МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Выполнил работу:

учитель математики

Киричевский Алексей Ростиславович

ПРЕДИСЛОВИЕ

- Уравнения занимают значительное место в курсе математики средней школы. Остановимся лишь на алгебраических уравнениях, которые разобьем на три группы:

1)полиномиальные уравнения вида $P_n\,(x)\;=\;0$, где P_n (x) — многочлен n-й степени относительно x;

2)дробно-рациональные уравнения, т.е. содержащие в качестве двух компонент частные двух многочленов;

3)иррациональные уравнения.

Для ряда приемов даны небольшие теоретические обоснования. Приведено 30 приемов, иллюстрированных более чем 36 примерами. Не надо думать, что приведенный в конкретном примере прием является наиболее рациональным для решения данного примера. Просто надо принять к сведению существование такого подхода к решению уравнений.

Одни и те же подходы (применение тригонометрии, использование однородности, разложение на множители и др.) находят применение не только при решении рациональных, дробно-рациональных, иррациональных уравнений, но и при решении трансцендентных уравнений, неравенств, систем.

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

- Под алгебраическим уравнением принято понимать уравнение, которое может быть записано в виде $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ – заданные числа, x – неизвестное. n – наибольшую степень неизвестного – называют степенью алгебраического уравнения.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Как видите, все решаемо.

В этом случае, если оба числа имеют не нулевые значения, уравнение предстоит решить, чтобы вывести конечное выражения для переменной.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

$4x^2 - 9 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = 9/4 \Rightarrow x_1 = 3/2 = 1,5;\ x_2 = -1,5.$

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Решить дробно-рациональные уравнения:

Дробно-рациональные уравнения (или просто дробные уравнения) — это уравнения с одной переменной вида

где $f(x)$ и $g(x)$ — рациональные выражения, хотя бы одно из которых содержит переменную в знаменателе дроби (то есть в таких уравнениях в знаменателе есть переменная).

В общем виде дробно-рациональные уравнения решают по следующей схеме:

1) Все слагаемые переносим в одну сторону.

2) Дроби приводим к НОЗ (наименьшему общему знаменателю).

3) После упрощения решаем уравнение типа «дробь равна нулю».

В частных случаях дробно-рациональные уравнения могут быть решены с помощью замены переменной либо разложением на множители.

Начнем с рассмотрения примеров общего случая.

Пришли к уравнению типа «дробь равна нулю». Дробь равна нулю, если числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля, поэтому это уравнение равносильно системе:

Значение переменной, при котором знаменатель обращается в нуль, исключаем из ОДЗ: $x \neq 3$.

Уравнение $0x = 0$ — частный случай линейного уравнения. Оно имеет бесконечное множество решений. Если подставили вместо x, получим верное числовое равенство. Единственное значение x, которое не входит в множество решений данного уравнения — 3.

Ответ: x — любое число, кроме 3.

Переносим все слагаемые в одну сторону и приводим дроби к наименьшему общему знаменателю:

Находим значения переменной, при которых знаменатель обращается в нуль, и исключаем их из области допустимых значений:

Теперь находим значения переменных, при которых числитель обращается в нуль:

Это — квадратное уравнение. Его корни ... второй не входит в ОДЗ. Поэтому в ответ включаем лишь первый корень. Ответ: -4.

Переносим все слагаемые в одну сторону и приводим дроби к НОЗ:

Оба корня удовлетворяют условиям $x \neq 2, x \neq -4$. Ответ: 5; -6.

МЕТОД ГРУППИРОВКИ

Способы группировки:

1) Объединение членов многочлена в группы, имеющие общий множитель, и вынесение из каждой группы общего множителя (в одной из групп общего множителя может не быть).

2) Вынесение полученного общего для всех групп множителя за скобки.

Примеры:

Внимание: Сколько слагаемых было до вынесения общего множителя за скобки, ровно столько же должно остаться после вынесения. Если общий множитель совпадает с одним из слагаемых (с точностью до знака), на месте этого слагаемого после вынесения общего множителя за скобки остается единица (+1 или -1).

1) $4x - xy - 4 + y =$

Группируем первое слагаемое со вторым, третье – с четвертым:

$= (4x - xy) + (-4 + y) =$

Из первых скобок выносим общий множитель x, из вторых – -1:

$= x(4 - y) - 1(4 - y) =$

Общий множитель $(4 - y)$ выносим за скобки:

$= (4 - y)(x - 1)$

2) $ax + 7a - 3x - 21 =$

Группируем первое слагаемое со вторым, третье – с четвертым. Лучше при группировке между скобками всегда ставить знак «+»:

$= (ax + 7a) + (-3x - 21) =$

Из первых скобок выносим общий множитель a, из вторых – -3. При вынесении «-» за скобки все знаки меняем на противоположные:

$= a(x + 7) - 3(x + 7) =$

Общий множитель $(x + 7)$ выносим за скобки:

$= (x + 7)(a - 3)$

Группировать можно было иначе: первое слагаемое с третьим, второе – с четвертым:

$ax + 7a - 3x - 21 = (ax - 3x) + (7a - 21) =$

Из первых скобок выносим общий множитель x, из вторых – 7:

$= x(a - 3) + 7(a - 3) =$

Общий множитель (a-3) выносим за скобки:

$= (a - 3)(x + 7)$

При любом способе группировки ответ получается одинаковый (от перестановки мест множителей произведение не меняется).

3) $a^3 - a^2b + a - b + ab^2 - b^3 =$

Группируем первое, третье и пятое слагаемые, второе, четвертое и шестое:

$= (a^3 + a + ab^2) + (-a^2b - b - b^3) =$

Из первых скобок выносим общий множитель a, из вторых – $-b$:

$= a(a^2 + 1 + b^2) - b(a^2 + 1 + b^2) =$

Общий множитель $(a^2 + 1 + b^2)$ выносим за скобки:

$= (a - b)(a^2 + 1 + b^2)$

Можно было сгруппировать по два слагаемых. Например, первое – с четвертым, второе – с пятым, третье – с шестым:

$= (a^3 - a^2b) + (a - b) + (ab^2 - b^3) =$

Из первых скобок выносим общий множитель a^2, во вторых скобках общего множителя нет, из третьих – b^2:

$= a^2(a - b) + (a - b) + b^2(a - b) =$

Общий множитель $(a - b)$ выносим за скобки. Не забываем поставить единицу на место $(a - b)$:

$= (a - b)(a^2 + 1 + b^2)$.

МЕТОД ПОДСТАНОВКИ

- Ищем в уравнении некоторое повторяющееся выражение, которое обозначим новой переменной, тем самым упрощая вид уравнения. В некоторых случаях очевидно что удобно обозначить.

2) $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55$.

Решение. Переписав уравнение иначе, а именно

$(x^2+2x)^2-(x+2x+1)=55$, сразу увидим подстановку $x+2x=t$. Имеем $t^2-t-56=0$, $t_1=-7$, $t_2=8$. Осталось решить $x^2+2x=-7$ и $x^2+2x=8$. В результате получаем, что первое уравнение не имеет корней, а у второго $x_1=-4$, $x_2=2$.

1) $\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0$

С помощью подстановки $\frac{x^2+x-5}{x}=t$ получаем $t+\frac{3}{t}+4=0$. Далее решаем его как дробно-рациональное уравнение: $\frac{t^4+4t+3}{t}=0$;

$t^2+4t+3=0$ и $t\neq 0$; $t_1=-3, t_2=-1$.

Тогда $\frac{x^2+x-5}{x}=-3$ и $\frac{x^2+x-5}{x}=-1$.

Решаем получившиеся уравнения:

$\frac{x^2+x-5+3x}{x}=0$,	$\frac{x^2+x-5+x}{x}=0$
$x^2+4x-5=0$,	$x^2+2x-5=0$
$x_1=-5, x_2=1$; $x\neq 0$.	$x_3=-1-\sqrt{6}, x_4=-1+\sqrt{6}$; $x\neq 0$

Ответ: -5; 1; $-1\pm\sqrt{6}$.

В более сложных случаях подстановка видна лишь после преобразований.

МЕТОД ПОДБОРА

- При решении уравнений высших степеней рациональные корни уравнения

$a_4x^4 + a_{4-1}x^{4-1} + \ldots + a_1\mathrm{x} + a_0 = 0$ ищем в виде $\frac{p}{q}$, где p – делитель a_0, q – делитель a_n,

p и q взаимно просты, $p \in Z, q \in N$.

Решить уравнение $x^3 - x^2 - 8\mathrm{x} + 6 = 0$.

Решение. Здесь $a_n = 1, a_0 = 6$. Поэтому, если данное уравнение имеет рациональные корни, то их следует искать среди делителей числа 6: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Проверкой убеждаемся, что $\mathrm{x} = 3$, т.к. 27 – 9 – 24 + 6 = 0. Делим x3 – x2 – 8x + 6 на x – 3, получаем x2 + 2x – 2. Тогда данное уравнение можно представить в виде $(\mathrm{x} - 3)(\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} - 2) = 0$. Отсюда находим, что $\mathrm{x}_1 = 3$ – решение, найденное подбором,

$\mathrm{x}_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}$– из уравнения $\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} - 2 = 0$.

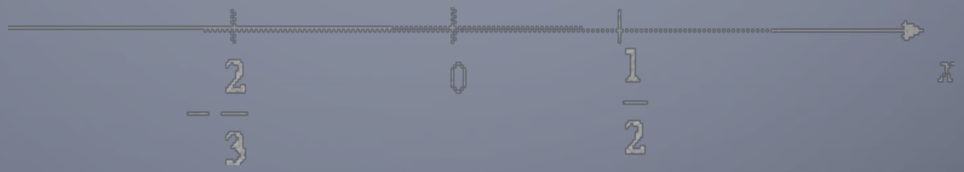
Ответ: 3; $-1 \pm \sqrt{3}$.

УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ МОДУЛЬ

- При решении уравнений с модулем используется определение модуля и метод интервалов.

Задача. Решить уравнение $|1 - 2x| + |3x + 2| + |x| = 5$.

Решение. Приравниваем к нулю выражения, стоящие под знаком модуля, отмечаем на числовой оси полученные значения, исследуем уравнение в каждом из полученных интервалов:



a) если $x \in (-\infty; -\frac{2}{3})$, то $1 - 2x > 0, 3x + 2 < 0, x < 0$ и уравнение переписывается так: $1 - 2x - 3x - 2 - x = 5$, т. е. $-6x = 6$, $x = -1 \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$.

b) Если $x \in [-\frac{2}{3}; 0)$, то $1 - 2x > 0, 3x + 2 \leq 0, x < 0$ и поэтому имеем $1 - 2x + 3x +$ $+2 - x = 5$, и т.к. $3 \neq 5$, то в промежутке $[-\frac{2}{3}; 0)$ корней нет;

c) если $x \in [0; \frac{1}{2})$, то получаем $1 - 2x + 3x + 2 + x = 5$, т.е. $2x = 2$, $x = 1 \notin [0; \frac{1}{2})$;

d) Если $x \in [\frac{1}{2}; \infty)$, то $-1 + 2x + 3x + 2 + x = 5$, $6x = 4, x = \frac{2}{3} \in \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$.

Ответ: -1; $\frac{2}{3}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сколько различных методов присутствуют в математике. И все они по-своему уникальны. Для каждого уравнения можно подобрать несколько методов, но в основном, чтобы он не нарушал целостности условия.

Но самое главное – это видеть какой метод стоит применять. А для этого нужно знать их все.

БЛАГОДАРЮ

ЗА

ВНИМАНИЕ