Элементы теории вероятностей

Содержание

1. Теоретический материал с примерами задач.
2. Сборник задач для самостоятельного решения.

События

По отношению к некоторому испытанию (опыту) событие может быть *случайным* (может произойти, а может и не произойти в ходе этого испытания), *достоверным* (обязательно произойдёт) или *невозможным* (заведомо не произойдёт).

Элементарные события — это события, которые могут произойти в одном испытании и которые удовлетворяют следующим условиям:

1) обязательно происходит одно из них в результате испытания;

2) происходит только одно из них (взаимно исключают друг друга);

3) не разделяются на более простые события.

Несовместные события — события, которые могут произойти в одном испытании, причём появление одного из них исключает появление другого.

Если в одном испытании могут произойти события, шансы наступления которых одинаковы, то эти события называют *равновозможными*.

Примеры с решениями

1. Установить, достоверным, невозможным или случайным является событие:

1) в результате броска игрального кубика появилось 3 очка;

2) в Москве наступило 30 февраля;

3) на случайно вынутой из полного набора костяшке домино общее число очков меньше 13.

Решение.

1) Так как в результате бросания могут появиться: 1 очко, 2 очка, 3 очка, 4 очка, 5 очков или 6 очков, то появление 3 очков — случайное событие.

2) В григорианском календаре (по которому живут в нашей стране) отсутствует дата 30 февраля, поэтому данное событие — невозможное.

3) На костяшках домино самое большое общее число очков — 12 (что меньше, чем 13), значит, данное событие достоверное.

2. Перечислить элементарные исходы испытания и установить, являются ли они равновозможными:

1) на стол бросают отлитый из стали тетраэдр, грани которого пронумерованы числами от 1 до 4;

2) наугад вынимают из коробки, в которой находятся 1 белый и 2 чёрных шара, один шар и определяют его цвет.

Решение. 1) Элементарными исходами являются: падение тетраэдра на одну из граней, на которой записано число 1, 2, 3 или 4; так как тетраэдр имеет одинаковые грани (предположительно, литьё из стали не даёт внутренних полостей), то все исходы равновозможны.

2) Элементарных исходов при определении цвета шара два: появление белого и появление чёрного шара; эти исходы не являются равновозможными, так как чёрных шаров больше, чем белых.

3. Определить, являются события A и B совместными или несовместными:

1) A — появление 4 очков, B — появление чётного числа очков в результате одного броска игральной кости;

2) A — появление костяшки «пусто — пусто», B — появление костяшки «один — три» в результате изъятия одной костяшки из полного набора домино.

Решение. 1) Так как 4 — число чётное, то события A и B — совместные.

2) Так как данные костяшки различны, а вынимается одна костяшка, то события A и B несовместные.

Комбинации событий. Противоположное событие

Суммой (объединением) событий A и B, которые могут произойти в одном испытании, называют событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий. Сумму событий A и B обозначают $A + B$ или $A \cup B$.

Произведением (пересечением) событий A и B, которые могут произойти в одном испытании, называют событие, состоящее в наступлении и того и другого события. Произведение событий A и B обозначают AB или $A \cap B$.

Событие $\bar{A}$ называют противоположным событию A, если событие $\bar{A}$ происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A.

Примеры с решениями

1. Из полного набора домино изымают одну костяшку. Рассматриваются события: A — вынута костяшка с дублем, B — на вынутой костяшке присутствует половинка с шестью очками. Установить, в чём состоит событие $A + B$; событие AB.

Ответ. Событие $A + B$ состоит в изъятии костяшки либо с дублем, либо содержащей 6 очков; событие AB состоит в изъятии костяшки «шесть — шесть».

2. Установить, в чём состоит событие $\bar{A}$, если событие A — появление числа очков, не большего 5, в результате одного бросания игрального кубика.

Решение. Событие A состоит в появлении одного из чисел 1, 2, 3, 4 или 5. Все элементарные исходы испытания (их шесть): появление 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков. Значит, событие $\bar{A}$ состоит в появлении 6 очков ($\bar{A}$ наступает тогда, когда не наступает событие A).

Вероятность события

Вероятностью $P(A)$ события A в испытании с равновозможными элементарными исходами называют отношение числа исходов m, благоприятствующих событию A, к числу n всех элементарных исходов испытания:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \text{ где } m \leqslant n.$$

Если V — невозможное событие, U — достоверное событие, то $P(V) = 0$, $P(U) = 1$.

Примеры с решениями

1. На стол бросают игральные кубик и тетраэдр. Найти вероятность того, что на кубике выпадет чётное число очков, а на тетраэдре — 4 очка (на тетраэдре считывают очки с грани, касающейся поверхности стола).

Решение. Пусть событие A — на кубике выпало чётное число очков, а на тетраэдре — 4 очка.

Общее число возможных исходов испытания находим с помощью правила произведения: $n = 6 \cdot 4 = 24$ (каждая из 6 граней кубика может выпасть одновременно с любой из 4 граней тетраэдра). Благоприятствующими событию A исходами будут комбинации чётных чисел на кубике (их три) с числом 4 на тетраэдре, т. е. $m = 3$.

Таким образом, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$.

Ответ. $\frac{1}{8}$.

2. В ящике лежат 4 белых и 5 чёрных шаров. Наугад вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что все вынутые шары белые.

Решение. Пусть событие A — все три вынутых шара белые. Общее число возможных исходов испытания (троек шаров, выбранных из девяти имеющихся) равно $n = C_9^3 = \dfrac{9!}{6!3!} = 84$. Благоприятствующими событию A исходами будут тройки шаров, выбранных из имеющихся четырёх белых шаров, т. е. $m = C_4^3 = \dfrac{4!}{1!3!} = 4$. Таким образом, $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{4}{84} = \dfrac{1}{21}$.

Ответ. $\dfrac{1}{21}$.

Сложение вероятностей

Вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Иногда при решении задач проще найти сначала $P(\bar{A})$,

а затем $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Примеры с решениями

1. Из полного набора домино наугад извлекается одна костяшка. Какова вероятность того, что эта костяшка либо дубль, либо «один — шесть»?

Решение. Пусть событие A — появление дубля, а событие B — появление костяшки «один — шесть». В полном наборе домино (28 костяшек) семь дублей, поэтому $P(A) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$. Костяшка «один — шесть» в наборе единственная, поэтому $P(B) = \frac{1}{28}$. События A и B — несовместные, поэтому

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}.$$

Ответ. $\frac{2}{7}$.

2. Спортсмен покупает для игры в настольный теннис 4 ракетки. Продавец, не выбирая, берёт с полки 4 ракетки. Найти вероятность того, что среди купленных ракеток будет хотя бы одна с красным покрытием, если на полке лежали 10 ракеток с красным и 6 ракеток с зелёным покрытием.

Решение. Пусть событие A — среди купленных ракеток есть хотя бы одна с красным покрытием, тогда противоположное ему событие $\bar{A}$ — среди купленных ракеток нет ни одной с красным покрытием (т. е. все они с зелёным покрытием). Найдём предварительно вероятность события $\bar{A}$.

Число способов, которыми из 16 имеющихся на полке ракеток $(10 + 6 = 16)$ можно выбрать 4 ракетки, равно C_{16}^4, т. е. $n = C_{16}^4$. Благоприятствующими событию $\bar{A}$ будут все четвёрки ракеток, выбранных из ракеток с зелёным покрытием. Их число $m = C_6^4$. Таким образом,

$$P(\bar{A}) = \frac{m}{n} = \frac{C_6^4}{C_{16}^4} = \frac{\dfrac{6!}{4!2!}}{\dfrac{16!}{4!12!}} = \frac{6!12!}{2!16!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16} = \frac{3}{364}.$$

Тогда $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \dfrac{3}{364} = \dfrac{361}{364}$.

Ответ. $\dfrac{361}{364}$.

Независимые события. Умножение вероятностей

События A и B называют *независимыми*, если выполняется равенство:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \quad (1)$$

Независимые события появляются в независимых испытаниях. Если независимость испытаний не очевидна, то независимость событий A и B проверяется с помощью формулы (1).

Примеры с решениями

1. Установить, являются ли события A и B независимыми, если:

1) $P(A)=\frac{1}{8}$, $P(B)=\frac{4}{5}$, $P(AB)=\frac{1}{10}$;

2) $P(A)=0{,}25$, $P(B)=0{,}4$, $P(AB)=0{,}01$.

Решение. 1) Так как $P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{5}=\frac{1}{10}=P(AB)$, то события A и B являются независимыми.

2) Так как $P(A)\cdot P(B)=0{,}25\cdot 0{,}4=0{,}1\neq 0{,}01=P(AB)$, то события A и B не являются независимыми.

2. Вероятность попадания первым стрелком в цель при одном выстреле равна 0,7, а вероятность попадания в цель вторым стрелком при одном выстреле равна 0,8. Оба стрелка делают по одному выстрелу в цель. Найти вероятность поражения цели обоими стрелками.

Решение. Событие A (попадание первым стрелком в цель при одном выстреле) и событие B (попадание вторым стрелком в цель при одном выстреле) происходят в независимых испытаниях, поэтому события A и B независимые. Вероятность наступления и события A, и события B равна $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$.

Ответ. 0,56.

Задания для самостоятельной работы

События

1. Установить, каким событием (случайным, достоверным или невозможным) является событие:
1) в результате одного броска игрального кубика появилось число 10;
2) наугад вынутая из колоды карта оказалась восьмёркой треф;
3) наугад названное натуральное число оказалось целым числом.

2. Установить, каким событием (случайным, достоверным или невозможным) является событие:
1) наугад названное рациональное число оказалось натуральным числом;
2) наугад вынутый из коробки с цветными карандашами один карандаш оказался простым;
3) изъятая из полного набора домино костяшка оказалась «пусто — шесть».

3. Перечислить все элементарные исходы испытания и установить, являются ли они равновозможными, если испытание состоит в следующем:

1) из всех карт бубновой масти, взятых из одной полной колоды (36 листов), извлекается одна карта и определяется её название;

4. Перечислить элементарные исходы испытания и установить, являются ли они равновозможными, если испытание состоит в следующем:

1) из коробки, в которой находятся 2 красных и 4 чёрных шара, извлекают один из них и определяют его цвет;

2) из всех карт трефовой масти, взятых из одной полной колоды (36 листов), извлекают одну карту и определяют её название.

5. Установить, являются совместными или несовместными события A и B, если:
1) A — выпадение 3 очков, B — выпадение нечётного числа очков в результате одного броска игральной кости;
2) A — появление валета, B — появление карты червовой масти в результате одного изъятия одной карты из полной колоды;
3) деревянный цилиндр бросают на пол и определяют фигуру, которой цилиндр касается пола: событие A — касается только отрезком, событие B — касается кру́гом.

6. Установить, являются совместными или несовместными события B и C, если:
1) B — появление карты с картинкой, C — появление карты червовой масти в результате одного изъятия одной карты из полной колоды карт;
2) B — падение кнопки плашмя, C — падение кнопки на остриё в результате одного бросания кнопки;
3) B — выпадение 4 очков, C — выпадение числа очков, не меньшего 4, в результате одного бросания игральной кости.

Комбинации событий. **Противоположное событие**

1. Из колоды карт вынимают одну карту. Событие A — изъятие карты с числом, B — изъятие карты червовой масти. В чём состоит событие $A + B$; событие AB?

2. Из колоды карт вынимают одну карту. Событие A — изъятие карты трефовой масти, B — изъятие карты с картинкой. В чём состоит событие $A + B$; событие AB?

3. Наугад названо одно из первых 12 натуральных чисел. Событие A — названо чётное число, B — названо число, кратное 3. В чём состоит событие $A + B$; событие AB?

4. Наугад названо одно из первых 18 натуральных чисел. Событие A — названо число, не меньшее 11, событие B — названо число, кратное 4. Установить, в чём состоит событие $A + B$; событие AB.

5. Бросают два игральных кубика — белый и красный. Событие A — на белом кубике появилось число очков, меньшее 3; событие B — на красном кубике выпало 6 очков. Установить, в чём состоит событие $A + B$; событие AB.

6. Бросают два игральных кубика — жёлтый и белый. Событие A — на жёлтом кубике выпало 5 очков; событие B — на белом кубике выпало число очков, не меньшее 5. В чём состоит событие $A + B$; событие AB?

7. Бросают два игральных кубика и рассматривают события: A — на одном кубике появилось число очков, меньшее 3; B — на другом кубике выпало 6 очков. Установить, в чём состоит событие $A + B$; событие AB.

8. Бросают два игральных кубика и рассматривают события: A — на одном кубике выпало 2 очка; B — на другом кубике выпало число очков, не меньшее 5. Установить, в чём состоит событие $A + B$; событие AB.

9. Определить событие, являющееся противоположным событию:

1) в результате броска игрального кубика выпало чётное число очков;

2) из колоды карт изъята дама чёрной масти;

3) хотя бы на одном из брошенных двух игральных кубиков появилось 6 очков.

10. Определить событие, являющееся противоположным событию:

1) из колоды карт вынут валет красной масти;

2) в результате броска игрального кубика выпало число очков, меньшее 5;

3) хотя бы при одном из двух выстрелов мишень была поражена.

11. Пусть A и B — произвольные события, которые могут произойти в одном испытании. Записать событие:

1) противоположное событию B;

2) состоящее в том, что произошло хотя бы одно из этих событий;

3) состоящее в том, что произошли оба этих события.

12. Пусть события C и D — произвольные события, которые могут произойти в одном испытании. Записать событие:

1) противоположное событию C;

2) состоящее в том, что произошли оба события;

3) состоящее в том, что произошло хотя бы одно из событий.

13. Пусть A и B — произвольные события, которые могут произойти в одном испытании. Записать событие, состоящее в том, что произошло только событие B, и проиллюстрировать это событие с помощью кругов Эйлера.

14. Пусть C и D — произвольные события, которые могут произойти в одном испытании. Записать событие, состоящее в том, что произошло только событие C, и проиллюстрировать это событие с помощью кругов Эйлера.

Вероятность события

1. Найти вероятность того, что левая страница наугад раскрытой книги (объёмом 368 страниц) будет иметь:
1) чётный номер; 2) нечётный номер; 3) номер, кратный числу 100; 4) однозначный номер.

2. Найти вероятность того, что левая страница наугад раскрытой книги (объёмом 288 страниц) будет иметь:
1) нечётный номер; 2) чётный номер;
3) номер, кратный 50; 4) однозначный номер.

3. Какова вероятность того, что изъятая наугад из колоды в 36 листов карта окажется:
1) или дамой треф, или королём красной масти;
2) или валетом любой масти, или королём пик?

4. Какова вероятность того, что изъятая наугад из колоды в 36 листов карта окажется:
1) или дамой червей, или валетом чёрной масти;
2) или шестёркой треф, или дамой любой масти?

5. В коробке находятся 5 белых, 7 чёрных и 3 красных шара. Наугад вынимается один шар. Найти вероятность того, что этот шар:

1) или белый, или красный;

2) не белый;

3) не белый и не чёрный.

6. В коробке находятся 6 чёрных, 8 красных и 4 белых шара. Наугад вынимается один шар. Найти вероятность того, что этот шар:

1) или чёрный, или белый;

2) не чёрный; 3) не красный и не белый.

7. Найти вероятность того, что правая страница наугад раскрытой книги (объёмом 368 страниц) будет иметь:

1) однозначный номер, кратный 3;

2) двузначный номер, кратный 11;

3) номер, кратный 25; 4) двузначный номер.

8. Найти вероятность того, что левая страница наугад раскрытой книги (объёмом 288 страниц) будет иметь:

1) однозначный номер, кратный 4;

2) двузначный номер, кратный 13;

3) номер, кратный 75; 4) трёхзначный номер.

9. Брошены два игральных кубика — белый и жёлтый. Найти вероятность того, что:

1) на обоих кубиках выпало число 2;

2) произведение выпавших чисел равно 8;

3) на белом кубике выпало число, большее 4, а на жёлтом — меньшее 4;

4) на кубиках выпали одинаковые числа, не меньшие 4.

10. Брошены два игральных кубика — белый и красный. Найти вероятность того, что:

1) на белом кубике выпало число 3, а на красном — число 6;

2) сумма выпавших чисел равна 4;

3) на белом кубике выпало число, не меньшее 5, а на красном — меньшее 3;

4) на обоих кубиках выпали одинаковые числа, не большие 3.

11. В ящике лежат 18 гаек, среди которых 4 медные, а остальные — стальные. Наугад берут две гайки. Какова вероятность того, что вынуты:

1) две медные гайки; 2) две стальные гайки;

3) одна гайка стальная, а другая — медная?

12. В вазе стоят 16 астр, среди которых 5 красных, а остальные — белые. Наугад вынимают две астры. Какова вероятность того, что вынуты:

1) две белые астры; 2) две красные астры;

3) одна белая и одна красная астры?

Сложение вероятностей

1. Вероятность попадания стрелком по мишени при одном выстреле равна 0,85. Найти вероятность того, что, выстрелив по мишени, стрелок промахнётся.
2. Самонаводящаяся зенитная установка поражает цель при одном выстреле с вероятностью 0,68. Найти вероятность того, что цель не будет поражена в результате одного выстрела этой установки.
3. Вероятность выигрыша по одному билету в некоторой лотерее равна $4 \cdot 10^{-6}$. Какова вероятность того, что один приобретённый билет этой лотереи окажется невыигрышным?
4. Вероятность выигрыша квадроцикла при покупке одного билета спортивной лотереи равна $6 \cdot 10^{-4}$. Найти вероятность того, что по одному купленному билету этой лотереи квадроцикл не будет выигран.
5. Найти вероятность того, что в результате одного бросания игральной кости появится число, отличное от 3.
6. Найти вероятность того, что в результате одного броска игральной кости появится число, отличное от 1.

7. В ящике находятся 7 белых, 13 чёрных и 5 красных шаров. Наугад вынимают один шар. Найти вероятность того, что этот шар:
1) либо белый, либо красный; 2) не красный.
Решить задачу двумя способами.

8. В ящике находятся 8 чёрных, 15 белых и 7 красных шаров. Наугад вынимают один шар. Найти вероятность того, что этот шар:
1) либо чёрный, либо красный; 2) не чёрный.

9. В ящике лежат 4 красных и 6 белых шаров. Наугад вынимают два шара. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы один:
1) красный шар; 2) белый шар.

10. В ящике лежат 6 белых и 8 чёрных шаров. Наугад вынимают два шара. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы один:
1) белый шар; 2) чёрный шар.

11. В сетке лежат 5 красных, 8 зелёных и 7 жёлтых мячей. Наугад вынимают два мяча. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы один зелёный мяч.

12. В коробке лежат 6 белых, 7 красных и 9 чёрных кубиков. Наугад вынимают 2 кубика. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы один белый кубик.

13. Из полной колоды карт (36 листов) извлекают наугад три карты. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы одна карта трефовой масти.

14. Из полной колоды карт (36 листов) извлекают наугад 4 карты. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы одна карта бубновой масти.

Независимые события. Умножение вероятностей

1. Установить, являются ли события A и B независимыми, если:

1) $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{2}{15}$, $P(AB) = 0{,}4$;

2) $P(A) = 0{,}15$, $P(B) = 0{,}6$, $P(AB) = 0{,}09$.

2. Установить, являются ли события C и D независимыми, если:

1) $P(C) = \frac{5}{12}$, $P(D) = \frac{3}{5}$, $P(CD) = 0{,}25$;

2) $P(C) = 0{,}8$, $P(D) = 0{,}12$, $P(CD) = 0{,}96$.

3. Бросают два игральных кубика — жёлтый и зелёный. Рассматривают события: A — на жёлтом кубике выпало 2 очка, B — на зелёном кубике выпало число очков, кратное 3. С помощью формулы (1) показать, что события A и B являются независимыми.

4. Бросают два игральных кубика: белый и красный. Рассматривают события: A — на белом кубике выпало нечётное число очков, B — на красном кубике выпало число очков, большее 4. С помощью формулы (1) показать, что события A и B являются независимыми.

5. На карточках записаны первые двадцать натуральных чисел (по одному числу на карточке). Случайным образом выбирают одну из карточек и рассматривают события:

1) A — на карточке записано чётное число, B — на карточке записано число, кратное 6;

2) A — на карточке записано нечётное число, B — на карточке записано число, кратное 5.

Выяснить, являются ли события A и B независимыми.

6. Наугад называют одно из первых восемнадцати натуральных чисел и рассматривают события:

1) B — названо число, кратное 3, C — названо число, не меньшее 15;

2) B — названо нечётное число, C — названо число, кратное 7.

Выяснить, являются ли события B и C независимыми.

7. Вероятность того, что баскетболист при одном броске попадёт в корзину, равна 0,75. Этот баскетболист бросает в корзину мяч дважды. Найти вероятность того, что он попадёт в корзину:
1) оба раза; 2) хотя бы один раз.

8. Вероятность того, что вынута бракованная деталь из партии деталей, равна 0,01. Наугад вынимают одну деталь. Затем, вернув её обратно, наугад вынимают ещё одну деталь. Найти вероятность того, что:
1) оба раза были вынуты бракованные детали;
2) хотя бы один раз была вынута бракованная деталь.

9. В первом ящике находятся 6 красных и 8 чёрных шаров, а во втором — 8 красных и 3 чёрных. Наугад из каждого ящика вынимают по одному шару. Найти вероятность того, что:
1) оба вынутых шара красные;
2) оба вынутых шара чёрные;
3) хотя бы один шар красный;
4) хотя бы один шар чёрный.

10. В одной сетке лежат 7 белых и 10 красных мячей, а в другой — 5 белых и 8 красных. Наугад из каждой сетки вынимают по одному мячу. Найти вероятность того, что:
1) оба вынутых мяча белые;
2) оба вынутых мяча красные;
3) хотя бы один мяч белый;
4) хотя бы один мяч красный.

11. Вероятность попадания в цель первым стрелком при одном выстреле равна 0,75, вторым — 0,8, третьим — 0,9. Все стрелки сделали по одному выстрелу в цель. Найти вероятность того, что:

1) все стрелки попали в цель;
2) все стрелки промахнулись;
3) хотя бы один попал в цель;
4) хотя бы один промахнулся.

12. Три баскетболиста по очереди по одному разу бросают мяч в корзину. Вероятность попадания в корзину при одном броске у каждого баскетболиста равна 0,6; 0,9 и 0,85 соответственно. Найти вероятность того, что:

1) все баскетболисты попали в корзину;
2) все баскетболисты промахнулись;
3) хотя бы один попал в корзину;
4) хотя бы один промахнулся.

Спасибо за внимание!