



# МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Выполнил работу:

учитель математики

Киричевский Алексей

Ростиславович

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Уравнения занимают значительное место в курсе математики средней школы. Остановимся лишь на алгебраических уравнениях, которые разобьем на три группы:

- 1) полиномиальные уравнения вида  $P_n(x) = 0$ , где  $P_n(x)$  — многочлен  $n$ -й степени относительно  $x$ ;
- 2) дробно-рациональные уравнения, т.е. содержащие в качестве двух компонент частные двух многочленов;
- 3) иррациональные уравнения.

Для ряда приемов даны небольшие теоретические обоснования. Приведено 30 приемов, иллюстрированных более чем 36 примерами. Не надо думать, что приведенный в конкретном примере прием является наиболее рациональным для решения данного примера. Просто надо принять к сведению существование такого подхода к решению уравнений.

Одни и те же подходы (применение тригонометрии, использование однородности, разложение на множители и др.) находят применение не только при решении рациональных, дробно-рациональных, иррациональных уравнений, но и при решении трансцендентных уравнений, неравенств, систем.

# ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

- Под алгебраическим уравнением принято понимать уравнение, которое может быть записано в виде  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ , где  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  – заданные числа,  $x$  – неизвестное.  $n$  – наибольшую степень неизвестного – называют степенью алгебраического уравнения.

# ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- **Алгоритм решения линейного уравнения** в общем виде:

Дано:  $ax + b = c$  (или  $ax + b = 0$ ) в зависимости от вида уравнения. Как же это сделать?

Давайте рассмотрим пример:  $2x + 1 = 5$ . Здесь  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $c = 5$ . Все коэффициенты и свободный член — положительные числа.

Сначала уравнение преобразуем к виду  $ax = c - b$ . В данном случае:  $2x = 5 - 1$ .

Несмотря на то, что  $a$  и  $b$  могут быть любыми числами, их значения влияют на количество решений уравнения.

Возьмем  $a = 0$  и  $b = 0$ . Тогда уравнение примет вид  $0x = c$ . Если  $c = 0$ , то уравнение имеет бесконечно много решений.

Если  $a = 0$  и  $b \neq 0$ , то уравнение не имеет решений.

Если  $a \neq 0$ , то уравнение имеет единственное решение:  $x = \frac{c - b}{a}$ .

Теперь выполняем перенос:  $2x = 5 - 1$ . Здесь  $2$  — коэффициент при  $x$ ,  $5$  — свободный член,  $1$  — коэффициент при  $x$ .

Итак,  $2x = 4$ . Чтобы найти  $x$ , нужно разделить обе части уравнения на  $2$ .

Вот и все — решение найдено!  $10x = 20 \Rightarrow x = 2$

Осталось найти решение по уже известной схеме:  $x = 0$

Узнали? Самое что ни на есть линейное уравнение. Решение которого:  $25x = 4, x = 4/25 = 0.16$

Важно помнить, что если коэффициенты  $a$  и  $b$  имеют не нулевые значения, уравнение предстоит решить, чтобы вывести конечное выражения для переменной.

# КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Например, при решении квадратного уравнения  $4x^2 - 9 = 0$  можно использовать свободный член уравнения и перенести его в правую часть уравнения, решая его с помощью теоремы Виета:

распределительного свойства сложения всегда будет. Достаточно и того, что дано в определении. Сумма корней = приведенного квадратного трехчлена  $x^2 + bx + a = 0$  равна  $-b$ , а произведение корней равно  $a$ . Важно другое: по знаку дискриминанта можно определить, сколько корней имеет квадратное уравнение. Дискриминант для первого уравнения найдем дискриминант:

Вспомогательное уравнение использовать любую из этих формул — получится одно и то же число. Если дискриминант отрицательный, то корней нет. Если равен нулю, то один корень. Если положительный, то два корня. Вид: несложно заметить, что в этих уравнениях отсутствует один из слагаемых. Такие квадратные уравнения называются неполными. Если  $b = 0$ , то уравнение имеет два корня. Найдем их:

А уравнение превращается в более простое уравнение, стандартные, в них даже не требуется считать дискриминант. Если  $c = 0$ , то уравнение имеет один корень. Если  $c \neq 0$ , то уравнение имеет два корня. Найдем их: для квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  корни выполняются неравенство  $(-c/a) \geq 0$ , корней будет два. Формула дана выше:  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

Уравнение  $3x^2 + 0x + c = 0$  называется неполным квадратным уравнением, если  $b = 0$ . Дискриминант отрицательный, корней нет. Остаток последнее уравнение? Да, корни всегда существуют. Если  $c = 0$ , то коэффициент при  $x$  и свободный член равен нулю, многочлен существует. Дискриминант не предобавляется к квадратному уравнению. Дискриминант от двух случаев, возможно, совсем, тяжелый вариант, но для свободных элементов использовать формулы. Например,  $(-c/a) \geq 0$ . Дискриминант в данном уравнении равен нулю. Обратим внимание, что коэффициент уравнения можно выразить величину  $x^2$  и посмотреть, что стоит с другой стороны от знака равенства. Уравнение имеет единственный корень: коэффициент. Кстати, если набить руку, через некоторое время если там положительное число — корней будет два. Если отрицательное — корней не будет.

Если отрицательное число — корней не будет. Такие операции вы будете выполнять в общем  $4x^2 - 9 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = 9/4 \Rightarrow x_1 = 3/2 = 1,5; x_2 = -1,5$ .

# ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Приближаем уравнение типа  $\frac{x^2 - 2x - 6}{x^2 - 2x - 3} = \frac{x - 6}{x - 2}$  к обыкновенному уравнению, если числитель дроби равен нулю, а знаменатель дроби не равен нулю. Переносим все слагаемые в одну сторону и приводим дроби к общему знаменателю:

$$\frac{x^2 - 2x - 6}{x^2 - 2x - 3} = \frac{x - 6}{x - 2} \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 6}{x^2 - 2x - 3} - \frac{x - 6}{x - 2} = 0$$

где переносим все слагаемые в одну сторону и приводим дроби к общему знаменателю (то есть  $x$  в таких уравнениях — это есть переменная).  
 Находим значения переменной, при которых знаменатель обращается в нуль, и исключаем их из области допустимых значений:

В общем виде дробно-рациональные уравнения решают по следующей схеме:

- 1) Все слагаемые переносим в одну сторону.
- 2) Дроби приводим к НОЗ (наименьшему общему знаменателю).

Теперь находим значения переменной, при которых числитель обращается в нуль:  
 Значение переменной, при котором знаменатель обращается в нуль, исключаем из ОДЗ:  
 $x \neq 3$ .

Уравнение в случаях дробно-рациональных уравнений решаем тем же способом, что и обыкновенные уравнения. Если левая часть уравнения равна нулю, а знаменатель не равен нулю, то уравнение равно нулю. Если левая часть уравнения не равна нулю, а знаменатель равен нулю, то уравнение не имеет смысла. Если левая часть уравнения не равна нулю, а знаменатель не равен нулю, то уравнение равно нулю.

Найдем с рассмотрения примеров общего случая.  
 Оба корня удовлетворяют условиям  $x \neq 2, x \neq -4$ . Ответ: 5; -6.  
 Ответ:  $x$  — любое число, кроме 3.

# МЕТОД ГРУППИРОВКИ

$$2) a^2x + a^2y + a^2b^2 + a^2b^2 = b - b^3 =$$

Способы группировки: первое слагаемое со вторым, второе с третьим, четвертое с пятым и шестым. Группируем первое слагаемое со вторым, третье – с четвертым: между скобками всегда ставим знак «+», «-».

Объединение членов многочлена в группы, имеющие общий множитель, и вынесение из каждой группы общего множителя (в одной из групп общего множителя может не быть). Скобки выносим за скобки (общий множитель «а», «х» и «у»).

Общий множитель выносим за скобки:  $a^2(x + y + b^2 + b^2) = a^2(x + y + 2b^2)$ .

2) Вынесение полученного общего для всех групп множителя за скобки.

$$= a^2(x + y + 2b^2)$$

Общий множитель  $(4 - y)$  выносим за скобки:

Общим множителем группировать скобки слагаемых. Например, первое – с четвертым, второе – с

$$= (4 - y)(x - 1)$$

пятым, третье – с шестым:

В группировке скобки слагаемых первое слагаемое и второе – общие множители четвертой скобки,

ровно столько же должно быть с третьим и четвертым. Если общий множитель

совпадает с первым слагаемым, то общий множитель в скобках, во второй скобке общего множителя нет,

после вынесения общего множителя за скобки остается единица (+1 или -1).

$$\text{Общий множитель } (a - 3) \text{ выносим за скобки: } (a - b) + b^2(a - b) =$$

Общий множитель  $(a - b)$  выносим за скобки. Не забываем поставить единицу на место

(при  $b^2$ ) любом способе группировки ответ получается одинаковый (от перестановки мест

множителей произведение не меняется).  $= (a - b)(a^2 + 1 + b^2)$ .

# МЕТОД ПОДСТАНОВКИ

- Если в уравнении встречается повторяющееся выражение, которое обозначим новой переменной, тем самым упрощая вид уравнения. В некоторых случаях очевидно что удобно переписать уравнение иначе, а именно обозначить.

$(x^2 + 2x)^2 - (x + 2x + 1) = 55$ , сразу увидим подстановку  $x + 2x = t$ . Имеем  $t^2 - t - 56 = 0$ ,  $t_1 = -7, t_2 = 8$ . Осталось решить  $x^2 + 2x = -7$  и  $x^2 + 2x = 8$ . В результате получаем, что первое уравнение не имеет корней, а у второго  $x = 0$ . Далее решаем его как дробно-рациональное уравнение:  $\frac{x^2 + x - 5}{x} = t$  получаем  $t^2 + 4t + 3 = 0$ . Далее решаем его как дробно-

рациональное уравнение:  $\frac{t^2 + 4t + 3}{t} = 0$ ;

$$t^2 + 4t + 3 = 0 \text{ и } t \neq 0; t_1 = -3, t_2 = -1.$$

$$\text{Тогда } \frac{x^2 + x - 5}{x} = -3 \text{ и } \frac{x^2 + x - 5}{x} = -1.$$

Решаем получившиеся уравнения:

$$\frac{x^2 + x - 5 + 3x}{x} = 0,$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0,$$

$$x_1 = -5, x_2 = 1; x \neq 0.$$

$$\text{Ответ: } -5; 1; -1 \pm \sqrt{6}.$$

$$\frac{x^2 + x - 5 + x}{x} = 0$$

$$x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$x_3 = -1 - \sqrt{6}, x_4 = -1 + \sqrt{6}; x \neq 0$$

В более сложных случаях подстановка видна лишь после преобразований.

# МЕТОД ПОДБОРА

- При решении уравнений высших степеней рациональные корни уравнения

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$  ищем в виде  $\frac{p}{q}$ , где  $p$  – делитель  $a_0$ ,  $q$  – делитель  $a_n$ ,

$p$  и  $q$  взаимно просты,  $p \in Z, q \in N$ .

Решить уравнение  $x^3 - x^2 - 8x + 6 = 0$ .

Решение. Здесь  $a_n = 1, a_0 = 6$ . Поэтому, если данное уравнение имеет рациональные корни, то их следует искать среди делителей числа 6:  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ . Проверкой убеждаемся, что  $x = 3$ , т.к.  $27 - 9 - 24 + 6 = 0$ . Делим  $x^3 - x^2 - 8x + 6$  на  $x - 3$ , получаем  $x^2 + 2x - 2$ . Тогда данное уравнение можно представить в виде  $(x - 3)(x^2 + 2x - 2) = 0$ . Отсюда находим, что  $x_1 = 3$  – решение, найденное подбором,

$x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}$  – из уравнения  $x^2 + 2x - 2 = 0$ .

Ответ: 3;  $-1 \pm \sqrt{3}$ .

# УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ МОДУЛЬ

- При решении уравнений с модулем используется определение модуля и метод интервалов.  
Задача. Решить уравнение  $|1 - 2x| + |3x + 2| + |x| = 5$ .

Решение. Приравниваем к нулю выражения, стоящие под знаком модуля, отмечаем на числовой оси полученные значения, исследуем уравнение в каждом из полученных интервалов:



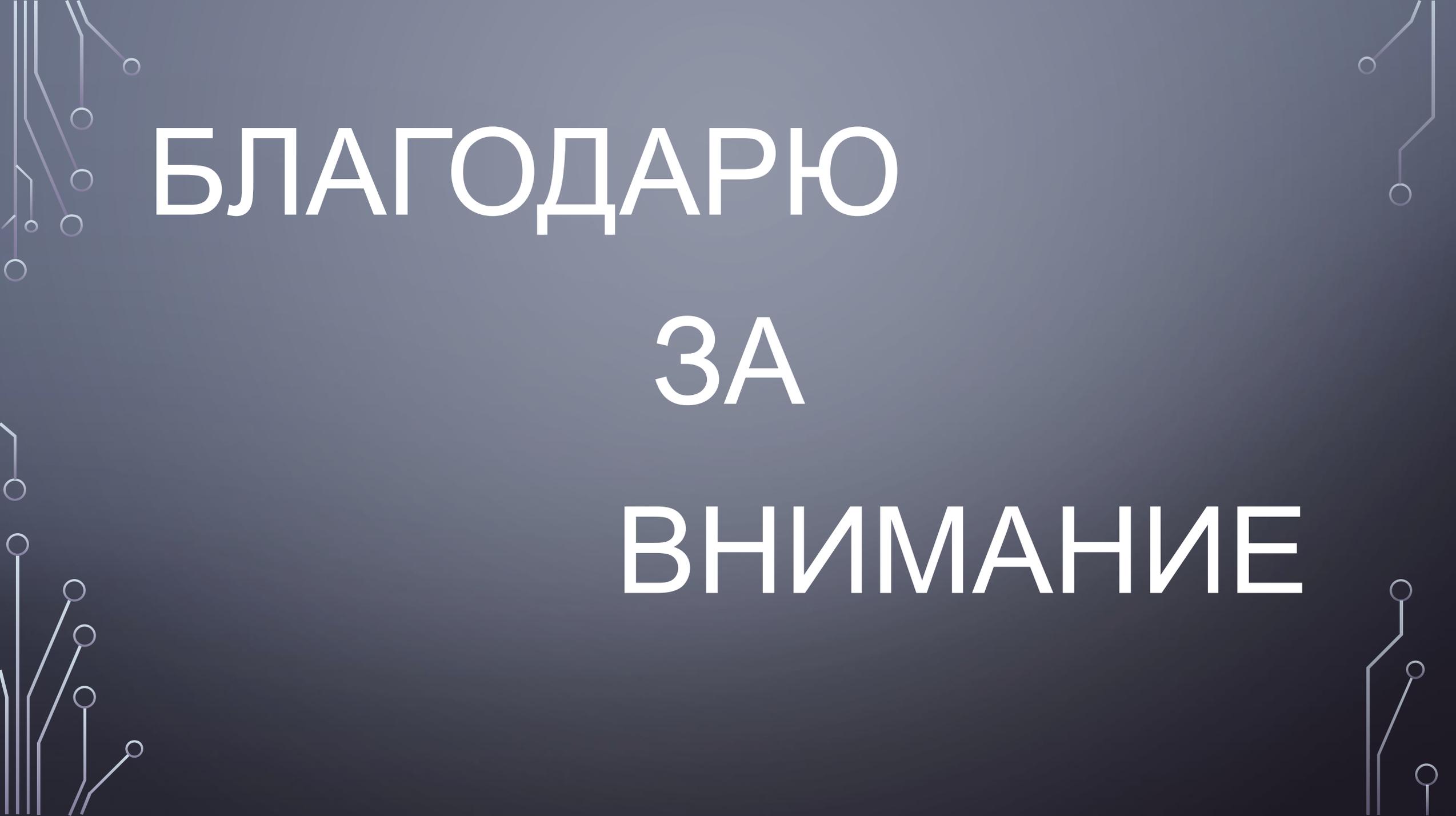
- a) если  $x \in (-\infty; -\frac{2}{3})$ , то  $1 - 2x > 0, 3x + 2 < 0, x < 0$  и уравнение переписывается так:  
 $1 - 2x - 3x - 2 - x = 5$ , т.е.  $-6x = 6, x = -1 \in (-\infty; -\frac{2}{3})$ .
- b) Если  $x \in [-\frac{2}{3}; 0)$ , то  $1 - 2x > 0, 3x + 2 \leq 0, x < 0$  и поэтому имеем  $1 - 2x + 3x + 2 - x = 5$ , и т.к.  $3 \neq 5$ , то в промежутке  $[-\frac{2}{3}; 0)$  корней нет;
- c) если  $x \in [0; \frac{1}{2})$ , то получаем  $1 - 2x + 3x + 2 + x = 5$ , т.е.  $2x = 2, x = 1 \notin [0; \frac{1}{2})$ ;
- d) Если  $x \in [\frac{1}{2}; \infty)$ , то  $-1 + 2x + 3x + 2 + x = 5, 6x = 4, x = \frac{2}{3} \in [\frac{1}{2}; \infty)$ .

Ответ:  $-1; \frac{2}{3}$ .

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сколько различных методов присутствуют в математике. И все они по-своему уникальны. Для каждого уравнения можно подобрать несколько методов, но в основном, чтобы он не нарушал целостности условия.

Но самое главное – это видеть какой метод стоит применять. А для этого нужно знать их все.

The image features a dark blue gradient background with white decorative circuit-like lines in the corners. The text is centered and reads: 

БЛАГОДАРЮ

ЗА

ВНИМАНИЕ