7 раз меньше трех остальных. Сколько нужно дать каждому?

Решение:

Очевидно, количества хлеба, полученные участниками раздела, составляют возрастающую арифметическую прогрессию. Пусть первый ее член x, разность y. Тогда доля первого x , доля второго x + y ; доля третьего x + 2y доля четвертого x + 3y; доля пятого x + 4y.

На основании условий задачи составляем следующие два уравнения:

$$\begin{cases} x+(x+y)+(x+2y)+(x+3y)+(x+4y)=100, \\ 7[x+(x+y)]=(x+2y)+(x+3y)+(x+4y). \end{cases}$$

После упрощений первое уравнение получает вид x + 2y = 20,

а второе: 11x = 2y.

Решив эту систему, получаем: x = 1 2/3, y = 9 1/6.

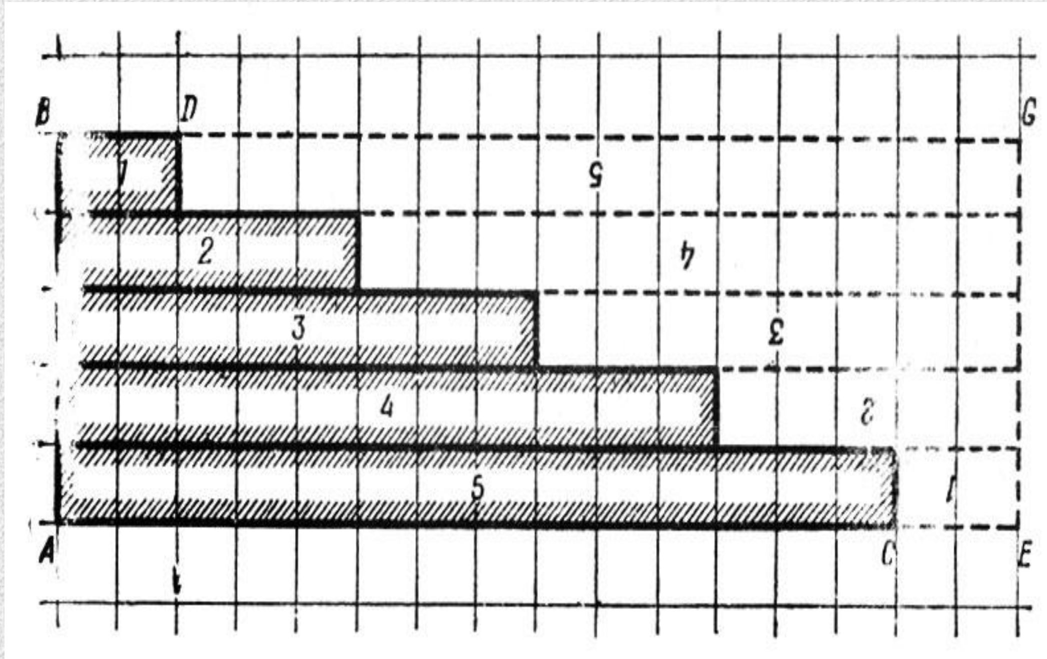
Значит, хлеб должен быть разделен на следующие части

1 2/3, 10 5/6, 20, 29 1/6, 38 1/3.

«Алгебра на клетчатой бумаге»

- Несмотря на пятидесятивековую древность этой задачи на прогрессии, в нашем школьном обиходе прогрессии появились сравнительно недавно. В учебнике Магницкого, изданном двести лет назад и служившем целых полвека основным руководством для школьного обучения, прогрессии хотя и имеются, но общих формул, связывающих входящие в них величины между собой, в нем не дано. Сам составитель учебника не без затруднений справлялся поэтому с такими задачами. Между тем формулу суммы членов арифметической прогрессии легко вывести простым и наглядным приемом с помощью клетчатой бумаги. На такой бумаге любая арифметическая прогрессия изображается ступенчатой фигурой.

Фигура ABDC на рис. изображает прогрессию: 2; 5; 8; 11; 14.



- Чтобы определить сумму ее членов, дополним чертеж до прямоугольника ABGE. Получим две равные фигуры ABDC и DGEC. Площадь каждой из них изображает сумму членов нашей прогрессии. Значит, двойная сумма прогрессии равна площади прямоугольника ABGE, т. е.(AC + CE) × AB. Но AC + CE изображает сумму 1-го и 5-го членов прогрессии; AB - число членов прогрессии. Поэтому двойная сумма 2 S = (сумма крайних членов) × (число членов) или S = ((первый + последний член) × (число членов))/2.

«Поливка огорода»

- В огороде 30 грядок, каждая длиной 16 м и шириной 2,5 м. Поливая грядки, огородник приносит ведра с водой из колодца, расположенного в 14 м от края огорода, и обходит грядки по меже, причем воды, приносимой за один раз, достаточно для поливки только одной грядки. Какой длины путь должен пройти огородник, поливая весь огород? Путь начинается и кончается у колодца.

Решение:

Для поливки первой грядки огородник должен пройти путь

14 + 16 + 2,5 + 16 + 2,5 + 14 = 65 м.

При поливке второй он проходит

14 + 2,5 + 16 + 2,5 + 16 + 2,5 + 2,5 + 14 = 65 + 5 = 70 м.

Каждая следующая грядка требует пути на 5 м длиннее предыдущей. Имеем прогрессию:

65; 70; 75; ... ; 65 + 5 × 29.

Сумма ее членов равна

((65 + 65 + 29 × 5)30)/2 = 4125 м

Огородник при поливке всего огорода проходит путь в 4,125 км.

«Кормление кур»

Для 31 курицы запасено некоторое количество корма из расчета по декалитру в неделю на каждую курицу. При этом предполагалось, что численность кур меняться не будет. Но так как в действительности число кур каждую неделю убывало на 1, то заготовленного корма хватило на двойной срок.

Как велик был запас корма и на сколько времени был он первоначально рассчитан?

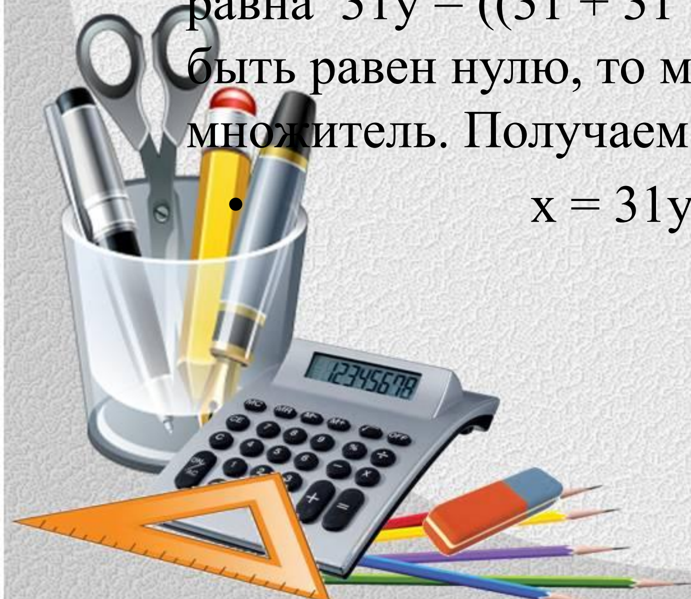
Решение:

Пусть запасено было x декалитров корма на y недель. Так как корм рассчитан на 31 курицу по 1 декалитру на курицу в неделю, то $x = 31y$. В первую неделю израсходовано было 31 дл, во вторую 30, в третью 29 и т.д. до последней недели всего удвоенного срока, когда израсходовано было: $(31 - 2y + 1)$ дл*.

**Поясним: расход корма в течение*

1-й недели 31 дл, 2-й недели $31 - 1$ дл, 3-й недели $31 - 2$ дл, ... $2y$-й недели $31 - (2y - 1) = 31 - 2y + 1$ дл. Весь запас составлял, следовательно, $x = 31y = 31 - 30 + 29 + \ldots + (31 - 2y + 1)$. Сумма $2y$ членов прогрессии, первый член которой 31, а последний $31 - 2y + 1$, равна $31y = ((31 + 31 - 2y + 1)2y)/2 = (63 - 2y)y$. Так как y не может быть равен нулю, то мы вправе обе части равенства сократить на этот множитель. Получаем: $31 = 63 - 2y$ и $y = 16$, откуда

- $x = 31y = 496$. Запасено было 496 декалитров корма на 16 недель.



«Бригада землекопов»

Старшеклассники обязались вырыть на школьном участке канаву и организовали для этого бригаду землекопов. Если бы бригада работала в полном составе, канава была бы вырыта в 24 часа. Но в действительности к работе приступил сначала только один член бригады. Спустя некоторое время присоединился второй; еще через столько же времени - третий, за ним через такой же промежуток четвертый и так до последнего. При расчете оказалось, что первый работал в 11 раз дольше последнего. Сколько времени работал последний?

Решение:

Пусть последний член бригады работал x часов, тогда первый работал Их часов. Далее, если число рывших канаву учеников было y, то общее число часов работы определится как сумма y членов убывающей прогрессии, первый член которой Иле, а последний x, т. е. $((11x + x)y)/2 = 6xy$.

С другой стороны, известно, что бригаду из y человек, работая в полном составе, выкопала бы канаву в 24 часа, т. е. что для выполнения работы необходимо 24y рабочих часов. Следовательно, $6xy = 24y$.

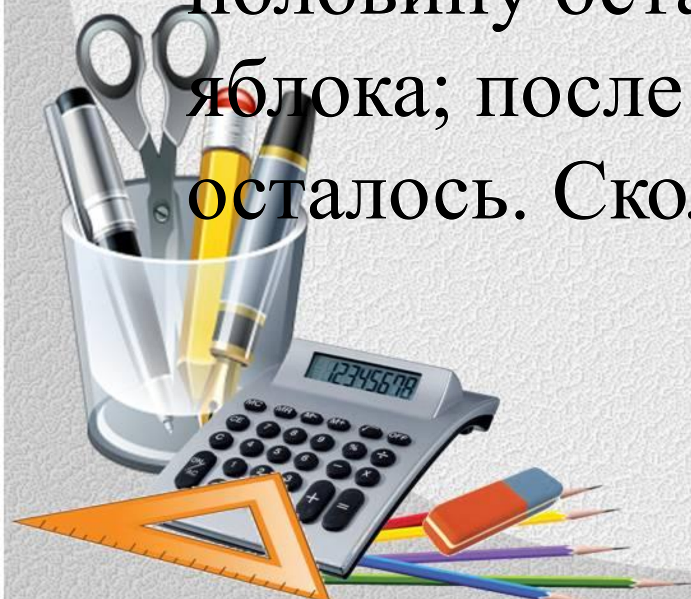
Число y не может равняться нулю; на этот множитель можно поэтому уравнение сократить, после чего получаем: $6x = 24$ и $x = 4$.

Итак, член бригады, приступивший к работе последним, работал 4 часа.

Мы ответили на вопрос задачи; но если бы мы полюбопытствовали знать, сколько рабочих входило в бригаду, то не могли бы этого определить, несмотря на то, что в уравнении число это фигурировало (под буквой y). Для решения этого вопроса в задаче не приведено достаточных данных.

«Яблоки»

Садовник продал первому покупателю половину всех своих яблок и еще пол-яблока, второму покупателю - половину оставшихся и еще пол-яблока: третьему - половину оставшихся и еще пол-яблока и т. д. Седьмому покупателю он продал половину оставшихся яблок и еще пол-яблока; после этого яблок у него не осталось. Сколько яблок было у садовника?



Решение:

Если первоначальное число яблок x, то первый покупатель получил

$x/2 + 1/2 = (x + 1)/2$, второй $1/2(x - (x + 1)/2) + 1/2 = (x + 1)/2^2$,

третий $1/2(x - (x + 1)/2 - (x + 1)/4) + 1/2 = (x + 1)/2^3$,

седьмой покупатель $(x + 1)/2^7$.

Имеем уравнение

$(x + 1)/2 + (x + 1)/2^2 + (x + 1)/2^3 + \ldots + (x + 1)/2^7 = x$ или

$(x + 1)(1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + \ldots + 1/2^7) = x$.

Вычисляя стоящую в скобках сумму членов геометрической прогрессии, найдем: $x/(x + 1) = 1 - 1/2^7$ и

$x = 2^7 - 1 = 127$.

Всех яблок было 127.

«Покупка лошади»

Из арифметики Магницкого:

Некто продал лошадь за 156 руб. Но покупатель, приобретя лошадь, раздумал ее покупать и возвратил продавцу, говоря:

- Нет мне расчета покупать за эту цену лошадь, которая таких денег не стоит.

Тогда продавец предложил другие условия:

- Если по-твоему цена лошади высока, то купи только ее подковные гвозди, лошадь же получишь тогда в придачу бесплатно. Гвоздей в каждой подкове 6. За первый гвоздь дай мне всего 1/4 коп., за второй -1/2 коп., за третий - 1 коп. и т. д.

Покупатель, соблазненный низкой ценой и желая даром получить лошадь, принял условия продавца, рассчитывая, что за гвозди придется уплатить не более 10 рублей.

На сколько покупатель проторговался?

За 24 подковных гвоздя пришлось уплатить

$1/4 + 1/2 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{24-3}$

копеек. Сумма эта равна

$(2^{21} \times 2 - 1/4)/(2 - 1) = 2^{22} - 1/4 =$ 4194303 3/4 коп.

т. е. около 42 тысяч рублей. При таких условиях не обидно дать и лошадь в придачу

«Вознаграждение воина»

Из старинного русского учебника математики

"Полный курс чистой математики, сочиненный Артиллерии Штык-Юнкером и Математики партикулярным Учителем Ефимом Войтяховским в пользу и употребление юношества и упражняющихся в Математике" (1795):

"Служившему воину дано вознаграждение за первую рану 1 копейка, за другую - 2 копейки, за третью - 4 копейки и т. д. По исчислению нашлось, что воин получил всего вознаграждения 655 руб. 35 коп. Спрашивается число его ран".

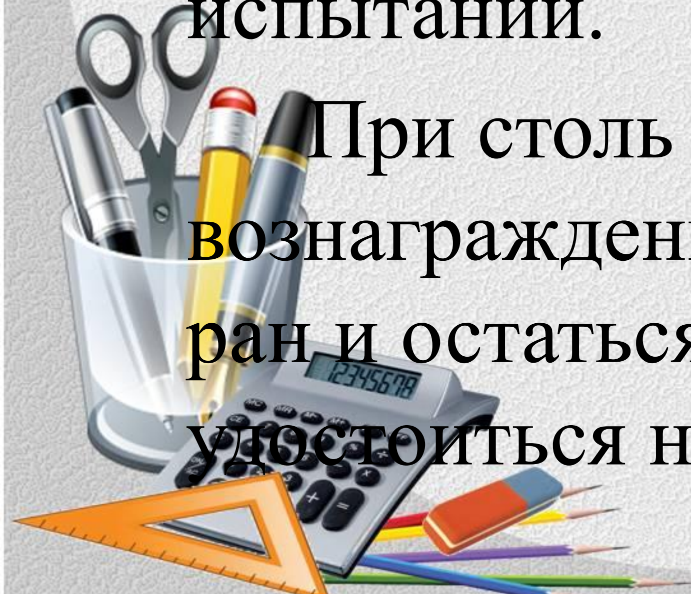
Решение:

Составляем уравнение

$65535 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{x-1}$ или

$65535 = (2^{x-1} \times 2 - 1)/(2 - 1) = 2^{x-1}$,

откуда имеем: 65536 = 2x и x = 16 - результат, который легко находим путем испытаний.



При столь великодушной системе вознаграждения воин должен получить 16 ран и остаться при этом в живых, чтобы удостоиться награды в 655 руб. 35 коп.

Литература:

- «Занимательная алгебра» Я.И.Перельман Изд-во «Триада- Литера» Москва, 1994г.
- Интернет-ресурсы.