# Исследование функций с помощью производной

*Преподаватель математики*
*Кузнецова М.А.*

2018

# Содержание

# 1. Определение понятия функция

*Определение 1:*

**Переменная *y* называется функцией переменной *x*, если каждому допустимому значению *x* соответствует определенное значение *y*.**

Символически функциональная зависимость между переменной $y$ (функцией) и переменной $x$ (аргументом) записывается с помощью равенства $y=f(x)$, где $f$ означает совокупность действий, которые надо произвести над $x$, чтобы получить $y$.

# 1. Определение понятия функция

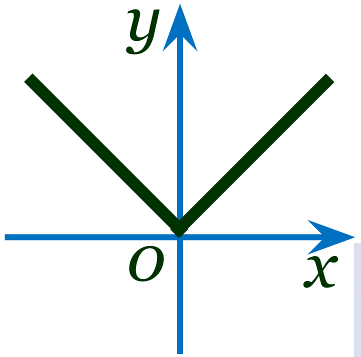
**Определение 2:**
**Областью определения (существования) функции называется множество всех действительных значений аргумента, при которых она может иметь действительное значение.**

**Определение 3:**
**Множество значений функции называется множество всех действительных значений функции, которые она может принимать.**

Способы задания функции:
1) аналитический (формула)
2) табличный
3) графический

$$y=|x|$$

| $x$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 0 | 1 | 2 |



# 2. Определение производной. Смысл производной

Пусть функция $y=f(x)$ определена на некотором промежутке, $x$ – точка этого промежутка и число $\Delta x$ таково, что $x+\Delta x$ тоже принадлежит этому промежутку.

**Определение 4:**

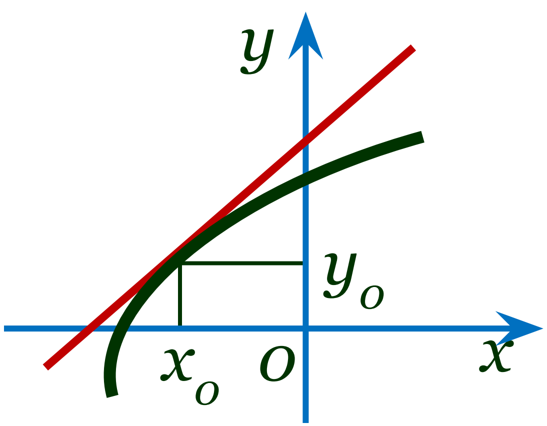
**Производной функции $y=f(x)$ называется предел отношения приращения функции $\Delta y$ к приращению аргумента $\Delta x$ при $\Delta x \to 0$ (если этот предел существует):**

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

# 2. Определение производной. Смысл производной

***Определение 5 (геометрическое определение производной):***

**Производной гладкой функции в точке $x$ называется угловой коэффициент касательной к графику функции, проведенной в точке с абсциссой $x$.**




Уравнение касательной:

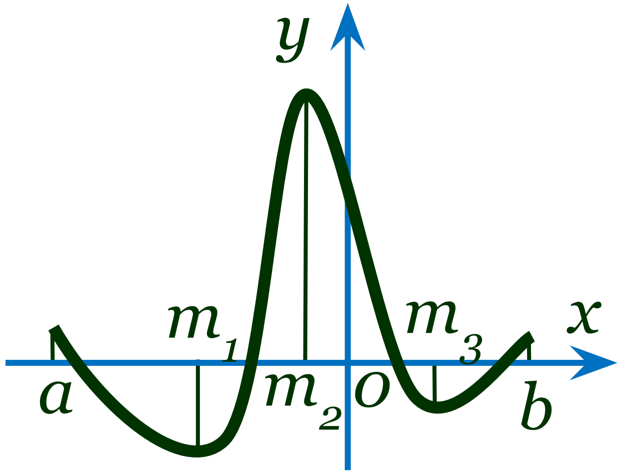
$y=y_o+k(x-x_o)$,

где $y_o=f(x_o)$, $k$ – угловой коэффициент касательной.

# 3. Монотонность функции

**Определение 6:**

**Промежутки монотонности – промежутки оси *x*, на которых функция возрастает (промежутки возрастания) или убывает (промежутки убывания) .**




$f(x)$ возрастает при $x \in [m_1; m_2] \cup [m_3; b]$

$f(x)$ убывает при $x \in [a; m_1] \cup [m_2; m_3]$

# 4. Необходимые и достаточные условия убывания и возрастания функций

**Если функция возрастает на промежутке, то ее производная во всех точках этого промежутка больше или равна нулю.**

$$f - \text{возрастает} \Rightarrow f'(x) \geq$$

**Если функция убывает на промежутке, то ее производная во всех точках этого промежутка меньше или равна нулю.**

$$f - \text{убывает} \Rightarrow f'(x) \leq 0$$

# 5. Правило отыскания интервалов монотонности

1) Найти производную *f' (x)* функции *f(x)*.
2) Найти критические точки функции *y=f(x)*, т.е. точки, в которых *f' (x)* обращается в нуль или терпит разрыв.
3) Исследовать знак производной *f' (x)* в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения *f(x)*.
4) Сделать выводы о промежутках возрастания и убывания функции.

# 6. Определение экстремума. Теорема Ферма

**Определение 7:**

Точка $x_0$ называется точкой максимума функции $y=f(x)$, если существует такая окрестность точки $x_0$, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$.

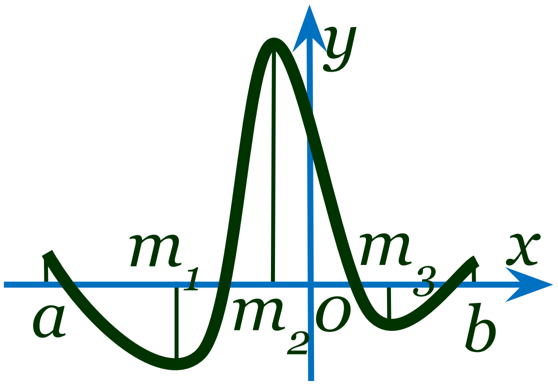
**Определение 8:**

Точка $x_0$ называется точкой минимума функции $y=f(x)$, если существует такая окрестность точки $x_0$, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$.

# 6. Определение экстремума. Теорема Ферма

**Определение 9:**

**Точки минимума и точки максимума называются точками экстремума.**




Точки экстремума функции $f(x)$:

$m_1$ и $m_3$ – точки минимума

$m_2$ – точка максимума

**Теорема Ферма:**

**Если гладкая функция имеет экстремум во внутренней точке промежутка, то в этой точке ее производная обращается в нуль.**

# 7. Правило отыскания экстремума

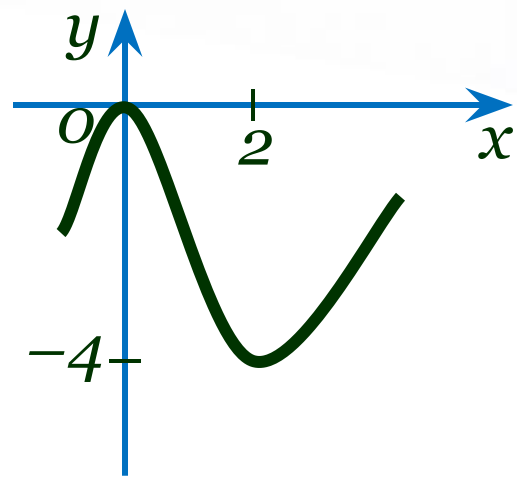
1) Найти производную *f' (x)* функции *f(x)*.
2) Найти критические точки функции *y=f(x)*, т.е. точки, в которых *f' (x)* обращается в нуль или терпит разрыв.
3) Исследовать знак производной *f' (x)* в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения *f(x)*. При этом критическая точка $x=x_0$ есть точка экстремума, если производная функции меняет свой знак при переходе через $x=x_0$.
4) Вычислить значения функции в точках максимума и минимума.

# 8. Пример исследования функции с помощью производной

Исследовать функцию $f(x) = x^3 - 3x^2$ с помощью производной:

1) найдем производную: $f'(x) = 3x^2 - 6x$
2) найдем корни уравнения $3x^2 - 6x = 0$: $3x(x-2)=0 \Rightarrow x_1=0$ и $x_2=2$
3) производная имеет положительные значения слева от точки $x=0$ и справа от точки $x=2$ и отрицательные значения между этими точками:


4) $x_1=0$ – точка максимума, $x_2=2$ – точка минимума
$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2=0;\ f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2= -4$



# 9. Источники получения информации


1) Башмаков М. И. Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / М. И. Башмаков. – 9-ое изд., стер. – М. : Издательский центр «Академия», 2014. – 256 с.

2) Богомолов Н. В. Математика: учеб. для ссузов / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. – 7-ое изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2010. – 395, [5] с. : ил.

# Спасибо за внимание!