Решение уравнений и неравенств

Работу выполнили:
Бабушкина К.
Карпикова К.
Ковязина О.
Сысолетин И.
Руководитель работы:
учитель математики
Белоглазова Н.Л.

2013 г.

Уравнения

Уравнением называется равенство, содержащее неизвестное, обозначаемое буквой. Пользуясь понятием функции, можно сказать, что *уравнение* (с одним неизвестным) - это пара функций от одной и той же переменной *x*, соединенных знаком равенства:

$$f(x)=g(x)$$

Областью допустимых значений (ОДЗ) данного уравнения называется пересечение области определения функций f(x) и g(x):

$$D(f) \cap D(g)$$

Число *a* называется *корнем*(*или решением*) данного уравнения, если при подстановке в уравнение вместо каждого вхождения *x* числа *a* уравнение обращается в верное числовое равенство: $f(a)=g(a)$.

Решить уравнение - это значит найти все его корни или доказать, что данное уравнение корней не имеет.

Два уравнения называются *равносильными*, если множества их корней совпадают. Уравнение А является *следствием* уравнения В, если все корни уравнения В являются корнями уравнения А (но, быть может, среди корней уравнения А есть такие, которые не являются корнями В).

Решение уравнения

$$\frac{\sqrt{2}(\sin 70^\circ + \sin 20^\circ)}{\cos 25^\circ} = \frac{\sqrt{2}\cdot 2\sin\frac{70^\circ + 20^\circ}{2}\cos\frac{70^\circ - 20^\circ}{2}}{\cos 25^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cdot 2\sin 45^\circ \cdot \cos 25^\circ}{\cos 25^\circ} = \sqrt{2}\cdot 2\frac{\sqrt{2}}{2} = 2.$$

$\boxed{\textit{Ответ: } 2.}$

Системы уравнений с двумя неизвестными

Уравнением с двумя неизвестными x и *y* называется пара функций от двух переменных (x и y), соединенных знаком равенства:

$$f(x_0, y_0)=g(x_0, y_0)$$

Решением такого уравнения называется всякая пара чисел (x_0, y_0), подстановка которых в уравнение вместо соответствующих неизвестных обращает это уравнение в верное равенство.

Системой двух уравнений с двумя неизвестными называется пара уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} f(x,y) = g(x,y) \\ h(x,y) = t(x,y) \end{cases}$$

Решением системы называется пара чисел (x_0, y_0), являющаяся решением и первого, и второго уравнений системы.

Решить систему - это значит найти все её решения или доказать, что система решений не имеет.

Системы линейных уравнений

Пусть дана система $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$

1. Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$;
2. Система имеет бесконечное множество решений тогда и только тогда, когда $\begin{cases} a_1b_2-a_2b_1=0 \\ a_1c_2-a_2c_1=0 \\ b_1c_2-b_2c_1=0 \end{cases}$
3. Система не имеет решений тогда и только тогда, когда $a_1b_2-a_2b_1=0$, но $a_1c_2-a_2c_1\neq 0$ или $b_1c_2-b_2c_1\neq 0$.

Способы решения систем уравнений

- *Графический способ*
- *Способ подстановки*
- *Способ сложения*

Графический способ

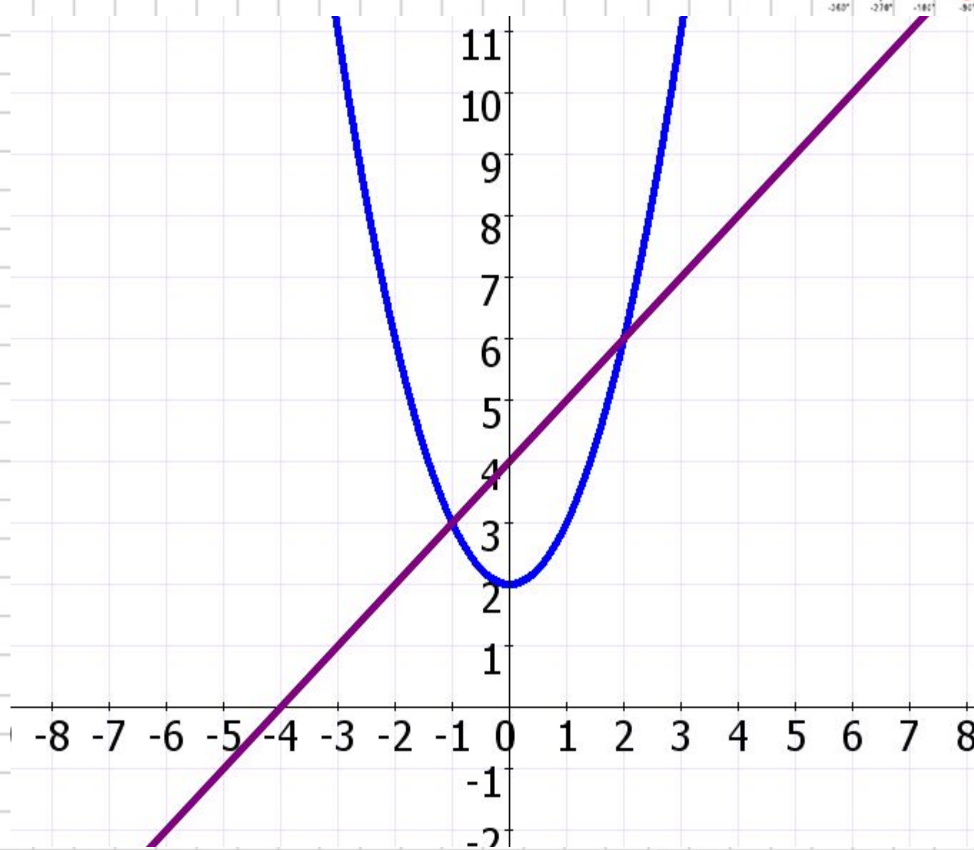
Чтобы решить графическим способом систему двух уравнений с двумя переменными, нужно построить график каждого из уравнений системы и найти их точки пересечения.

Координаты каждой точки образуют решение системы.

Сколько точек пересечения -столько решений имеет система.

Решить графически систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = x + 4 \end{cases}$$



Способ Подстановки

Заключается в том , что в одном из уравнений выражают одну переменную через другую. Полученное выражение подставляют в другое уравнение, которое после этого обращается в уравнение с одной переменной, а затем решают его. Получившиеся значения подставляют в любое уравнение исходной системы и находят вторую переменную.

Решить систему уравнений способом подстановки

$$\begin{cases} y - 2x = 4 \\ 7x - 2y = 31 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4 + 2x \\ 7x - 2y = 31 \end{cases}$$

$$7x - 2\cdot(4+2x) = 31$$

$$7x - 8 - 4x = 31$$

$$3x = 39$$

$$x = 13$$

$$y = 4 + 2\cdot 13$$

$$y = 30$$

Ответ : (13; 30)

Способ сложения

Заключается в том, что если данная система состоит из уравнений, которые при почленном сложении образуют уравнение с одной переменной, то, решив это уравнение, мы получим значения одной из переменных. Значения второй переменной находятся как и в способе подстановки.

Решить систему уравнений способом сложения

$$\begin{cases} 4x - 7y = 30 \\ 4x - 5y = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x + 7y = -30 \\ 4x - 5y = 90 \end{cases}$$

$$2y = 60$$

$$y = 30$$

$$4x - 7 \cdot 30 = 30$$

$$4x - 210 = 30$$

$$4x = 240$$

$$x = 60$$

Ответ: (60;30)

Решение системы уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2xy - z^2 = 16. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение: перенесем z в правую часть и возведем обе части в квадрат

$$x + y = 4 - z,$$

$$(x + y)^2 = (4 - z)^2,$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 16 - 8z + z^2 \quad (1)$$

Вычтем из уравнения (1) второе уравнение системы, умноженное на 2:

$$(x^2 + 2xy + y^2) - 2\cdot(2xy - z^2) = (16 - 8z + z^2) - 2\cdot 16$$

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4xy + 2z^2 = 16 - 8z + z^2 - 32,$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + z^2 + 8z + 16 = 0,$$

$$(x - y)^2 + (z + 4)^2 = 0$$

Квадрат любого числа больше либо равен нулю. Поэтому сумма двух квадратов равна нулю только в том случае, если каждый из них равен нулю.

Получим:

$x - y = 0$

$x = y$

$z + 4 = 0$

$z = -4$

Подставим эти выражения в первое уравнение системы: $x + y + z = 4$

$$y + y - 4 = 4$$

$$2y = 8$$

$$y = 4$$

$$x = 4$$

Ответ: (4; 4;-4)

Неравенства

Неравенством с одним неизвестным называется пара функций от одной и той же переменной, соединенная одним из знаков: >, ≥,<,≤,≠.

Решением неравенства (системы неравенств) называется всякое действительное число, подстановка которого в неравенство (каждое неравенство системы) вместо каждого вхождения неизвестного (переменной) обращает это неравенство (все неравенства системы) в верное числовое неравенство (верные числовые неравенства).

Решить неравенство (систему неравенств) значит найти множество всех решений этого неравенства (этой системы неравенств) или доказать, что оно (она) решений не имеет. Два неравенства (две системы неравенств) называются *равносильными*, если множества их решений совпадают. Соответственно, преобразования неравенства называются *равносильными*, если при этих преобразованиях множество решений полученного неравенства совпадает с множеством решений исходного неравенства.

Отметим, что проверка правильности всех найденных решений неравенства подстановкой в исходные неравенства в подавляющем большинстве случаев невозможна. Поэтому при решении неравенств (систем неравенств) нужно пользоваться равносильными преобразованиями (равносильными преобразованиями в рамках *ОДЗ*). Нахождение *ОДЗ* не обязательно, если вы пользуетесь исключительно равносильными преобразованиями.

В противном случае нахождение *ОДЗ* обязательно. При этом возможны два подхода к оформлению решения:

1. *ОДЗ* в виде неравенства или системы неравенств присоединяют к данному неравенству (данной системе) и полученную систему решают;
2. Находят *ОДЗ*. Решают данное неравенство (систему неравенств), пользуясь лишь равносильными преобразованиями в рамках *ОДЗ*. Из полученных решений удаляют те, которые не входят в *ОДЗ*.

Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 \geqslant 4, \\ (x+2)(6-x) \geqslant 0. \end{cases}$$

В ответ запишите сумму целых решений.

Решим оба неравенства системы методом интервалов.

$$x^2 \geqslant 4,$$

$$x^2 - 4 \geqslant 0,$$

$$(x-2)(x+2) \geqslant 0,$$

Решением этого неравенства является объединение промежутков $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Аналогично получим, что решением неравенства $(x+2)(6-x)\geqslant 0$ является отрезок [-2;6].

Решением системы неравенств с одной переменной будет пересечение решений всех неравенств системы.

Нанесем оба решения на одну числовую ось (сверху решение первого, снизу второго):

Пересечение решений это те точки на оси, у которых имеется двойная штриховка (снизу и сверху). Это множество, состоящее из числа -2 и отрезка [2;6].

В этом множестве содержатся целые числа: -2, 2, 3, 4, 5 и 6. Их сумма равна 18.

Ответ: 18

Объединение неравенств

Отметим также, что очень часто решениями данного неравенства (системы неравенств) является объединение решений двух или более неравенств(систем неравенств). В таких случаях мы будем употреблять запись вида

$$\left[\begin{array}{l} f(x)\geq g(x) \\ h(x)<u(x) \end{array}\right.$$

Эту запись будем называть *объединением* неравенств. Решением объединения двух неравенств является всякое число, являющееся решением хотя бы одного из двух неравенств объединения. Иначе говоря, для решения объединения нужно найти множества всех решений первого и второго неравенств и найденные множества объединить.

Решить объединение неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{3x^3 - x^4 + 4x^2}{x^2 + x + 2} > 0, \\ \dfrac{x^2}{x^2 + x + 1} < 0. \end{array}\right.$$

В ответ запишите наибольшее целое решение.

Решаем первое неравенство. Разложим числитель левой части на множители, используя формулу разложения квадратного трехчлена на множители.

$$\frac{3x^3 - x^4 + 4x^2}{x^2 + x + 2} > 0, \qquad \frac{x^2(-x^2 + 3x + 4)}{x^2 + x + 2} > 0,$$

$$\frac{-x^2(x+1)(x-4)}{x^2 + x + 2} > 0,$$

Умножим обе части на (-1), знак неравенства изменится на противоположный:

$$\frac{x^2(x+1)(x-4)}{x^2+x+2}<0.$$

Квадратный трехчлен $x^2+x+2>0$, т.к. отрицательный дискриминант и положительный старший коэффициент (число, стоящее перед x^2).

Если умножить на него левую и правую часть неравенства, то получим равносильное неравенство:

$$x^2(x+1)(x-4) < 0.$$

Решив его методом интервалов, получим ответ:

$$(-1;0) \cup (0;4).$$

Решаем второе неравенство.

$$\frac{x^2}{x^2+x+1} < 0.$$

Рассуждая также, как и в первом неравенстве, приходим к выводу, что $x^2 + x + 1 > 0$ для всех x и на него можно умножить левую и правую части неравенства.

Получим неравенство:

$$x^2<0$$

Данное неравенство не имеет решений, так как квадрат любого числа неотрицательный.

Значит, второе неравенство совокупности решений не имеет. Поэтому решение совокупности совпадает с решением первого неравенства: $(-1;0)\cup(0;4)$.

Наибольшее целое решение — число 3.

Ответ: 3.

Рациональные неравенства

Рациональным называется всякое неравенство, сводящееся к неравенству вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$$

или вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0,$$

где P(x), Q(x) - некоторые многочлены.

Поскольку

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \leftrightarrow P(x) \times Q(x) > 0$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \leftrightarrow \begin{cases} P(x) \times Q(x) \geq 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$$

то для решения рациональных неравенств удобно применять метод интервалов.

При преобразованиях выражений и, в частности, при разложении их на множители иногда помогают *формулы сокращенного умножения*:

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ — *квадрат суммы;*

$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ — *квадрат разности;*

$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ — *разность квадратов;*

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ — *куб суммы;*

$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ — *куб разности;*

$(x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$ — *сумма кубов;*

$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$ — *разность кубов.*

Решение неравенства методом интервалов

$$\frac{x^2+2x-8}{x^2} \leqslant 0.$$

Разложим числитель левой части неравенства на скобки.

Для этого найдем решения уравнения

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x_1 = -4,\ x_2 = 2.$$

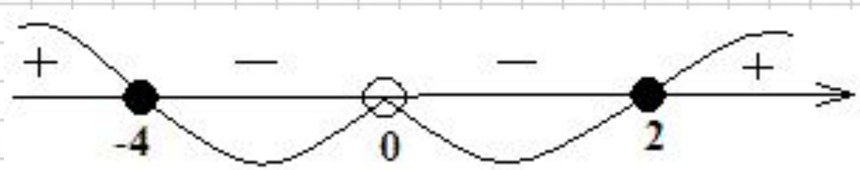
Мы получим разложение на множители:

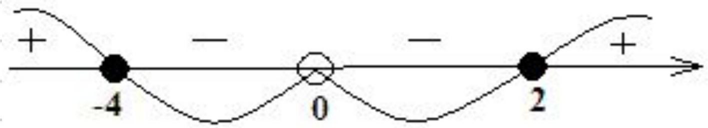
$$x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2).$$

$$\frac{(x+4)(x-2)}{x^2} \leqslant 0.$$

Найдем нули числителя и знаменателя:
$x_1 = -4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$.

Нанесем эти числа на ось, при этом нули знаменателя будут выколотыми точками, а нули числителя нет.





Расставим знаки на каждом интервале, с учетом того, что x_2 всегда больше или равен нуля. В результате должно получиться то, что изображено на рисунке выше.

Поскольку знак неравенства ≤, то мы выбираем те интервалы, над которыми стоит знак "-".

Записываем решение неравенства

$$\boxed{[-4; 0) \cup (0; 2]}$$

Показательные уравнения и неравенства

Стандартный способ решения *простейших показательных* уравнений и неравенств основывается на монотонности показательной функции, из которой получается следующее основное *правило отбрасывания оснований*: *пусть $a>1$, тогда уравнение или неравенство $a^f \vee a^g$ равносильно уравнению или неравенству $f \vee g$*, где $\vee$ - это $>, \geq, <, \leq$.

В этом правиле последнее уравнение или неравенство имеет тот же знак $\vee$, что и первое, так как показательная функция с основанием $a>1$ возрастает.

Если же основание *a* удовлетворяет неравенствам $0<a<1$, то в сформулированный переход необходимо внести поправку, *поменяв в конце знак на обратный*, а именно: > на <, знак ≥ на ≤ и.т.д., но знак = (как и знак ≠) при этом не меняется вовсе. Все дело в том, что показательная функция с основанием, меньшим единицы, уже не возрастает, а убывает.

Для приведения исходного показательного уравнения или неравенства к нужному виду могут пригодится следующие *формулы действий со степенями*(a, b>0):

$$a^0 = 1, \quad 1^x = 1;$$

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k} \quad (k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N});$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x};$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y};$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};$$

$$(a^x)^y = a^{xy};$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x;$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x.$$

К неравенствам вида $(a^f-a^g)xh\vee 0$ применим *метод замены множителя*, позволяющий сильно упростить выражение в скобках и состоящий в следующем: пусть $a>1$, тогда множитель a^f-a^g можно заменить множителем $f-g$ того же знака.

При указанной замене сохраняется каждое из трех возможных событий: положительность множителя, его отрицательность и равенство его нулю. В случае $0<a<1$ тот же множитель a^f-a^g можно заменить противоположным множителем $g-f$.

Решение показательного неравенства

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2x+3}{3x-1}} \le \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4x-7}{6x+5}}$$

Так как основание меньше единицы, но больше нуля, то наше неравенство эквивалентно неравенству:

$$\frac{2x+3}{3x-1} \geq \frac{4x-7}{6x+5}$$

Перенесем все в левую часть, приведем к общему знаменателю. Решим неравенство методом интервалов, получим ответ:

$$\frac{(2x+3)(6x+5)-(4x-7)(3x-1)}{(3x-1)(6x+5)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{53x+8}{(3x-1)(6x+5)}\geq 0 \Leftrightarrow \boxed{x\in\left(-\frac{5}{6},-\frac{8}{53}\right)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)}$$

Логарифмические уравнения и неравенства

Стандартный метод решения *простейших логарифмических* уравнений и неравенств опирается на монотонность логарифмической функции, т.е. на следующее основное *правило отбрасывания логарифмов*: пусть a>1, тогда уравнение или неравенство $\log_a f > \log_a g$ равносильно системе:

$$\begin{cases} f > g \\ f, g > 0 \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases}$$

В случае $0<a<1$, неравенстве $f \vee g$ итоговой системе необходимо заменить неравенством $f \wedge g$, так как логарифмическая функция с таким основанием a убывает.

Если же основание логарифма не есть константа, то отдельно разбираются случаи, когда оно больше единицы и когда меньше.

Для того чтобы отбросить логарифмы в уравнении или неравенстве $\log_a f \vee g$, его правую часть можно представить в нужном виде с помощью тождества:

$$g = \log_a(a^g)$$

Для приведения исходного логарифмического уравнения или неравенства к нужному виду могут пригодиться следующие формулы действий с

$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1;$

$a^{\log_a x} = x$ — *основное логарифмическое тождество;*

$\log_a x + \log_a y = \log_a (xy)$ — *логарифм произведения;*

$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$ — *логарифм частного;*

$p \log_a x = \log_a (x^p)$ — *логарифм степени;*

$\frac{p}{q} \log_a x = \log_{(a^q)} (x^p) \quad (q \neq 0);$

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ — *формула перехода к новому основанию;*

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$

Решение логарифмического уравнения

$$\log_{x-1} 25 = 2$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} X - 1 \neq 1 \\ X - 1 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} X \neq 2 \\ X > 1 \end{cases}$$

Воспользуемся основным логарифмическим тождеством:

$$(x - 1)^2 = 25$$

$$X^2 - 2x + 1 = 25$$

$$X^2 - 2x - 24 = 0$$

$\boxed{X_1=6}$ $X_2=-4$ (не принадлежит ОДЗ)

К неравенствам вид$(\log_a f - \log_a g)\times h \vee 0$ также применим *метод замены множителя*: пусть *a>1* тог$\log_a f - \log_a g$ель можно заменить множителем *f-g* того же знака при дополнительных условиях *a, f, g>0* и *a≠1*.

Важный частный случай этой замены получается при подстановке в ней *g=1*: пусть *a>1*, тогда множ$\log_a f$ь можно заменить множителем *f-1* при *f>0*.

Опять же, в случае $0<a<1$ множитель $\log_a f - \log_a g$ можно заменить противоположным множителем $g-f$ при $g, f, a>0$ и $a \neq 1$, а множитель $\log_a f$ - противоположным множителем $1-f$ при $f>0$.

Решение логарифмического неравенства

$$\frac{1}{2}log_{4+x}\left(x^2+2x+1\right)+\ log_{-x-1}(-x^2-5x-4)\le 3$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2+2x+1>0, \\ -x^2-5x-4>0, \\ x+4>0, \\ x+4\neq 1, \\ -x-1>0, \\ -x-1\neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-4, \\ x\neq -3, \\ x<-1, \\ x\neq -2, \\ x\neq -1. \end{cases}$$

$$x\in(-4;-3)\cup(-3;-2)\cup(-2;-1).$$

На ОДЗ неравенство примет вид:

$$\log_{4+x}|x+1| + \log_{-x-1}((-x-1)(x+4)) \leqslant 3;$$

$$\log_{4+x}(-x-1) + \log_{-x-1}(-x-1) + \log_{-x-1}(x+4) \leqslant 3;$$

$$\log_{x+4}(-x-1) + \frac{1}{\log_{x+4}(-x-1)} - 2 \leqslant 0;$$

$$\frac{\log^2_{x+4}(-x-1) - 2\log_{x+4}(-x-1) + 1}{\log_{x+4}(-x-1)} \leqslant 0;$$

$$\frac{(\log_{x+4}(-x-1) - 1)^2}{\log_{x+4}(-x-1)} \leqslant 0; \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \log_{x+4}(-x-1) - 1 = 0, \\ \log_{x+4}(-x-1) < 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x-1 = x+4, \\ \begin{cases} 0 < x+4 < 1, \\ -x-1 > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x+4 > 1, \\ -x-1 < 1; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2{,}5, \\ \begin{cases} -4 < x < -3, \\ x < -2, \end{cases} \\ \begin{cases} x > -3, \\ x > -2; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2{,}5, \\ -4 < x < -3, \\ x > -2. \end{array}\right.$$

С учётом ОДЗ получаем: $x \in (-4; -3) \cup \{-2{,}5\} \cup (-2; -1)$.

Ответ: $(-4; -3) \cup \{-2{,}5\} \cup (-2; -1)$.

Иррациональные уравнения и неравенства

Для избавления от радикалов в *иррациональных* уравнениях или неравенствах требуется, прежде всего, умение возводить обе части в квадрат. Делается это с помощью следующего основного *правила возведения в квадрат*, базирующегося на возрастании простейшей квадратичной функции на положительной полуоси.

Пусть *f,g≥0*, тогда уравнение или неравенство $f \vee g$ равносильно уравнению или неравенству $f^2 \vee g^2$.

Это правило не распространяется на те случаи, в которых хотя бы одна из частей уравнения или неравенства отрицательна, - их нужно рассматривать отдельно.

Что же касается возведения в квадрат неравенств, то тут ситуация гораздо серьезнее: несоблюдение основного правила может привести как к приобретению, так и к потере решений.

Преобразования иррациональных уравнений или неравенств производится по следующим ***формулам действий с арифметическими корнями*** $(x, y \geq 0; n, m \in N$ и $k \in Z)$:

$$\sqrt[n]{1} = 1, \quad \sqrt[n]{0} = 0;$$

$$(\sqrt[n]{x})^n = x;$$

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$$ — *корень из произведения;*

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \quad (y \neq 0)$$ — *корень из дроби;*

$$\sqrt[n]{x^k} = (\sqrt[n]{x})^k$$ — *корень из степени;*

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$$ — *корень из корня;*

$$\sqrt[nm]{x^{km}} = \sqrt[n]{x^k}$$ — *правило сокращения.*

Корни четной степени извлекаются только из *неотрицательных чисел*. Поэтому, действуя по приведенным формулам, например, с квадратными корнями, нужно аккуратно отслеживать возможное расширение *ОДЗ* уравнения или неравенства и, главное, не допускать ее сужения.

Решение иррационального уравнения

$$\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9} \qquad (1)$$

Введем новую переменную $x^2+x=U$, тогда уравнение (1) примит вид $\sqrt{U+4}+\sqrt{U+1}=\sqrt{2U+9}$ (2)

Т.к. вырожение под знаком корня всегда больше или равно нуля то $U\geq-1$.

Возведем обе части уравнения в квадрат получим:

$$U+4+U+1+2\sqrt{(U+4)(U+1)}=2U+9$$

$$2\sqrt{(U+4)(U+1)}=4$$

$$\sqrt{(U+4)(U+1)}=2$$

$$(U+4)(U+1)=4$$

$$U^2+5U+4=4$$

$$U^2+5U=0$$

$$U(U+5)=0$$

$$U_1=-5 \quad U_2=0$$

Т.к. $U\geq-1$ то значение $U_1=-5$ не подходит. Теперь подставим значение U, получим что $x^2+x=0$;

$$x(x+1)=0$$

$$U_1=-1 \quad U_2=0$$

Проверим подстановкой удовлетворяют ли найденные корни исходному уравнению. Убеждаемся что $X_1=-1$; $X_2=0$ удовлетворяют уравнению.

$\boxed{\text{Ответ: } -1;\ 0}$

К неравенствам вид $(\sqrt{f} - \sqrt{g}) \times h \vee 0$ также применим *метод замены множителя*, вытекающий из основного правила возведения в квадрат и состоящий в следующем $\sqrt{f} - \sqrt{g}$ житель можно заменить множителем *f-g* того же знака при дополнительных условиях *f, g≥0*.

Важный частный случай этой замены получается в результате подстановки в ней *g=0*: множи $\sqrt{f}$ ль можно заменить множителем

f при *f≥0*.

Решение иррационального неравенства

$$2^{\frac{\sqrt{x(2x^2-22x+60)}}{6-x}} \geq 20-4x.$$

ОДЗ: $x \neq 6,\ 2x^3 - 22x^2 + 60x = 2x(x-6)(x-5) \geq 0 \Leftrightarrow$

$x \in [0;\ 5] \cup (6;\ +\infty).$

Заметим, что в ОДЗ $x \geq 0$, поэтому существует
и значит

$$\frac{\sqrt{2x(x-5)(x-6)}}{x-6} \leq 2(x-5) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2x(x-5)(x-6)} - 2(x-5)(x-6)}{(x-6)} =$$

$$\frac{\sqrt{2x(x-5)(x-6)} - \sqrt{4(x-5)^2(x-6)^2}}{(x-6)} = \sqrt{(x-5)(x-6)}\frac{(\sqrt{2x} - \sqrt{4(x-5)(x-6)})}{(x-6)} \leq 0.$$

Мы воспользовались здесь тем, что в ОДЗ $x \geq 0$, $(x-5)(x-6) \geq 0$ и потому существуют выписанные в последней строчке корни. Кроме того, мы вынесли за скобку $\sqrt{(x-5)(x-6)}$, который по вышесказанному существует. Этот корень неотрицателен и потому не влияет на знак неравенства, следовательно, на него можно сократить, не забывая, что он может ещё обратиться в нуль и те *x*, для которых корень обращается в нуль, являются решениями неравенства. Таким образом, в ответ необходимо включить число $x = 5$. При $x = 6$ корень обращается в нуль, но $x = 6$ не входит в ОДЗ неравенства. Воспользуемся теперь тем, что знак разности корней совпадает со знаком разности подкоренных выражений.

Имеем:

$$\sqrt{(x-5)(x-6)}\,\frac{\left(\sqrt{2x}-\sqrt{4(x-5)(x-6)}\right)}{(x-6)}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5, \\ \dfrac{2x-4(x-5)(x-6)}{x-6}\le 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5, \\ \dfrac{2(x-4)\left(x-\dfrac{15}{2}\right)}{x-6}\ge 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5, \\ x\in[4;6)\cup\left(\dfrac{15}{2};+\infty\right]; \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[4;6)\cup\left(\frac{15}{2};+\infty\right].$$

С учетом ОДЗ получаем ответ:

$$\boxed{x\in[4;5]\cup\left[\frac{15}{2};+\infty\right)}$$

Уравнения и неравенства с модулем

Стандартное *правило раскрытия модуля* основывается на его *определении*:

$$|x| = \begin{cases} x, x > 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

Раскрывая сразу несколько модулей, приходится разбирать случаи, которые задаются знаками выражений, стоящих под модулем. Однако, если количество модулей велико, то велико и число разбираемых случаев.

Его можно заметно сократить за счет применения *метода интервалов*.

Другой подход , напоминающий скорее не раскрытие, а *отбрасывание* модулей, применим к *простейшим* уравнениям и неравенствам вида $|f|=|g|$ или $|f|^{\vee}g$.

Он использует ***геометрический смысл*** модуля, состоящий в том, что модуль $|x|$ численно равен расстоянию на числовой прямой от точки x до точки 0.

Исходя из этого смысла, можно установить справедливость, например, таких утверждений:

- *уравнение $|f|=|g|$ равносильно совокупности $f=\pm g$;*
- *уравнение $|f|=g$ равносильно системе $f=\pm g$; $g\geq 0$;*
- *неравенство $|f|<g$ равносильно двойному неравенству $-g<f<g$;*
- *неравенство $|f|>g$ равносильно совокупности $f>g$; $f<-g$.*

Полезную роль при преобразовании выражений могут сыграть следующие *свойства* модулей:

$|x|^2 = x^2;$

$|x| = \sqrt{x^2};$

$|xy| = |x| \cdot |y|$ — *модуль произведения;*

$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$ — *модуль дроби;*

$|x| \geqslant x;$

$|x + y| \leqslant |x| + |y|$ — *неравенство треугольника*[1];

$|x - y| \geqslant ||x| - |y||.$

К неравенствам вида $(|f|-|g|)xh \vee 0$ также применим *метод замены множителя*: множитель $|f|-|g|$ можно заменить множителем f^2-g^2 того же знака.

Решение уравнения с модулем

$$|x - 1| - 2|x + 2| = 0$$

Найдем точки перемены знака модуля из условий:

$$x - 1 = 0 \quad \text{и} \quad x + 2 = 0$$

$$x = 1 \qquad\qquad x = -2$$

Рассмотрим данное уравнение на промежутках

$(-\infty;-2]$, $[-2;1]$, $[1;+\infty)$

На промежутке $(-\infty; -2]$ уравнение имеет вид:

$$(-x+1)-2\cdot(-x-2)=0$$

$$-x+1+2x+4=0$$

$$x+5=0$$

$$x=-5$$

-5 <u>принадлежит</u> промежутку $(-\infty; -2]$

На промежутке [-2;1] уравнение имеет вид:

$$(- x + 1) - 2\cdot (x + 2) = 0$$

$$- x + 1 - 2x - 4 = 0$$

$$- 3x - 3 = 0$$

$$3x = - 3$$

$$x = - 1$$

- 1 принадлежит промежутку [-2;1]

На промежутке [1;+∞) уравнение имеет вид:

$$(x - 1) - 2\cdot(x + 2) = 0$$

$$x - 1 - 2x - 4 = 0$$

$$-x - 5 = 0$$

$$x = -5$$

- 5 <u>не принадлежит </u>промежутку [1;+∞)

Ответ: x= -5, -1

Решение неравенства с модулем

$$\left||x^3 - x - 1| - 5\right| \geq x^3 + x + 8.$$

Как видно, найти значения *x*, при которых подмодульное выражение обращается в нуль, чрезвычайно затруднительно. Однако переход к равносильной системе значительно упрощает дело. Имеем:

$$\left|\left|x^3-x-1\right|-5\right| \geq x^3+x+8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x^3-x-1\right|-5 \geq x^3+x+8, \\ \left|x^3-x-1\right|-5 \leq -x^3-x-8; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x^3-x-1\right| \geq x^3+x+13, \\ \left|x^3-x-1\right| \leq -x^3-x-3; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x^3-x-1 \geq x^3+x+13, \\ x^3-x-1 \leq -x^3-x-13; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x^3-x-1 \leq -x^3-x-3, \\ x^3-x-1 \geq x^3+x+3; \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x \leq -7, \\ x \leq -\sqrt[3]{6}; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \leq -1, \\ x \leq -2; \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -\sqrt[3]{6}, \\ x \leq -2; \end{array}\right. \boxed{\Leftrightarrow x \leq -\sqrt[3]{6}.}$$