

Показательные уравнения и методы их решения

Автор:

**учитель математики МБОУ
«Средняя (полная)
общеобразовательная школа
№8» Елабужского
муниципального района РТ
Шурыгина И.В.**

Определение:

Показательные уравнения – уравнения, в которых переменная входит только в показатели степеней при постоянных основаниях.

Например,

$$4^{x-1} = 4,$$

$$5^{x^2-3x} = 5^{3x-8},$$

$$0,5^{x+7} \cdot 0.5^{1-2x} = 2,$$

$$16^x - 17 \cdot 4^x + 16 = 0.$$

Основные методы решения показательных уравнений

1. Метод уравнивания показателей.
2. Метод разложения на множители.
3. Метод введения новой переменной.
4. Функционально-графический (он основан на использовании графических иллюстраций или каких-либо свойств функции).

Метод уравнивания показателей

Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0, a \neq 1$

равносильно уравнению $f(x) = g(x)$,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} = \frac{1}{8},$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^3,$$

$$2x + 1 = 3,$$

$$2x = 3 - 1,$$

$$2x = 2,$$

$$x = 1.$$

Ответ: $x=1$.

Используя формулу

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Решим уравнение

$$\left(\frac{16}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^6,$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2x} = \left(\frac{3}{4}\right)^6,$$

$$-2x = 6,$$

$$x = 6 : (-2),$$

$$x = -3.$$

Ответ: $x = -3$.

Продолжим $\left(\frac{16}{25}\right)^{x+3} = \left(\frac{125}{64}\right)^2,$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{2x+6} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-6},$$

$$2x + 6 = -6,$$

$$2x = -6 - 6,$$

$$2x = -12,$$

$$x = -6.$$

Ответ: $x = -6$.

Решите уравнение и укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения

$$\left(\frac{1}{36}\right)^{2,25x-2} = 6.$$

Решение:

т.к. $\frac{1}{36} = 6^{-2}$, то получаем

$$(6^{-2})^{2,25x-2} = 6;$$

$$6^{4-4,5x} = 6^1;$$

$$4 - 4,5x = 1;$$

$$-4,5x = 1 - 4;$$

$$-4,5x = -3;$$

$$x = \frac{-3}{-4,5};$$

$$x = \frac{30}{45};$$

$$x = \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3} \in [0; 2)$$

Решите уравнение, используя свойство пропорции.

В ответе укажите меньший корень.

$$\frac{6^{x^2}}{3^2} = \frac{2^2}{6^{8-5x}},$$

$$6^{x^2} \cdot 6^{8-5x} = 3^2 \cdot 2^2,$$

$$6^{x^2-5x+8} = 6^2,$$

$$x^2 - 5x + 8 = 2,$$

$$x^2 - 5x + 8 - 2 = 0,$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 3$$

Ответ: 2-меньший корень.

Метод разложения на множители.

Решите уравнение $2 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^{x-1} - 3 = 9,$

$$3^{x-1}(2 \cdot 3^2 - 6 - 3^1) = 9,$$

$$3^{x-1} \cdot 9 = 9,$$

$$3^{x-1} = 1,$$

$$3^{x-1} = 3^0,$$

$$x - 1 = 0,$$

$$x = 1.$$

Ответ: $x=1$.

Решите уравнения:

$$64 \cdot 8^{2x} + x \cdot 8^{2x} = 0,$$

$$8^{2x} (64 + x) = 0,$$

т.к. $8^{2x} > 0$, то

$$64 + x = 0,$$

$$x = -64.$$

Ответ: $x = -64$.

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} = 30$$

Т.к. $0 < a < 1$, то вынесем за скобку степень с наибольшим показателем

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\right) = 30,$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot (1 + 5) = 30,$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot 6 = 30,$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x = 5,$$

$$5^{-x} = 5,$$

$$-x = 1.$$

$$x = -1.$$

Ответ: $x = -1$

Найти корни показательного уравнения, указать их сумму.

$$162^x - 8 \cdot 81^x = 3 \cdot 2^x - 24,$$

$$2^x \cdot 81^x - 8 \cdot 81^x = 3 \cdot 2^x - 8 \cdot 3,$$

$$81^x \cdot (2^x - 8) = 3 \cdot (2^x - 8),$$

$$81^x \cdot (2^x - 8) - 3 \cdot (2^x - 8) = 0,$$

$$(2^x - 8) \cdot (81^x - 3) = 0,$$

$$2^x = 8 \quad \text{или} \quad 81^x = 3,$$

$$x_1 = 3.$$

$$3^{4x} = 3,$$

$$4x = 1,$$

$$x_2 = 0,25.$$

$$x_1 + x_2 = 3 + 0,25 = 3,25.$$

Ответ: 3,25.

Решите уравнение методом введения новой переменной

$$2^{2x} + 2^x - 2 = 0;$$

Пусть $2^x = t$, где $t > 0$, тогда $t^2 + t - 2 = 0$

По теореме, обратной теореме Виета, получаем:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -1, \text{ значит, } t_1 = -2 \text{ не удовлетворяет условию } t > 0 \\ t_1 \cdot t_2 = -2 & t_2 = 1 \end{cases}$$

Если $t = 1$, то $2^x = 1$,
 $2^x = 2^0$,

$$x = 0.$$

Ответ: $x=0$.

Решите однородное уравнение

$$3 \cdot 2^{2x} + 6^x - 2 \cdot 3^{2x} = 0,$$

$$3 \cdot 2^{2x} + 2^x \cdot 3^x - 2 \cdot 3^{2x} = 0 \quad | : (2^x \cdot 3^x),$$

$$3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x = 0,$$

Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$, $t > 0$, тогда

$$3t + 1 - 2 \frac{1}{t} = 0 \quad | \cdot t,$$

$$3t^2 + t - 2 = 0,$$

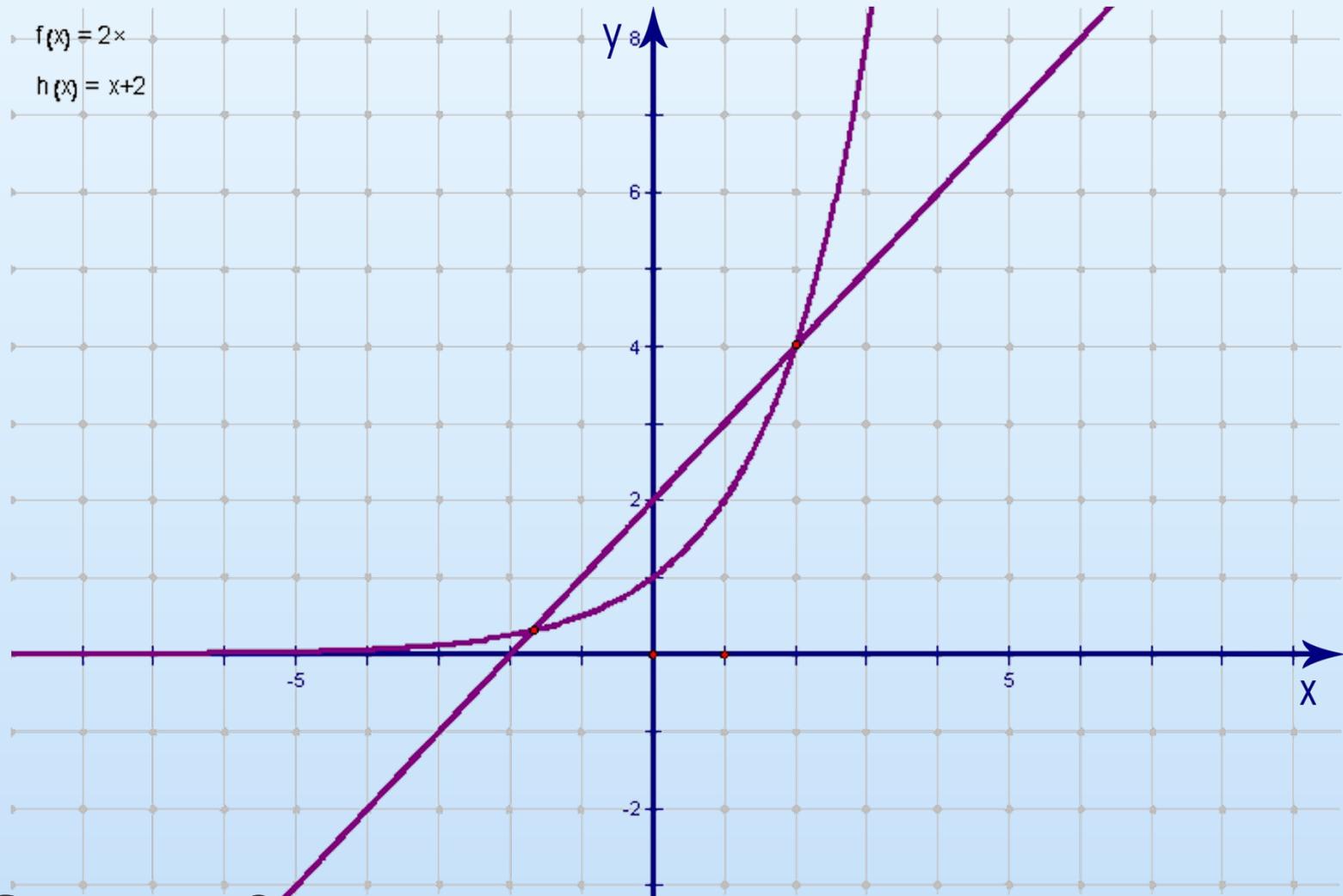
$t_1 = -1$, не удовлетворяет условию $t > 0$

$$t_2 = \frac{2}{3},$$

Если $t = \frac{2}{3}$, то $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3}$; $x = 1$.

Ответ: $x=1$.

Решите графически $2^x = x + 2$, в ответ
запишите положительный корень:



Ответ: $x=2$

Уравнения, решаемые с помощью исследования функций, входящих в левую и правую части уравнения.

Решить уравнение $7^{6-x} = x + 2$;

Рассмотрим функции: $y = 7^{6-x}$ и $y = x + 2$

Функция $y = 7^{6-x}$ - показательная, монотонно убывающая на \mathbb{R} .

Функция $y = x + 2$ -линейная, монотонно возрастающая на \mathbb{R} . Следовательно, графики данных функций могут пересекаться не более 1 раза. Значит, уравнение не может иметь более одного корня, который может быть найден подбором: $x=5$.

Ответ: $x=5$.

Решим уравнение $5^{\sqrt{x}} + 12^{\sqrt{x}} = 13^{\sqrt{x}}$

Решение:

разделим левую и правую часть уравнения на $13^{\sqrt{x}}$,

так как $13^{\sqrt{x}} \neq 0$, получаем $\left(\frac{5}{13}\right)^{\sqrt{x}} + \left(\frac{12}{13}\right)^{\sqrt{x}} = 1$.

Рассмотрим функцию $y = \left(\frac{5}{13}\right)^{\sqrt{x}} + \left(\frac{12}{13}\right)^{\sqrt{x}}$, данная функция

монотонно убывает на множестве неотрицательных чисел, т.к. является суммой двух убывающих показательных функций при $x \geq 0$.

Следовательно, данная функция принимает каждое свое значение не более 1 раза, поэтому исходное уравнение имеет не более 1 корня, который можно найти подбором.

Зная, что $5^2 + 12^2 = 13^2$, получаем $\sqrt{x} = 2, x = 4$.

Ответ: $x = 4$.

Показательно-степенные уравнения вида

$$(a(x))^{b(x)} = (a(x))^{c(x)}$$

Данное уравнение эквивалентно уравнению $a(x) = 1$ и системе:

$$\begin{cases} b(x) = c(x), \\ a(x) > 0. \end{cases}$$

Отдельно рассматривается случай $a(x) = 0$ при условиях $b(x) > 0, c(x) > 0$.

Решите уравнение $(x-2)^{x^2-5x} = (x-2)^{4-2x}$.

Решение: 1) $x-2 = 1, x = 3$.

$$2) \begin{cases} x^2 - 5x = 4 - 2x, \\ x - 2 > 0, \end{cases}$$

3) $x-2 = 0$ при $x = 2$.

$$\begin{cases} x_1 = -1, x_2 = 4, \\ x > 0. \end{cases} \text{ значит } x = 4.$$

При подстановке получаем при $x=2$ равенство не имеет смысла.

Ответ: 3;4.

Решить показательное уравнение с параметром

Решить уравнение $2^{(a^2+10a+21)x} = 2^{2a^2+a-15}$.

$$(a^2 + 10a + 21)x = 2a^2 + a - 15,$$

Разложим на множители квадратные трехчлены и получим:

$$(a + 3)(a + 7)x = (2a + 5)(a + 3)$$

1. Если $a = -3$, то $0 \cdot x = 0, x \in R$
2. Если $a = -7$, то $0 \cdot x = 36$, решений нет.
3. Если $a \neq -3, a \neq -7$, то $x = \frac{2a+5}{a+7}$, один корень.

Ответ: 1. При $a = -3$, $x \in R$.

2. При $a = -7$, нет решений.

3. При $a \neq -3, a \neq -7$, $x = \frac{2a+5}{a+7}$,

Литература:

Г.И.Ковалева и др. «Математика, тренировочные тематические задания повышенной сложности с ответами», Волгоград, издательство «Учитель»;

А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонский, М.С.Якир «Алгебраический тренажер», Москва, «Илекса» 2001г.;

И.С.Слонимская, А.И.Слонимский, «Математика, экспресс-репетитор для подготовки к ЕГЭ, уравнения и неравенства», Москва, «АСТ Астрель» 2009г.;

Материалы из интернет-ресурсов.

