

# Определенный интеграл

Определённым интегралом от функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  называется выражение вида

$$\int_a^b f(x)dx$$

где

$a$  - нижний предел

$b$  - верхний предел

$f(x)$  - подынтегральная функция

$x$  – переменная интегрирования.

# Формула Ньютона-Лейбница

Если  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , и  $F(x)$  - некоторая первообразная функции  $f(x)$ , то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Пример. Вычислить определенный  
интеграл  $\int_{-1}^2 (4x + 5) dx$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 (4x + 5) dx &= \int_{-1}^2 4x dx + \int_{-1}^2 5 dx = \\ &= \frac{4x^{1+1}}{1+1} \Big|_{-1}^2 + 5x \Big|_{-1}^2 = \frac{4x^2}{2} \Big|_{-1}^2 + 5x \Big|_{-1}^2 = 2x^2 \Big|_{-1}^2 + 5x \Big|_{-1}^2 = \\ &= (2 \cdot 2^2 - 2 \cdot (-1)^2) + (5 \cdot 2 - 5 \cdot (-1)) = \\ &(8 - 2) + (10 + 5) = 6 + 15 = 21 \end{aligned}$$

# Задание. Вычислить определенный интеграл

$$1. \int_1^5 7x^6 dx$$

$$2. \int_1^2 2x^2 dx$$

$$3. \int_1^9 \frac{6}{\sqrt{x}} dx$$

$$4. \int_{-6}^0 (1-x) dx$$

$$5. \int_1^4 \left(2x + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx$$

$$6. \int_{-1}^3 (4x+1) dx$$

$$7. \int_{-2}^4 (8+2x-x^2) dx$$

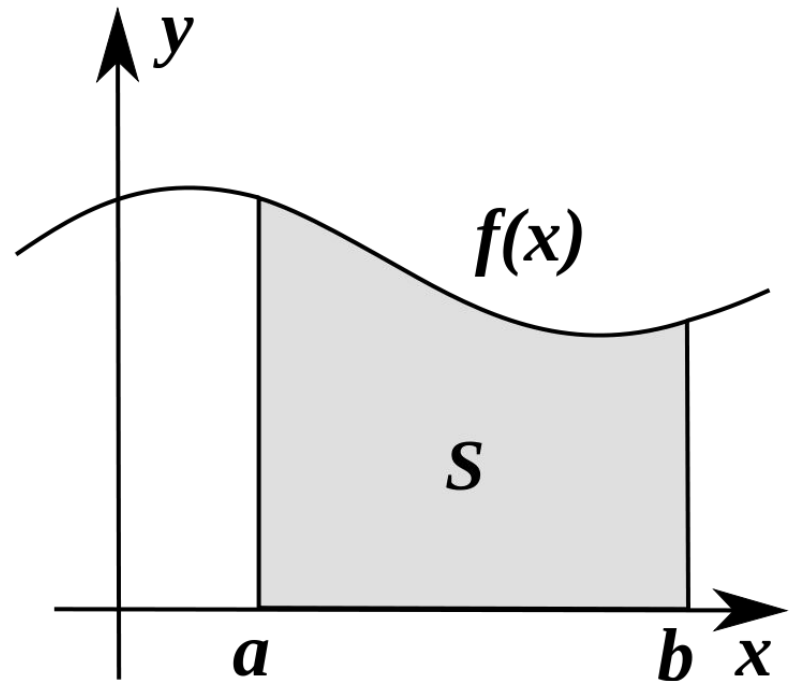
$$8. \int_{-3}^1 (2x^2+3x-1) dx$$

$$9. \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 5x\right) dx$$

$$10. \int_0^{\pi} (\cos x - 12x^3) dx$$

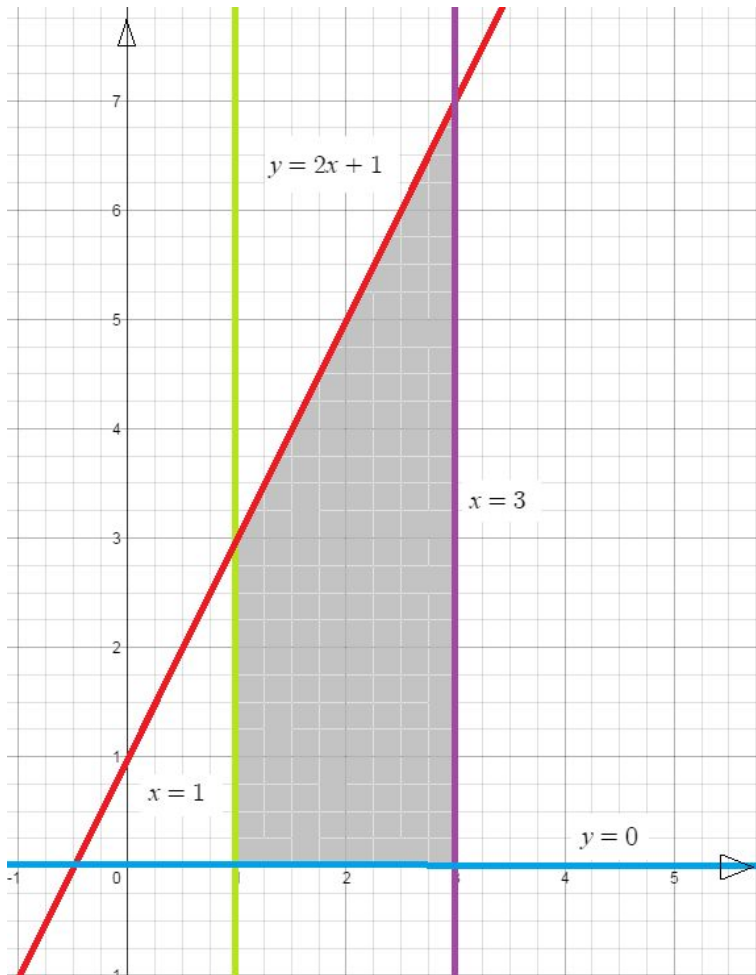
# Геометрический смысл определенного интеграла

Определённый интеграл  $\int_a^b f(x)dx$   
численно равен  
площади фигуры  $S$ ,  
ограниченной осью  
абсцисс ( $Ox$ ), прямыми  
 $x = a$  и  $x = b$  и графиком  
функции  $y = f(x)$ .



# Пример. Вычислить площадь криволинейной трапеции ограниченной линиями

$$y = 2x + 1, y = 0, x = 1, x = 3$$



Пусть  $y_1$  – функция которая находится ниже,  
 $y_2$  – функция которая находится выше, и  
 $x_1 < x_2$

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} (y_2 - y_1) dx &= \int_1^3 ((2x + 1) - 0) dx = \\ &= \int_1^3 (2x + 1) dx = \int_1^3 2x dx + \int_1^3 1 dx = \\ &= \frac{2x^{1+1}}{1+1} \Big|_1^3 + 1x \Big|_1^3 = \frac{2x^2}{2} \Big|_1^3 + x \Big|_1^3 = x^2 \Big|_1^3 + x \Big|_1^3 = \\ &= (3^2 - 1^2) + (3 - 1) = (9 - 1) + 2 = 10 \end{aligned}$$

**Задание. Вычислить площадь криволинейной трапеции ограниченной линиями**

1.  $y = x + 1, y = 1, x = 0, x = 2$

2.  $y = x - 2, y = 0, x = -1, x = 2$

3.  $y = 2x - 3, y = 0, x = 0, x = 1$

4.  $y = 3x + 1, y = 1, x = 0, x = 2$

5.  $y = x^2, y = 4, x = -2, x = 2$

6.  $y = x^2, y = -1, x = -1, x = 1$

7.  $y = x^2, y = 0, x = 0, x = 3$

# Самостоятельная работа

*Вариант 1*

1. *Найдите первообразную*

$$f(x) = 9x^2 - \cos x$$

2. *Найдите неопределенный*

*интеграл*  $\int 157 dx$

3. *Найдите неопределенный*

*интеграл*  $\int -9x^5 dx$

4. *Найдите интеграл*

$$\int_{-1}^2 4x^3 dx$$

5. *Найдите интеграл*

$$\int_0^{\pi} 2 \sin x dx$$

*Вариант 2*

1. *Найдите первообразную*

$$f(x) = 8x^3 - \sin x$$

2. *Найдите неопределенный*

*интеграл*  $\int 192 dx$

3. *Найдите неопределенный*

*интеграл*  $\int -7x^6 dx$

4. *Найдите интеграл*

$$\int_{-1}^2 5x^4 dx$$

5. *Найдите интеграл*

$$\int_0^{\pi} 3 \cos x dx$$