Вычисление наибольших и наименьших значений функций

без применения производной.

11 класс.

1 вариант

№1.Какое из чисел входит во множество значений функции $y=\left(\frac{1}{6}\right)^x-12$?

1) -12; 2) -18; 3) -20; 4) -11.

№2. Укажите функцию, областью значений которой является промежуток $(0;+\infty)$

1) f(x)=sinx; 2) g(x)= $\sqrt[6]{x}$;

3) h(x)=lgx; 4) p(x)= 10^x .

2 вариант

№1.Какое из чисел входит во множество значений функции $y=0{,}5^x+2$?

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 0.

№2. Укажите функцию, областью значений которой является промежуток $[0;+\infty)$

1) f(x)=cosx; 2) g(x)= $\sqrt[8]{x}$;

3) h(x)=lnx; 4) p(x)= 7^x .

1 вариант

№3. Найдите множество значений функции $y = 4\sin x + 1$.

№4. Найдите множество значений функции $y = 5\cos x - 3\sin x$.

№5. Найдите наибольшее значение функции g(x)=$\log_2(16 - x^2)$.

2 вариант

№3. Найдите множество значений функции $y = 2\cos x - 1$.

№4. Найдите множество значений функции $y = 2\cos x + 5\sin x$.

№5. Найдите наименьшее значение функции h(x)=4^{3x^2+2}.

Ответы.

№1.Какое из чисел входит во множество значений функции $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x - 12$?

1) -12; 2) -18; 3) -20; **4) -11.**

№2. Укажите функцию, областью значений которой является промежуток $(0;+\infty)$

1) f(x)=sinx; 2) g(x)=$\sqrt[6]{x}$;

3) h(x)=lgx; **4) p(x)=** 10^x.

№1.Какое из чисел входит во множество значений функции $y = 0{,}5^x + 2$?

1) 1; 2) 2; **3) 3**; 4) 0.

№2. Укажите функцию, областью значений которой является промежуток $[0;+\infty)$

1) f(x)=cosx; **2) g(x)=**$\sqrt[8]{x}$ **;**

3) h(x)=lnx; 4) p(x)= 7^x .

Ответ.

№3. Найдите множество значений функции $y = 4\sin x + 1$.

Ответ: $\boxed{[-3;5]}$

№4. Найдите множество значений функции $y = 5\cos x - 3\sin x$.

Ответ: $\boxed{\left[-\sqrt{34};\sqrt{34}\right]}$

№5. Найдите наибольшее значение функции q(x)=$\log_2(16 - x^2)$.

Ответ: $\boxed{\mathbf{4.}}$

№3. Найдите множество значений функции $y = 2\cos x - 1$.

Ответ: $\boxed{[-3;1]}$

№4. Найдите множество значений функции $y = 2\cos x + 5\sin x$.

Ответ: $\boxed{\left[-\sqrt{29};\sqrt{29}\right]}$

№5. Найдите наименьшее значение функции h(x)=4^{3x^2+2}.

Ответ: $\boxed{\mathbf{16.}}$

Задание №1.

1 вариант

А. Найти наименьшее значение функции: $y = 2 \cdot 9^x - 3^{x+1} + 1$

Б. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

y=4cos2x+8cosx-11

2 вариант

А. Найти наименьшее значение функции: у=$4 \cdot 4^x - 2 \cdot 2^{x+1} - 1$

Б. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

y=2cos2x-4sinx+4

С. Найдите сумму натуральных значений функции

$$y = \log_3\left(65 + 8 \cdot 3^{|x|} - 9^{|x|}\right)$$

1 вариант.

А. Найти наименьшее значение функции

$$y = 2 \cdot 9^x - 3^{x+1} + 1$$

Решение.

$$y = 2 \cdot 3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 1$$

Пусть $3^x = t; t > 0$

Функция примет вид:

$$y = 2t^2 - 3t + 1$$

$$t_0 = \frac{3}{4}$$

$$y_0 = -\frac{1}{8}$$

Ответ: $y_{наим.} = -\frac{1}{8}$

2 вариант.

А. Найти наименьшее значение функции

$$y = 4 \cdot 4^{x} - 2 \cdot 2^{x+1} - 1$$

Решение.

$$y = 4 \cdot 2^{2x} - 4 \cdot 2^{x} - 1$$

Пусть $2^{x} = t > 0$

Функция примет вид:

$$y = 4t^{2} - 4t - 1$$

$$t_{0} = \frac{1}{2}$$

$$y_{0} = -2$$

Ответ: $y_{наим.} = -2$

1 вариант

Б. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = 4\cos 2x + 8\cos x - 11$$

Решение.

$$y = 8\cos^2 x + 8\cos x - 15$$

Пусть cosx=t; $t \in [-1;1]$.

Функция примет вид:

$$y = 8t^2 + 8t - 15$$

$$t_0 = -\frac{1}{2} \in [-1;1]$$

$y_0 = -17$ - наименьшее значение функции

При t=1 y=1 – наибольшее значение функции.

Ответ: $y_{наим.} = -17; y_{наиб.} = 1$

2 вариант

Б. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = 2\cos 2x - 4\sin x + 4$$

Решение.

$$y = -4\sin^2 x - 4\sin x + 6$$

Пусть sinx=t; $t \in [-1;1]$.

Функция примет вид:

$$y = -4t^2 - 4t + 6$$

$$t_0 = -\frac{1}{2} \in [-1;1]$$

$y_0 = 7$ - наибольшее значение функции

При t= 1 y= - 2 – наименьшее значение функции.

Ответ: $y_{наим.} = -2; y_{наиб.} = 7$

С. Найдите сумму натуральных значений функции

$$y = \log_3\left(65 + 8 \cdot 3^{|x|} - 9^{|x|}\right)$$

Решение.

Пусть $3^{|x|} = t > 0$

Функция примет вид:

$$y = \log_3\left(-t^2 + 8t + 65\right)$$

Рассмотрим функцию $z = -t^2 + 8t + 65$.

$t_0 = 4$; $z_0 = 81$

Значит, $y_{наиб.} = \log_3 81 = 4$

Натуральные значения функции: 1;2;3;4.

Ответ: 10.

Задание №2.

1 вариант

А. Найдите наибольшее целое значение функции

$$y = \frac{8}{5}\sqrt[3]{\sin^2 x + \cos 2x + 7}$$

Б. Найдите множество значений функции

$$y = \log_{0,1}\left(\frac{300}{1 + \lg(100 + x^2)}\right)$$

2 вариант

А. Найдите наибольшее целое значение функции

$$y = 25 \cdot 3^{\cos 4x \cos 3x + \sin 4x \sin 3x - 2}$$

Б. Найдите множество значений функции

$$y = \log_{0,2}\left(\frac{80}{13 + \log_5(125 + x^4)}\right)$$

С. Найдите количество целых чисел из области значений функции

$$y = 16\log_{\frac{1}{16}} \frac{\sin x + \cos x + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

1 вариант

А. Найдите наибольшее целое значение функции

$$y = \frac{8}{5}\sqrt[3]{\sin^2 x + \cos 2x + 7}\ .$$

Решение.

$$y = \frac{8}{5}\sqrt[3]{\cos^2 x + 7}$$

$$0 \le \cos^2 x \le 1$$

$$7 \le \cos^2 x + 7 \le 8$$

$$y_{наиб.} = \frac{8}{5}\sqrt[3]{8} = 3\frac{1}{5}$$

Ответ: 3 – наибольшее целое значение функции.

2 вариант

А. Найдите наибольшее целое значение функции

$$y = 25 \cdot 3^{\cos 4x \cos 3x + \sin 4x \sin 3x - 2}$$

Решение.

$$y = 25 \cdot 3^{\cos x - 2}$$

$$-1 \le \cos x \le 1$$

$$-3 \le \cos x - 2 \le -1$$

$$y_{наиб.} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}$$

Ответ: 8 – наибольшее целое значение функции.

1 вариант

Б. Найдите множество значений функции

$$y = \log_{0,1}\left(\frac{300}{1+\lg(100+\chi^2)}\right)$$

Решение.

$$100+\chi^2 \geq 100$$

$$1+\lg(100+\chi^2) \geq 3$$

Рассмотрим $z = \dfrac{300}{1+\lg(100+\chi^2)}$

$$E(z) = (0;100]$$

Рассмотрим $y = \log_{0,1} z$, где $z \in (0;100]$

$$E(y) = [-2;+\infty)$$

2 вариант

Б. Найдите множество значений функции

$$y = \log_{0,2}\left(\frac{80}{13+\log_5(125+x^4)}\right)$$

Решение.

$$125 + x^4 \geq 125$$

$$13 + \log_5\left(125 + x^4\right) \geq 16$$

Рассмотрим $z = \dfrac{80}{13+\log_5\left(125+x^4\right)}$

$$E(z) = \left(0;5\right]$$

Рассмотрим $y = \log_{0,2} z$, где $z \in \left(0;5\right]$

$$E(y) = \left[-1;+\infty\right)$$

С. Найдите количество целых чисел из области значений функции

$$y = 16\log_{\frac{1}{16}} \frac{\sin x + \cos x + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

Решение.

$$-\sqrt{2} \le \sin x + \cos x \le \sqrt{2}$$

$$2 \le \frac{\sin x + \cos x + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \le 4$$

Рассмотрим g=$\log_{\frac{1}{16}} p$, где $p \in [2;4]$

E(g)=$\left[-\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right]$

Рассмотрим y=16g, где g$\in\left[-\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right]$

E(y)=$[-8;-4]$

-8;-7;-6;-5;-4 – целые числа

Ответ: 5 целых чисел

Задание №3.

1 вариант

А. Найдите множество значений функции

$$y = \sqrt{2x-3} + \sqrt{4x-1}$$

Б. Найдите множество значений функции

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin(\frac{\pi}{2}\cos x)}$$

2 вариант

А. Найдите множество значений функции

$$y = \sqrt{6-3x} + \sqrt{4-4x}$$

Б. Найдите множество значений функции

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin(\frac{\pi}{2}\cos x)}$$

1 вариант

А. Найдите множество значений функции

$$y = \sqrt{2x-3} + \sqrt{4x-1}$$

Решение.

Д(у): $x \geq 1{,}5$

у(1,5)= $\sqrt{5}$

Е(у)= $\left[\sqrt{5};+\infty\right)$

2 вариант

А. Найдите множество значений функции

$$y = \sqrt{6-3x} + \sqrt{4-4x}$$

Решение.

Д(у): $x \leq 1$

у(1)= $\sqrt{3}$

Е(у)= $[\sqrt{3};+\infty)$

Б. Найдите множество значений функции

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin(\frac{\pi}{2}\cos x)}$$

Решение.

$$-\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}\cos x\le\frac{\pi}{2}$$

На $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ функция z=sint возрастает;$\Rightarrow$

$$-\sin\frac{\pi}{2}\le\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)\le\sin\frac{\pi}{2}$$

$$-1\le\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)\le 1$$

Функция $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{z}$ - убывает;$\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\le y\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

Ответ: E(y)=$\left[\frac{1}{2};2\right]$

Использование неравенств:

$a+1/a \geq 2$ при всех $a>0$

$a+1/a = 2$ при $a=1$

Задача:

Найти наименьшее значение функции:

- $F(x) = (X^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 5)/(x^2 - 2x + 2)$

Решение:

- $F(x) =(X^2-2x+2)^2 + 1)/(x^2-2x+2)$
- $F(x) =X^2-2x+2 + 1/(x^2-2x+2) \geq 2$

  (>0) (>0)

- $F(x) =2$ – наименьшее, если: $x^2-2x+2=1$

  $x^2-2x+1=0$

  $x=1$

- Значит: $F(1) = 2$
- **Ответ: 2.**

Векторный способ решения

Найти наименьшее значение функции

$$Y=\sqrt{(x-3)^2+1}+\sqrt{(X-2)^2+4}$$

Решение:

Введем векторы $\bar{a}\{3-X;1\}$ и $\bar{b}\{X-2;2\}$

Тогда $|\bar{a}|=\sqrt{(x-3)^2+1}$; $|\bar{b}|=\sqrt{(X-2)^2+4}$.

$(\bar{a}+\bar{b})=\{1;3\}$.

$|\bar{a}+\bar{b}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.

Воспользуемся неравенством: $|\bar{a}|+|\bar{b}|\geq|\bar{a}+\bar{b}|$

Имеем:

$$Y=|\bar{a}|+|\bar{b}|\geq|\bar{a}+\bar{b}|=\sqrt{10}.$$

То есть наименьшее значение функции: $\sqrt{10}$.

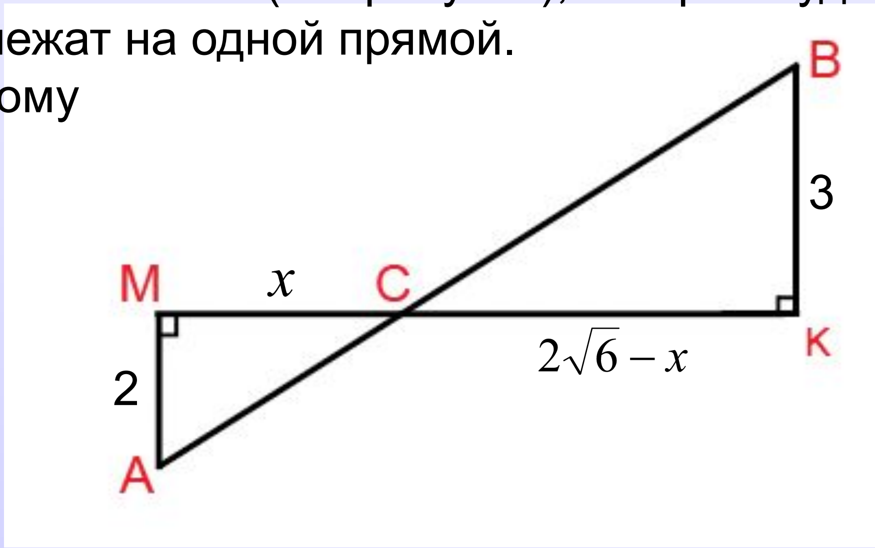
Геометрический способ решения

Найти наименьшее значение функции:

$$f(x) = \sqrt{2^2 + x^2} + \sqrt{3^2 + (2\sqrt{6} - x)^2}$$

Решение:

Данная функция задаёт длину ломаной АСВ (см. рисунок), которая будет наименьшей, если точки А, С, В лежат на одной прямой.
Тогда $\triangle$АМС подобен $\triangle$ВКС, поэтому



$$\frac{AM}{BK} = \frac{MC}{KC} \qquad \frac{2}{3} = \frac{x}{2\sqrt{6} - x}$$

$$x = \frac{4\sqrt{6}}{5} \qquad f\left(\frac{4\sqrt{6}}{5}\right) = 7$$

Ответ: 7.

Различные способы нахождения наибольшего и наименьшего значений функции

- С помощью производной
- Оценка
- Замена переменной
- Графический образ
- Введение вспомогательного угла
- Использование свойств монотонных функций
- Введение параметра
- С помощью неравенств
- Векторный способ
- Геометрический способ

Решить уравнение:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = -2x^2 + 6x - 9$$