Показательные уравнения и методы их решения

Автор:

учитель математики МБОУ «Средняя (полная) общеобразовательная школа №8» Елабужского муниципального района РТ

Шурыгина И.В.

Определение:

Показательные уравнения – уравнения, в которых переменная входит только в показатели степеней при постоянных основаниях.

Например,

$$4^{x-1} = 4,$$

$$5^{x^2-3x} = 5^{3x-8},$$

$$0{,}5^{x+7} \cdot 0.5^{1-2x} = 2,$$

$$16^{x} - 17 \cdot 4^{x} + 16 = 0.$$

Основные методы решения показательных уравнений

1.Метод уравнивания показателей.

2.Метод разложения на множители.

3. Метод введения новой переменной.

4. Функционально-графический (он основан на использовании графических иллюстраций или каких-либо свойств функции).

Метод уравнивания показателей

Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}, где\, a > 0, a \neq 1$

равносильно уравнению $f(x) = g(x),$

$$(\frac{1}{2})^{2x+1} = \frac{1}{8},$$

$$(\frac{1}{2})^{2x+1} = (\frac{1}{2})^3,$$

$$2x + 1 = 3,$$

$$2x = 3 - 1,$$

$$2x = 2,$$

$$x = 1.$$

Ответ:x=1.

Используя формулу

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

Решим уравнение

$$\left(\frac{16}{9}\right)^{x} = \left(\frac{3}{4}\right)^{6},$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2x} = \left(\frac{3}{4}\right)^{6},$$

$$-2x = 6,$$

$$x = 6 : (-2),$$

$$x = -3.$$

Ответ: x=-3.

Продолжим

$$\left(\frac{16}{25}\right)^{x+3}=\left(\frac{125}{64}\right)^{2},$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{2x+6}=\left(\frac{4}{5}\right)^{-6},$$

$$2x+6=-6,$$

$$2x=-6-6,$$

$$2x=-12,$$

$$x=-6.$$

Ответ: x=-6.

Решите уравнение и укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения

$$\left(\frac{1}{36}\right)^{2,25x-2} = 6.$$

Решение:

т.к. $\frac{1}{36} = 6^{-2}$, то получаем

$$(6^{-2})^{2,25x-2} = 6;$$

$$6^{4-4,5x} = 6^{1};$$

$$4 - 4,5x = 1;$$

$$-4,5x = 1 - 4;$$

$$-4,5x = -3;$$

$$x = \frac{-3}{-4,5};$$

$$x = \frac{30}{45};$$

$$x = \frac{2}{3}, \qquad \frac{2}{3} \in [0;2)$$

Решите уравнение, используя свойство пропорции.
В ответе укажите меньший корень.

$$\frac{6^{x^2}}{3^2} = \frac{2^2}{6^{8-5x}},$$

$$6^{x^2} \cdot 6^{8-5x} = 3^2 \cdot 2^2,$$

$$6^{x^2-5x+8} = 6^2,$$

$$x^2 - 5x + 8 = 2,$$

$$x^2 - 5x + 8 - 2 = 0,$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 3$$

Ответ:2-меньший корень.

Метод разложения на множители.

Решите уравнение $2\cdot 3^{x+1}-6\cdot 3^{x-1}-3=9,$

$$3^{x-1}(2\cdot 3^{2}-6-3^{1})=9,$$

$$3^{x-1}\cdot 9=9,$$

$$3^{x-1}=1,$$

$$3^{x-1}=3^{0},$$

$$x-1=0,$$

$$x=1.$$

Ответ:x=1.

Решите уравнения:

$$64 \cdot 8^{2x} + x \cdot 8^{2x} = 0,$$

$$8^{2x}(64 + x) = 0,$$

$$т.к. 8^{2x} > 0, то$$

$$64 + x = 0,$$

$$x = -64.$$

Ответ:x=-64.

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x} + \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} = 30$$

Т.к. $0 < a < 1$, то вынесем за скобку степень с наибольшим показателем

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x} \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\right) = 30,$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x} \cdot (1+5) = 30,$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x} \cdot 6 = 30,$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x} = 5,$$

$$5^{-x} = 5,$$

$$-x = 1.$$

$$x = -1.$$

Ответ:x=-1

Найти корни показательного уравнения, указать их сумму.

$$162^x - 8 \cdot 81^x = 3 \cdot 2^x - 24,$$

$$2^x \cdot 81^x - 8 \cdot 81^x = 3 \cdot 2^x - 8 \cdot 3,$$

$$81^x \cdot \left(2^x - 8\right) = 3 \cdot \left(2^x - 8\right),$$

$$81^x \cdot \left(2^x - 8\right) - 3 \cdot \left(2^x - 8\right) = 0,$$

$$\left(2^x - 8\right) \cdot \left(81^x - 3\right) = 0,$$

$2^x = 8$ или $81^x = 3,$

$x_1 = 3.$

$$3^{4x} = 3,$$

$$4x = 1,$$

$$x_2 = 0{,}25.$$

$$x_1 + x_2 = 3 + 0{,}25 = 3{,}25.$$

Ответ: 3,25.

Решите уравнение методом введения новой переменной

$2^{2x} + 2^{x} - 2 = 0;$

Пусть $2^{x} = t$,где $t > 0$,тогда $t^{2} + t - 2 = 0$

По теореме, обратной теореме Виета, получаем:

$\begin{cases} t_1 + t_2 = -1, \\ t_1 \cdot t_2 = -2 \end{cases}$ значит, $t_1 = -2$ не удовлетворяет условию $t > 0$

$t_2 = 1$

Если $t = 1$,то $2^{x} = 1,$

$2^{x} = 2^{0},$

$x = 0.$

Ответ:x=0.

Решите однородное уравнение

$$3\cdot 2^{2x}+6^{x}-2\cdot 3^{2x}=0,$$

$$3\cdot 2^{2x}+2^{x}\cdot 3^{x}-2\cdot 3^{2x}=0\Big| \;:(2^{x}\cdot 3^{x}),$$

$$3\cdot (\frac{2}{3})^{x}+1-2\cdot (\frac{3}{2})^{x}=0,$$

Пусть $(\frac{2}{3})^{x}=t$, $t>0$,тогда

$$3t\;+1-2\frac{1}{t}=0\Big| \;\cdot t,$$

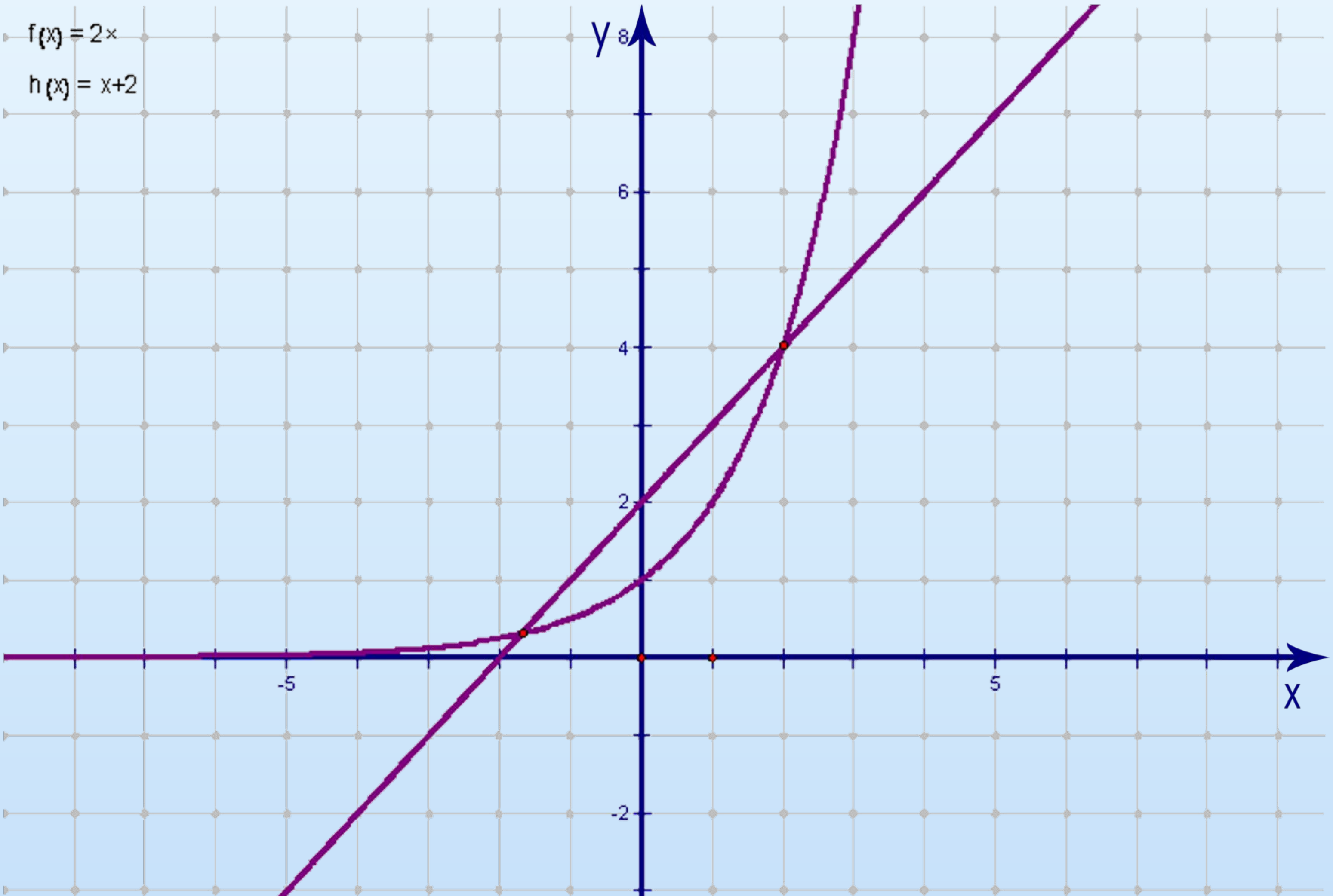
$$3t^{2}+t-2=0,$$

$t_1=-1,$ не удовлетворяет условию $t>0$

$$t_2=\frac{2}{3},$$

Если $t=\frac{2}{3}$,то $(\frac{2}{3})^{x}=\frac{2}{3}$; $x=1.$ Ответ:x=1.

Решите графически $2^x = x + 2$ ***, в ответ запишите положительный корень:***



Ответ:x=2

Уравнения, решаемые с помощью исследования функций, входящих в левую и правую части уравнения.

Решить уравнение $7^{6-x} = x + 2;$

Рассмотрим функции: $y = 7^{6-x}$ *и* $y = x + 2$

Функция $y = 7^{6-x}$ - показательная, монотонно убывающая на R.

Функция $y = x + 2$ -линейная,
монотонно возрастающая на R. Следовательно, графики данных функций могут пересекаться не более 1 раза. Значит, уравнение не может иметь более одного корня, который может быть найдет подбором: x=5.
Ответ: x=5.

Решим уравнение $5^{\sqrt{x}} + 12^{\sqrt{x}} = 13^{\sqrt{x}}$

Решение:
разделим левую и правую часть уравнения на $13^{\sqrt{x}}$,

так как $13^{\sqrt{x}} \neq 0$, получаем $\left(\frac{5}{13}\right)^{\sqrt{x}} + \left(\frac{12}{13}\right)^{\sqrt{x}} = 1.$

Рассмотрим функцию $y = \left(\frac{5}{13}\right)^{\sqrt{x}} + \left(\frac{12}{13}\right)^{\sqrt{x}}$,данная функция

монотонно убывает на множестве неотрицательных чисел, т.к. является суммой двух убывающих показательных функций при $x \geq 0.$

Следовательно, данная функция принимает каждое свое значение не более 1 раза, поэтому исходное уравнение имеет не более 1 корня, который можно найти подбором.

Зная, что $5^2 + 12^2 = 13^2$, получаем $\sqrt{x} = 2, x = 4.$

Ответ: $x = 4.$

Показательно-степенные уравнения вида

$$(a(x))^{b(x)} = (a(x))^{c(x)}$$

Данное уравнение эквивалентно уравнению $a(x)=1$ и системе:

$$\begin{cases} в(x)=c(x), \\ a(x)>0. \end{cases}$$

Отдельно рассматривается случай $a(x)=0$ при условиях

$$в(x)>0, c(x)>0.$$

Решите уравнение $(x-2)^{x^2-5x}=(x-2)^{4-2x}$.

Решение: 1) $x-2=1, x=3.$

2) $\begin{cases} x^2-5x=4-2x, \\ x-2>0, \end{cases}$

$\begin{cases} x_1=-1, x_2=4, \\ x>0. \end{cases}$ *значит* $x=4.$

3) $x-2=0$ при $x=2.$

При подстановке получаем при x=2 равенство не имеет смысла.

Ответ: 3;4.

Решить показательное уравнение с параметром

Решить уравнение $2^{(a^2+10a+21)x} = 2^{2a^2+a-15}$.

$$(a^2 + 10a + 21)x = 2a^2 + a - 15,$$

Разложим на множители квадратные трехчлены и получим:

$$(a+3)(a+7)x = (2a+5)(a+3)$$

1. Если $a = -3$, то $0 \cdot x = 0, x \in R$

2. Если $a = -7$, то $0 \cdot x = 36$, решений нет.

3. Если $a \neq -3, a \neq -7$, то $x = \dfrac{2a+5}{a+7}$, один корень.

Ответ: 1. При $a = -3$, $x \in R$.

2. При $a = -7$, нет решений.

3. При $a \neq -3, a \neq -7$, $x = \dfrac{2a+5}{a+7}$,

Литература:

Г.И.Ковалева и др. «Математика, тренировочные тематические задания повышенной сложности с ответами», Волгоград, издательство «Учитель»;

А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонский, М.С.Якир «Алгебраический тренажер», Москва, «Илекса» 2001г.;

***И.С.Слонимская, А.И.Слонимский, «Математика, экспресс-репетитор для подготовки к ЕГЭ, уравнения и неравенства», Москва,
«АСТ Астрель» 2009г.;***

Материалы из интернет-ресурсов.