

*Урок одного
уравнения*




Задача. Решите уравнение
разными способами.

$$\cos x + \sin x = 1$$



Семь способов решения

1. Приведение уравнения к однородному относительно синуса и косинуса.
2. Разложение левой части уравнения на множители.
3. Приведение к квадратному уравнению относительно одной из функций.
4. Возведение в квадрат обеих частей уравнения.
5. Графическое решение.
6. Использование универсальной подстановки.
7. Преобразование суммы (или разности) тригонометрических функций в произведение



**Сравните свое решение с
эталоном**

Способ первый. Приведение уравнения к однородному.

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1$$

Разложим левую часть по формулам двойного аргумент, а правую часть заменим тригонометрической единицей:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 0,$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Следовательно,

$$1) \sin \frac{\pi}{2} = 0; \frac{\pi}{2} = \pi k; \pi = 2\pi k; \pi \in \mathbb{Z};$$

$$2) \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} = 0. \cos \frac{\pi}{2} \neq 0, \text{ потому что если } \cos \frac{\pi}{2} = 0, \text{ то } \sin \frac{\pi}{2} = 0,$$

что противоречит тождеству $\cos^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{2} =$

1, поэтому делим обе части уравнения на $\cos \frac{\pi}{2}$. Получим: $1 - \frac{\pi}{2} =$

$$0; \frac{\pi}{2} = 1; \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k; \pi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi \in \mathbb{Z};$$

Ответ: $2\pi k; \pi/2 + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$.

Способ второй. Разложение левой части уравнения на множители.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$\sin \alpha - \sqrt{1 - \cos \alpha} = 0;$$

Так как $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, а $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$, то $2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} -$

$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 0$; $\sin \frac{\alpha}{2} [\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}] = 0$, получили уравнение, которое

рассматривали в первом случае.

Способ третий. Приведение к квадратному уравнению относительно одной из функций.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Так как $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, то $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$. А уравнение примет

вид

$$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = 1 - \cos \alpha$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$1 - \cos^2 \alpha = 1 - 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha$$

$$2 \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha + 1 = 0;$$

$$\cos \alpha \cos \alpha - 1 = 0.$$

$$1) \cos \alpha = 0; \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \cos \alpha - 1 = 0; \alpha = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Возведение в квадрат могло привести к появлению посторонних корней, поэтому обязательно необходима проверка. Выполним ее. Полученные корни равносильны объединению трех корней $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \alpha_2 = 2\pi k, \alpha_3 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ и α_2 совпадают с полученными ранее, поэтому не являются посторонними.

Проверим:

$$\sqrt[3]{1} = -\frac{\sqrt[3]{3}}{2} + 2\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$$

$$\cos\left[-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}\right] - 2\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}} + \sin\left[-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}\right] - 2\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}} = \cos\left[-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}\right] + \sin\left[-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}\right] = 0 - 1 = -1. \quad -1 \neq 1.$$

Тогда $\sqrt[3]{1} = -\frac{\sqrt[3]{3}}{2} + 2\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$, $\sqrt[3]{3} \in \mathbb{Z}$ – посторонний корень.

Ответ: $2\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}} \pi/2 + 2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$.

Способ четвертый. Возведение в квадрат обеих частей уравнения.

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1;$$

$$(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 = 1^2;$$

$$\cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha = 1;$$

$$\sin 2\alpha = 0;$$

$$2\alpha = \pi$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Проверим, не получили ли посторонних корней. Полученные корни равносильны объединению четырех корней $\alpha_1 = 2\pi k$; $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $\alpha_3 = \pi + 2\pi k$; $\alpha_4 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$

Проверка показывает, что α_4 и α_3 – посторонние корни.

Ответ: $2\pi k$; $\pi/2 + 2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$.

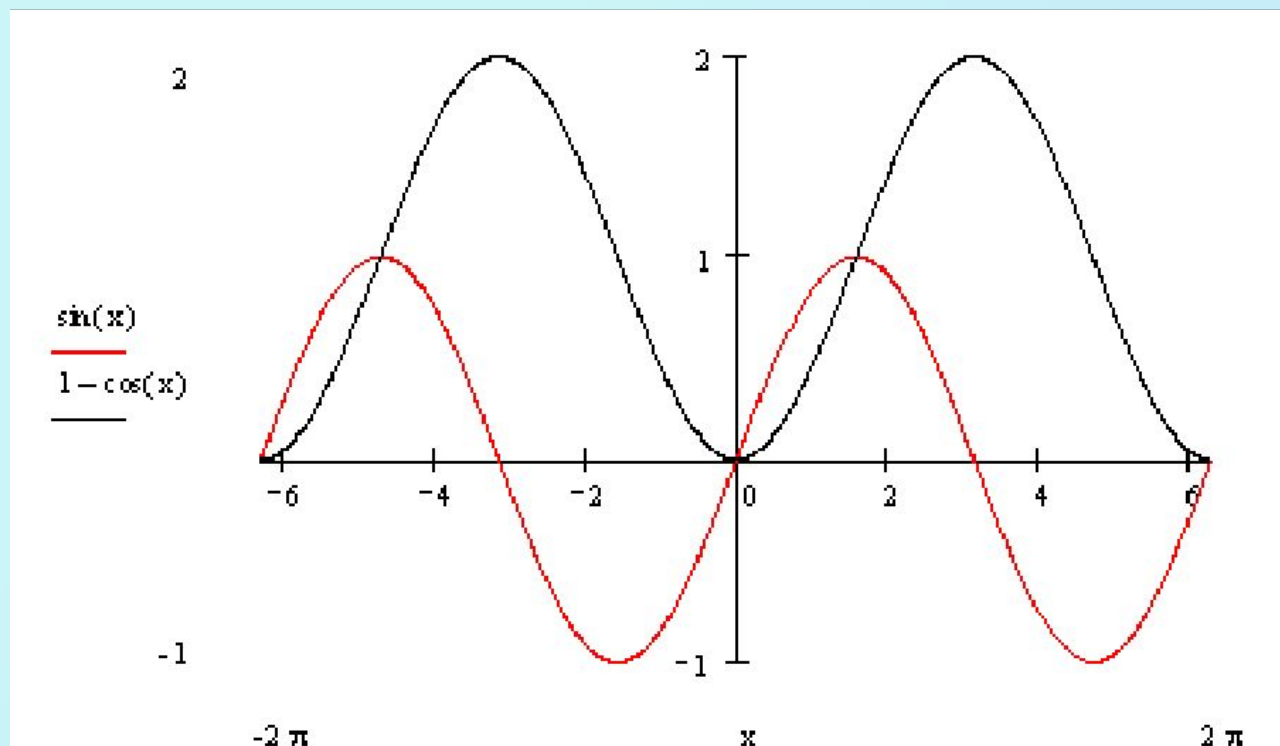
Пятый способ. Графическое решение.

$$\sin \alpha + \cos \alpha = 1$$

Запишем уравнение в виде $\sin \alpha = 1 - \cos \alpha$

Построим графики функций $y = \sin \alpha$ и $y = 1 - \cos \alpha$

Абсциссы точек пересечения этих графиков будут корнями данного уравнения.



Ответ: $2\pi k; \pi/2 + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$.

Шестой способ. Использование универсальной подстановки.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Выразим $\cos^2 x$ и $\sin^2 x$ через $\tan \frac{x}{2}$. Получим уравнение

$$\frac{2 \cos^2 \frac{x}{2}}{1 + \sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{1 - \cos^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = 1,$$

$$2 \tan^2 \frac{x}{2} + 1 - \tan^2 \frac{x}{2} = 1 + \tan^2 \frac{x}{2},$$

$$\tan^2 \frac{x}{2} - 1 = 0,$$

$$1) \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0,$$

$$2) \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1,$$

$$\mathbb{R}_1 = 2\pi k, \quad \mathbb{R}_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ОДЗ первоначального уравнения - все множество \mathbb{R} . При переходе к $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ из рассмотрения выпали значения, при которых $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ не имеет смысла, т.е. $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Проверкой убеждаемся, что не является.

Ответ: $2\pi k; \pi/2 + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}.$

Седьмой способ. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

$$\sin \frac{\xi}{2} - \cos \xi = 1$$

Запишем уравнение в виде $\sin \frac{\xi}{2} - \cos \xi + \sin \xi = 1$. По формуле суммы двух синусов получим

$$2 \sin \frac{\xi}{4} \cos \frac{\xi}{4} - \cos \xi = 1;$$

$$2 \cdot \frac{\xi}{2} \cdot \cos \frac{\xi}{4} - \cos \xi = 1;$$

$$\cos \frac{\xi}{4} - \cos \xi = \frac{1}{\xi};$$

$$\frac{\pi}{4} - \pi = \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{4} - \pi = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$.

Человеку, изучающему алгебру часто полезнее решить одну и ту же задачу тремя различными способами, чем решать три – четыре различные задачи. Решая одну задачу различными способами, можно путем сравнения выяснить, какой из них короче и эффективнее. Так вырабатывается опыт.

У. У. Соьер
/английский математик и педагог
XX века/

ВСЁ!

Точнее почти всё!

Осталось выбрать метод решения :

Самый простой;

Самый оригинальный;

Самый неожиданный;

Самый универсальный ...

УДИВИТЕЛЬНОЕ И КРАСИВОЕ ВСЕГДА РЯДОМ!