Принцип крайнего

Проект по окончанию 7 класса

Московского Глеба

Цель проекта

- Понять, что такое «принцип крайнего», и научиться пользоваться этим методом.

Что такое «принцип крайнего»?

При решении многих задач ключевой идеей оказывается рассмотрение некоторой крайней или экстремальной величины (элемента, характеристики), связанной с задачей. Этот метод решения задач называется принципом (правилом) **крайнего**.

Принцип крайнего

Если речь в задаче идёт о множестве точек на прямой (плоскости), то правило «Рассмотри крайнее» советует нам сосредоточить внимание на самой крайней точке множества. Если в задаче фигурирует некоторый набор чисел, то принцип крайнего рекомендует рассмотреть наибольшее или наименьшее из чисел.

Задача №1

Зайчиха купила для своих семерых зайчат 7 барабанов разных размеров и 7 пар палочек разной длины. Если зайчонок видит, что у него и барабан больше, и палочки длиннее, чем у кого-то из братьев, он начинает громко барабанить. Какое наибольшее число зайчат сможет начать барабанить?

Решение

Все зайчата барабанить не могут, т.к. заведомо известно, что зайчонок с самым маленьким барабаном или палочками барабанить не будет. Если одному из братьев дать и самые маленькие палочки, и самый маленький барабан, то все остальные зайчата начнут барабанить. Значит, наибольшее число – 6 зайчат.

Задача №2

Докажите, что числа от 1 до 16 нельзя записать по кругу так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была квадратом натурального числа.

Решение

Если рядом с 16 стоит число X, то $16+x=a^2$, откуда $a^2=25$ и $x=9$. У 16 не может быть более одного соседа, и удовлетворяющее условию расположение чисел по кругу невозможно.

Задача №3

На плоскости задано некоторое множество точек А, что каждая из точек множества А является серединой отрезка, соединяющий какую-либо пару точек из того же множества. Докажите, что множество А содержит бесконечно много точек.

Решение

Рассмотрим самую левую нижнюю точку множества А. Пусть это будет точка В. Но если точка В самая левая и нижняя, то она не может быть серединой отрезка из множества А. Отсюда следует, что множество А содержит бесконечно много точек.

Задача №4

На столе лежали две колоды, по 36 карт в каждой. Первую колоду перетасовали и положили на вторую. Затем для каждой карты первой колоды подсчитали количество карт между ней и такой же картой второй колоды (то есть сколько карт между семёрками червей, между дамами пик, и т.д.). Чему равна сумма 36 полученных чисел?

Решение

Рассмотрим по отдельности, сколько раз была подсчитана каждая карта в верхней и в нижней колоде. В верхней колоде самая верхняя карта не была подсчитана ни разу, так как она не находится между какими-либо картами. Вторая сверху карта была подсчитана один раз, так находится между одной парой одинаковых карт: верхней картой верхней колоды и такой же картой нижней колоды.

Следующая карта сверху подсчитана два раза, и так далее, то есть N-я сверху карта верхней колоды была подсчитана $N – 1$ раз, так как находится между $N – 1$ парой одинаковых карт.

Таким образом, искомая сумма равна $(0 + 1 + 2 + ... + 35)\cdot 2 = 1260$.

Задача №5

Имеется 8 монет, 7 из которых – настоящие, которые весят одинаково, и одна фальшивая, отличающаяся по весу от остальных. Чашечные весы без гирь таковы, что если положить на их чашки равные грузы, то любая из чашек может перевесить, если же грузы различны по массе, то обязательно перетягивает чашка с более тяжелым грузом. Как за четыре взвешивания наверняка определить фальшивую монету и установить, легче она или тяжелее остальных?

Решение

Обозначим монеты и их массы буквами *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* и *H* . Ясно, что если на чашки весов положены по 4 монеты, то весы не могут оказаться в равновесии.

Заметим также, что если монеты разложены по чашкам поровну, то та чашка, где лежит фальшивая монета, всегда либо перевешивает (если фальшивая монета тяжелее настоящих), либо нет (если легче). Поэтому если одна и та же монета при двух взвешиваниях, когда монеты были разложены по чашкам поровну, однажды оказалась внизу, а однажды вверху, то она – настоящая.

Сделаем 2 взвешивания:

$A + B + C + D > E + F + G + H$

$A + B + E + F > C + D + G + H$.

В этом случае монеты C , D , E и F – настоящие и, если фальшивая монета тяжелее их, то это A или B , а если легче – то G или H.

Третьим взвешиванием сравним массы $A + G$ и $B + H$. Пусть, скажем, $A + G > B + H$ (другой случай разбирается аналогично). Тогда монеты B и G – настоящие и четвертым взвешиванием следует сравнить $A + H$ с $B + G$. Если $A + H > B + G$, то фальшивой и более тяжелой, чем настоящие, является монета A , а если $A + H < B + G$, то фальшивой и более легкой является монета H .

Литература

http://bars.na.by/teachers/extremal.html

http://school-collection.edu.ru/

http://www.kvant.info/

http://www.problems.ru/

http://mmmf.msu.ru/archive/20062007/z9-10/21.html