Исследование функций с помощью производной

Преподаватель математики
Кузнецова М.А.

2018

Содержание

1. Определение понятия функция

Определение 1:

Переменная *y* называется функцией переменной *x*, если каждому допустимому значению *x* соответствует определенное значение *y*.

Символически функциональная зависимость между переменной y (функцией) и переменной x (аргументом) записывается с помощью равенства $y=f(x)$, где f означает совокупность действий, которые надо произвести над x, чтобы получить y.

1. Определение понятия функция

__Определение 2:__
Областью определения (существования) функции называется множество всех действительных значений аргумента, при которых она может иметь действительное значение.

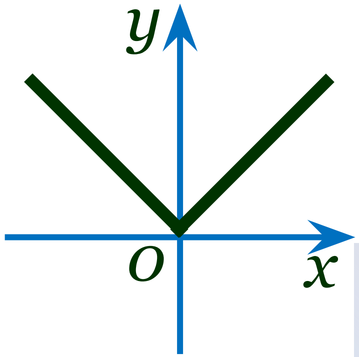
__Определение 3:__
Множество значений функции называется множество всех действительных значений функции, которые она может принимать.

Способы задания функции:

1) аналитический (формула)
2) табличный
3) графический

$$y=|x|$$

x	-1	0	1	2
y	1	0	1	2



2. Определение производной. Смысл производной

Пусть функция *y=f(x)* определена на некотором промежутке, *x* – точка этого промежутка и число *Δx* таково, что *x+Δx* тоже принадлежит этому промежутку.

Определение 4:

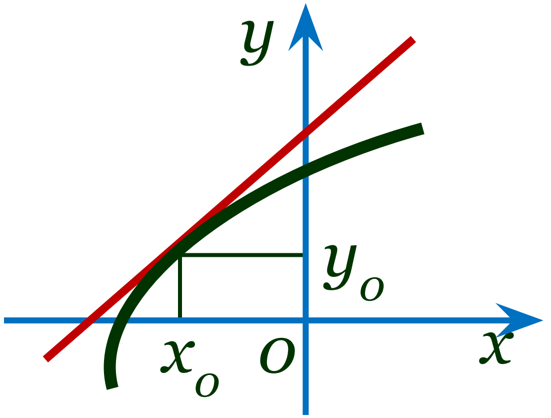
Производной функции *y=f(x)* называется предел отношения приращения функции *Δy* к приращению аргумента *Δx* при *Δx→0* (если этот предел существует):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2. Определение производной. Смысл производной

Определение 5 (геометрическое определение производной):

Производной гладкой функции в точке *x* называется угловой коэффициент касательной к графику функции, проведенной в точке с абсциссой *x*.



Уравнение касательной:

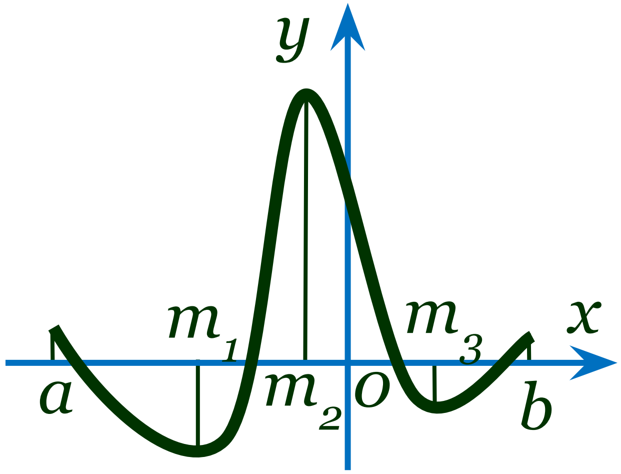
$$y=y_o+k(x-x_o),$$

где $y_o=f(x_o)$, k – угловой коэффициент касательной.

3. Монотонность функции

Определение 6:

Промежутки монотонности – промежутки оси *x*, на которых функция возрастает (промежутки возрастания) или убывает (промежутки убывания) .



$f(x)$ возрастает при $x \in [m_1; m_2] \cup [m_3; b]$

$f(x)$ убывает при $x \in [a; m_1] \cup [m_2; m_3]$

4. Необходимые и достаточные условия убывания и возрастания функций

Если функция возрастает на промежутке, то ее производная во всех точках этого промежутка больше или равна нулю.

$$f - \text{возрастает} \Rightarrow f'(x) \geq$$

Если функция убывает на промежутке, то ее производная во всех точках этого промежутка меньше или равна нулю.

$$f - \text{убывает} \Rightarrow f'(x) \leq 0$$

5. Правило отыскания интервалов монотонности

1) Найти производную *f' (x)* функции *f(x)*.
2) Найти критические точки функции *y=f(x)*, т.е. точки, в которых *f' (x)* обращается в нуль или терпит разрыв.
3) Исследовать знак производной *f' (x)* в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения *f(x)*.
4) Сделать выводы о промежутках возрастания и убывания функции.

6. Определение экстремума. Теорема Ферма

Определение 7:

Точка x_0 называется точкой максимума функции $y=f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$.

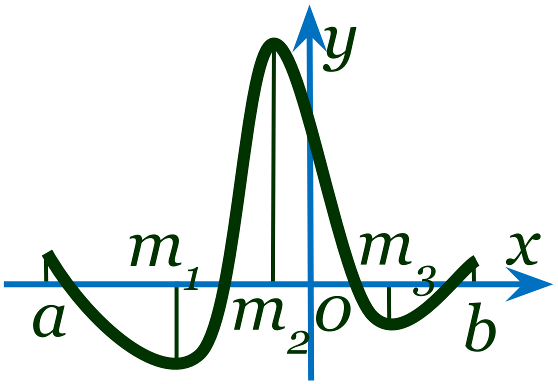
Определение 8:

Точка x_0 называется точкой минимума функции $y=f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$.

6. Определение экстремума. Теорема Ферма

Определение 9:

Точки минимума и точки максимума называются точками экстремума.



Точки экстремума функции $f(x)$:

m_1 и m_3 – точки минимума
m_2 – точка максимума

Теорема Ферма:

Если гладкая функция имеет экстремум во внутренней точке промежутка, то в этой точке ее производная обращается в нуль.

7. Правило отыскания экстремума

1) Найти производную $f'(x)$ функции $f(x)$.
2) Найти критические точки функции $y=f(x)$, т.е. точки, в которых $f'(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.
3) Исследовать знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения $f(x)$. При этом критическая точка $x=x_0$ есть точка экстремума, если производная функции меняет свой знак при переходе через $x=x_0$.
4) Вычислить значения функции в точках максимума и минимума.

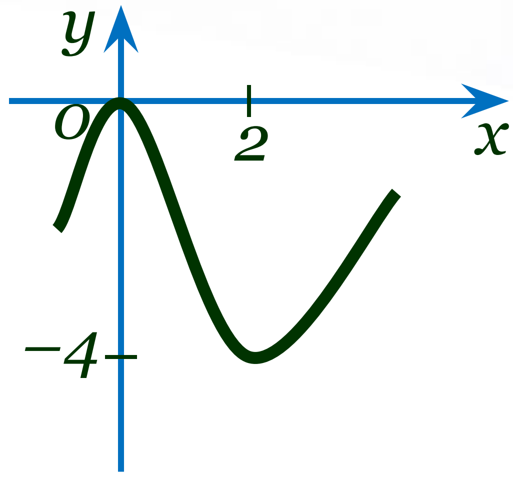
8. Пример исследования функции с помощью производной

Исследовать функцию $f(x) = x^3 - 3x^2$ с помощью производной:

1) найдем производную: $f'(x) = 3x^2 - 6x$
2) найдем корни уравнения $3x^2 - 6x = 0$: $3x(x-2)=0 \Rightarrow x_1=0$ и $x_2=2$
3) производная имеет положительные значения слева от точки $x=0$ и справа от точки $x=2$ и отрицательные значения между этими точками:

4) $x_1=0$ – точка максимума, $x_2=2$ – точка минимума

$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0; \ f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4$



9. Источники получения информации

1) Башмаков М. И. Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / М. И. Башмаков. – 9-ое изд., стер. – М. : Издательский центр «Академия», 2014. – 256 с.

2) Богомолов Н. В. Математика: учеб. для ссузов / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. – 7-ое изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2010. – 395, [5] с. : ил.

Спасибо за внимание!