Урок одного уравнения

Задача. Решите уравнение разными способами.

$$\cos x + \sin x = 1$$

?

Семь способов решения

1. Приведение уравнения к однородному относительно синуса и косинуса.
2. Разложение левой части уравнения на множители.
3. Приведение к квадратному уравнению относительно одной из функций.
4. Возведение в квадрат обеих частей уравнения.
5. Графическое решение.
6. Использование универсальной подстановки.
7. Преобразование суммы (или разности) тригонометрических функций в произведение

Сравните свое решение с эталоном

,

.

Способ первый. Приведение уравнения к однородному.

$\square\square\square\square\square + \square\square\square\square\square = 1$

Разложим левую часть по формулам двойного аргумент, а правую часть заменим тригонометрической единицей:

$$\cos^2\frac{\square}{2} - \sin^2\frac{\square}{\square} + 2\sin\frac{\square}{2}\cos\frac{\square}{2} = \cos^2\frac{\square}{2} + \sin^2\frac{\square}{2},$$

$$2\sin\frac{\square}{2}\square\square\square\square\frac{\square}{2} - 2\sin^2\frac{\square}{2} = 0,$$

$$\sin\frac{\square}{2}\square\cos\frac{\square}{2} - \sin\frac{\square}{2}\square = 0.$$

Следовательно,

1) $\sin\frac{\square}{2} = 0;\ \frac{\square}{2} = \square;\ \square = 2\square,\ \square \in \mathbb{Z};$

2) $\cos\frac{\square}{2} - \sin\frac{\square}{2} = 0.\ \cos\frac{\square}{2} \neq 0,$ потому что если $\cos\frac{\square}{2} = 0,$ то $\sin\frac{\square}{2} = 0,$

что противоречит тождеству $\square^2\frac{\square}{2} + \sin^2\frac{\square}{2} =$

$1,$ поэтому делим обе части уравнения на $\cos\frac{\square}{2}.$ Получим: $1 - \square\frac{\square}{2} =$

$0;\ \square\frac{\square}{2} = 1;\ \frac{\square}{2} = \frac{\square}{4} + \square;\ \square = \frac{\square}{2} + 2\square;\ \square \in \mathbb{Z};$

Ответ: $2\square,\ \pi/2+2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}.$

Способ второй. Разложение левой части уравнения на множители.

$\square + \square = 1;$

$\sin \square - \square 1 - \cos \square \square = 0;$

Так как $1 - \cos \square = 2\sin^2 \frac{\square}{2}$, а $\sin \square = 2\sin \frac{\square}{2} \cos \frac{\square}{2}$, то $2\sin \frac{\square}{2} \cos \frac{\square}{2} -$

$2\sin^2 \frac{\square}{2} = 0;\ \sin \frac{\square}{2} \square \cos \frac{\square}{2} - \sin \frac{\square}{\square} \square = 0$, получили уравнение, которое

рассматривали в первом случае.

Способ третий. Приведение к квадратному уравнению относительно одной из функций.

$\square + \square = 1$

Так как $\sin^2\square + \cos^2\square = 1$, то $\sin\square = \pm\xi\sqrt{1-\cos^2\square}$. А уравнение примет вид

$$\pm\square\sqrt{1-\cos^2\square} = 1-\cos\square.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$1-\cos^2 x = 1-2\cos x+\cos^2 x;$

$2\cos^2 x-2\cos x=0;$

$\cos x(\cos x-1)=0.$

1) $\cos x=0;\ x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

2) $\cos x-1=0;\ x=2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Возведение в квадрат могло привести к появлению посторонних корней, поэтому обязательно необходима проверка. Выполним ее. Полученные корни равносильны объединению трех корней $x_1=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $x_2=2\pi k$, $x_3=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$. x_1 и x_2 совпадают с полученными ранее, поэтому не являются посторонними.

Проверим:

$$x_3 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2} - 2\pi k\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - 2\pi k\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 - 1 =$$

$$-1. \; -1 \neq 1.$$

Тогда $x_3 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\; k \in \mathbb{Z}$ – посторонний корень.

Ответ: $2\pi k$, $\pi/2+2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$.

Способ четвертый. Возведение в квадрат обеих частей уравнения.

$$\square + \square = 1;$$

$$(\cos \square + \sin \square)^2 = 1^2;$$

$$\cos^2 \square + 2\cos \square \sin \square + \sin^2 \square = 1;$$

$$\sin 2\square = 0;$$

$$2\square = \square;$$

$$\square = \frac{\square}{2} \square,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Проверим, не получили ли посторонних корней. Полученные корни равносильны объединению четырех корней $\square_1 = 2\square\square\square;\ \square_2 = \frac{\square}{2} + 2\square\square\square;\ \square_3 = \square + 2\square\square\square;\ \square_4 = -\frac{\square}{2} + 2\square\square\square.$

Проверка показывает, что $\square_4$ и $\square_3$ – посторонние корни.

Ответ: $2\square\square\square,\ \pi/2+2\pi k;\ k\in \mathbb{Z}$.

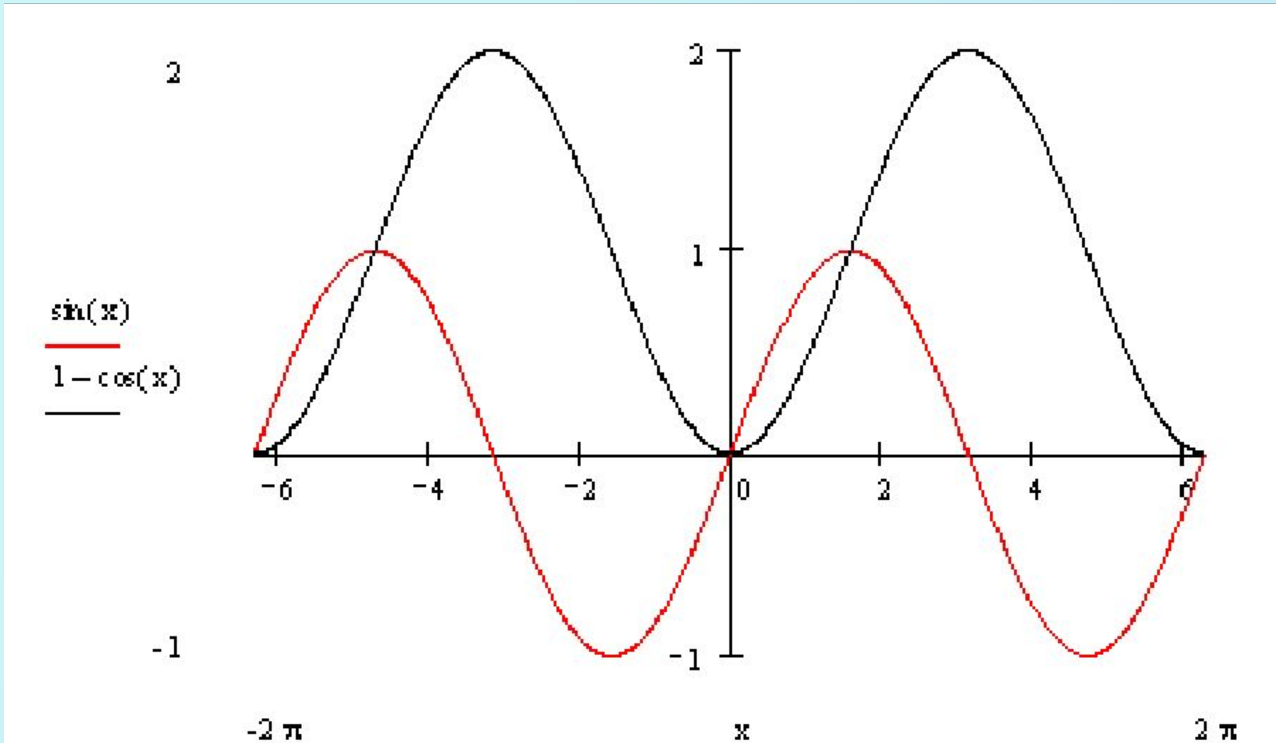
Пятый способ. Графическое решение.

$$\square + \square = 1$$

Запишем уравнение в виде $\sin\square = 1 - \cos\square$.

Построим графики функций $\square = \sin\square$ и $\square = 1 - \cos\square$.

Абсциссы точек пересечения этих графиков будут корнями данного уравнения.



Ответ: 2, $\pi/2+2\pi k$; $k\in \mathbb{Z}$.

Шестой способ. Использование универсальной подстановки.

$$\square + \square = 1$$

Выразим □ и □ через $\square\frac{\square}{2}$. Получим уравнение

$$\frac{2\square\frac{\square}{2}}{1+\square^2\frac{\square}{2}} + \frac{1-\square^2\frac{\square}{2}}{1+tg^2\frac{\square}{2}} = 1,$$

$$2tg\frac{x}{2} + 1 - tg^2\frac{x}{2} = 1 + tg^2\frac{x}{2},$$

$$tg\frac{x}{2}\square 1 - tg\frac{x}{2}\square = 0,$$

1) $tg\frac{x}{2} = 0,$ 2) $tg\frac{x}{2} = 1,$

$□_1 = 2□□□, □_2 = \frac{□}{2} + 2□□□, k \in \mathbb{Z}.$

ОДЗ первоначального уравнения-все множество R. При переходе к □□□$\frac{□}{2}$ из рассмотрения выпали значения, при которых □□□$\frac{□}{2}$ не имеет смысла, т.е. $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Проверкой убеждаемся, что не является.

Ответ: $2□□□$, $\pi/2+2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$.

Седьмой способ. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

$$\square + \square = 1$$

Запишем уравнение в виде $\sin\left(\frac{\square}{2} - \square\right) + \sin\square = 1$. По формуле суммы двух синусов получим

$$2\sin\frac{\square}{4}\cos\left(\frac{\square}{4} - \square\right) = 1;$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\left(\frac{\square}{4} - \square\right) = 1;$$

$$\cos\left(\frac{\square}{4} - \square\right) = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\frac{\square}{4} - \square = \pm \arccos\frac{\xi\overline{2}}{2} + 2\square;$$

$$\frac{\square}{4} - \square = \pm \frac{\square}{4} + 2\square;$$

$$\square = \frac{\square}{4} \pm \frac{\square}{4} + 2\square; \ \square \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\square}{4} \pm \frac{\square}{4} + 2\square; \ \square \in \mathbb{Z}.$

Человеку, изучающему алгебру часто полезнее решить одну и ту же задачу тремя различными способами, чем решать три – четыре различные задачи. Решая одну задачу различными способами , можно путем сравнивания выяснить, какой из них короче и эффективнее. Так вырабатывается опыт.

У. У. Сойер /английский математик и педагог XX века/

ВСЁ!

Точнее почти всё!

Осталось выбрать метод решения :

Самый простой;
Самый оригинальный;
Самый неожиданный;
Самый универсальный …

УДИВИТЕЛЬНОЕ И КРАСИВОЕ ВСЕГДА РЯДОМ!