

*Уравнение, линейное
относительно $\sin x$ и $\cos x$.*

Урок №1

Классная работа.

Уравнение $a \sin x + b \cos x = c$

где $a \neq 0, b \neq 0$ *называют*

линейным относительно $\sin x$ и $\cos x$

Способы решения.

1. С помощью формул двойного угла.

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$$

Пример

$$3 \sin x + 4 \cos x = 5$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$3 \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 4 \cdot (\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}) = 5 \cos^2 \frac{x}{2} + 5 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$6 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 4 \cos^2 \frac{x}{2} - 4 \sin^2 \frac{x}{2} - 5 \cos^2 \frac{x}{2} - 5 \sin^2 \frac{x}{2} = 0$$

$$6 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 9 \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = 0$$

$$6 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 9 \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = 0$$

$$6 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 9 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 1 = 0$$

$$-6 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 9 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$$

$$9t^2 - 6t + 1 = 0$$

$$(3t - 1)^2 = 0$$

$$t = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Решение уравнения в общем виде

$$a \sin x + b \cos x = c \quad \text{где } a \neq 0, b \neq 0$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$a 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} + b \cdot (\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}) = c (\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2})$$

$$a 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} + b \cdot \cos^2 \frac{x}{2} - b \cdot \sin^2 \frac{x}{2} = c \cdot \cos^2 \frac{x}{2} + c \cdot \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$a2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} + b \cdot \cos^2 \frac{x}{2} - b \cdot \sin^2 \frac{x}{2} = c \cdot \cos^2 \frac{x}{2} + c \cdot \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$2a \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} + b \cdot \cos^2 \frac{x}{2} - b \cdot \sin^2 \frac{x}{2} - c \cdot \cos^2 \frac{x}{2} - c \cdot \sin^2 \frac{x}{2} = 0$$

$$2a \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} + (b - c) \cdot \cos^2 \frac{x}{2} - (b + c) \cdot \sin^2 \frac{x}{2} = 0$$

$$(b + c) \cdot \sin^2 \frac{x}{2} - 2a \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} - (b - c) \cdot \cos^2 \frac{x}{2} = 0$$

$$(b + c) \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2a \operatorname{tg} \frac{x}{2} - (b - c) = 0$$

$$(b+c) \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2a \operatorname{tg} \frac{x}{2} - (b-c) = 0$$

$$(b+c) \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + c - b = 0$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$$

$$(b+c) \cdot t^2 - 2at + c - b = 0$$

Пример

$$\sin x + \cos x = 1$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 0$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 0$$

Пример

$$\sin x + \cos x = 1$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \cdot \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) = 0$$

$$\sin \frac{x}{2} = 0 \quad \text{или} \quad \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 0$$

$$\frac{x}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad 1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$$

$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

2. Замена переменной.

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$$

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Универсальная подстановка.

$$a \sin x + b \cos x = c$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$$

$$a \frac{2t}{1+t^2} + b \frac{1-t^2}{1+t^2} = c$$

$$\frac{a2t + b(1-t^2)}{1+t^2} = c$$

$$2at + b - bt^2 - c - ct^2 = 0$$

$$(b+c)t^2 - 2at - b + c = 0$$

Пример. $\sin x + \cos x = 1$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$$

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1$$

$$\frac{2t+1-t^2}{1+t^2} = 1$$

$$2t+1-t^2-1-t^2=0$$

$$2t^2-2t=0$$

Пример. $\sin x + \cos x = 1$

$$2t^2 - 2t = 0$$

$$t(t - 1) = 0$$

$$t = 0$$

$$t - 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$$

$$t = 1$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$$

$$\frac{x}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Метод вспомогательного угла.

Пример.

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2$$

$$\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 1$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin x + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos x = 1$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

Метод вспомогательного угла.

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Метод вспомогательного угла.

$$a \sin x + b \cos x = c$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

т.к. $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$

то существует такой угол,

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Метод вспомогательного угла.

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos \varphi \cdot \sin x + \sin \varphi \cdot \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$-1 \leq \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1$$

$$x + \varphi = (-1)^n \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \varphi + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Метод вспомогательного угла.

Пример. $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$

$$a = 1, b = \sqrt{3}, c = 1 \quad \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$$

$$\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin x + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Метод вспомогательного угла.

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{3} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Пример.

$$\sqrt{2} \sin x + \sqrt{2} \cos x = 2$$

$$a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}, c = 2 \quad \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2 + 2} = 2$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = 1$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos x = 1$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$