Уравнение, линейное относительно sinx и cosx.

Урок №1

Классная работа.

Уравнение $a\sin x + b\cos x = c$

где $a \neq 0, в \neq 0$ *называют*

линейным относительно $\sin x$ и $\cos x$

Способы решения.

1. С помощью формул двойного угла.

$$\boxed{\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}$$

$$\boxed{\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}$$

Пример $3\sin x + 4\cos x = 5$

$$\boxed{\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}$$

$$\boxed{\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}$$

$$3\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 4\cdot(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}) = 5\cos^2\frac{x}{2} + 5\sin^2\frac{x}{2}$$

$$6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 4\cos^2\frac{x}{2} - 4\sin^2\frac{x}{2} - 5\cos^2\frac{x}{2} - 5\sin^2\frac{x}{2} = 0$$

$$6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 9\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} = 0$$

$$6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-9\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}=0$$

$$6tg\frac{x}{2}-9tg^2\frac{x}{2}-1=0$$

$$-6tg\frac{x}{2}+9tg^2\frac{x}{2}+1=0$$

$$\boxed{tg\frac{x}{2}=t}$$

$$9t^2-6t+1=0$$

$$(3t-1)^2=0$$

$$t=\frac{1}{3}$$

$$\boxed{tg\frac{x}{2}=\frac{1}{3}}$$

$$\boxed{\frac{x}{2}=arctg\frac{1}{3}+\pi n, n\in Z}$$

$$\boxed{x=2arctg\frac{1}{3}+2\pi n, n\in Z}$$

Решение уравнения в общем виде

$$a\sin x + b\cos x = c \qquad где\ a \neq 0, в \neq 0$$

$$\boxed{\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}} \qquad \boxed{\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}$$

$$a2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} + b\cdot(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}) = c(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2})$$

$$a2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} + b\cdot\cos^2\frac{x}{2} - b\cdot\sin^2\frac{x}{2} = c\cdot\cos^2\frac{x}{2} + c\cdot\sin^2\frac{x}{2}$$

$$a2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}+b\cdot\cos^2\frac{x}{2}-b\cdot\sin^2\frac{x}{2}=c\cdot\cos^2\frac{x}{2}+c\cdot\sin^2\frac{x}{2}$$

$$2a\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}+b\cdot\cos^2\frac{x}{2}-b\cdot\sin^2\frac{x}{2}-c\cdot\cos^2\frac{x}{2}-c\cdot\sin^2\frac{x}{2}=0$$

$$2a\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}+(b-c)\cdot\cos^2\frac{x}{2}-(b+c)\cdot\sin^2\frac{x}{2}=0$$

$$(b+c)\cdot\sin^2\frac{x}{2}-2a\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}-(b-c)\cdot\cos^2\frac{x}{2}=0$$

$$(b+c)\cdot tg^2\frac{x}{2}-2atg\frac{x}{2}-(b-c)=0$$

$$(b+c)\cdot tg^2\frac{x}{2}-2atg\frac{x}{2}-(b-c)=0$$

$$(b+c)\cdot tg^2\frac{x}{2}-2atg\frac{x}{2}+c-b=0$$

$$\boxed{tg\frac{x}{2}=t}$$

$$(b+c)\cdot t^2-2at+c-b=0$$

Пример $\boxed{\sin x + \cos x = 1}$

$$\boxed{\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}$$

$$\boxed{\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 0$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2} = 0$$

Пример $\boxed{\sin x + \cos x = 1}$

$$2\sin\frac{x}{2}\cdot\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\sin\frac{x}{2} = 0 \quad \textit{или} \quad \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = 0$$

$$\frac{x}{2} = \pi n, n \in Z \quad \textit{или} \quad 1 - tg\frac{x}{2} = 0$$

$$tg\frac{x}{2} = 1$$

$$\boxed{x = 2\pi n, n \in Z}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z}$$

2.Замена переменной.

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

$$\boxed{tg\frac{x}{2} = t}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Универсальная подстановка.

$$a\sin x + b\cos x = c$$

$$\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}} \quad \boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}} \quad \boxed{tg\frac{x}{2} = t}$$

$$a\frac{2t}{1+t^2} + b\frac{1-t^2}{1+t^2} = c$$

$$\frac{a2t + b(1-t^2)}{1+t^2} = c$$

$$2at + b - bt^2 - c - ct^2 = 0$$

$$(b+c)t^2 - 2at - b + c = 0$$

Пример. $\sin x + \cos x = 1$

$$\boxed{tg\frac{x}{2} = t}$$

$$\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}} \qquad \boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1$$

$$\frac{2t+1-t^2}{1+t^2} = 1$$

$$2t+1-t^2-1-t^2 = 0$$

$$2t^2 - 2t = 0$$

Пример. $$\sin x+\cos x=1$$

$$2t^2-2t=0$$

$$t(t-1)=0$$

$$t=0$$

$$tg\frac{x}{2}=0$$

$$\frac{x}{2}=\pi n, n\in Z$$

$$x=2\pi n, n\in Z$$

$$t-1=0$$

$$t=1$$

$$tg\frac{x}{2}=1$$

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$$

$$x=\frac{\pi}{2}+2k, k\in Z$$

Ответ: $2\pi n, n\in Z,\quad \frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$

Метод вспомогательного угла.

Пример.

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$$

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1$$

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}} \qquad \boxed{\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos x = 1$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{3}) = 1$$

Метод вспомогательного угла.

$$\sin(x+\frac{\pi}{3})=1$$

$$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$$

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$$

$$x=\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$

Метод вспомогательного угла.

$$a\sin x + b\cos x = c$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

т.к. $$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$$

то существует такой угол,

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Метод вспомогательного угла.

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\varphi\cdot\sin x + \sin\varphi\cdot\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\boxed{\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}} \qquad \boxed{-1 \le \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \le 1}$$

$$x+\varphi = (-1)^n \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi n, n\in Z$$

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} - \varphi + \pi n, n\in Z$$

Метод вспомогательного угла.

Пример. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$

$a = 1, b = \sqrt{3}, c = 1 \qquad \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+3} = 2$

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}} \qquad \boxed{\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$$

Метод вспомогательного угла.

$$\sin(x+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$$

$$x+\frac{\pi}{3}=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$$

$$x=-\frac{\pi}{3}+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$$

Ответ: $-\frac{\pi}{3}+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$

Пример.

$$\sqrt{2}\sin x+\sqrt{2}\cos x=2$$

$$a=\sqrt{2},b=\sqrt{2},c=2 \qquad \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2+2}=2$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=1$$

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}} \qquad \boxed{\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin x+\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x=1$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{4})=1$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{4})=1$$

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$$

$$x=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$$

$$x=\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$