Электронный учебник по математике

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Тригономе́трия (от греч. τρίγονο (треугольник) и греч. μετρειν (измерять),

то есть измерение треугольников) — раздел математики,

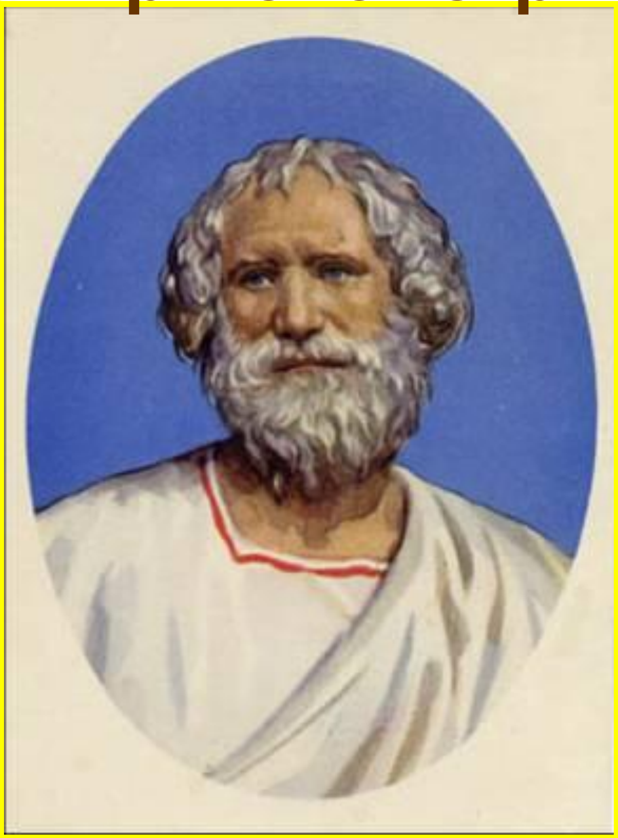
в котором изучаются тригонометрические функции и их приложения к геометрии.

Данный термин впервые появился в *1595* г. как название книги немецкого математика Бартоломеуса Питискуса (*Bartholomäus Pitiscus, 1561—1613*),

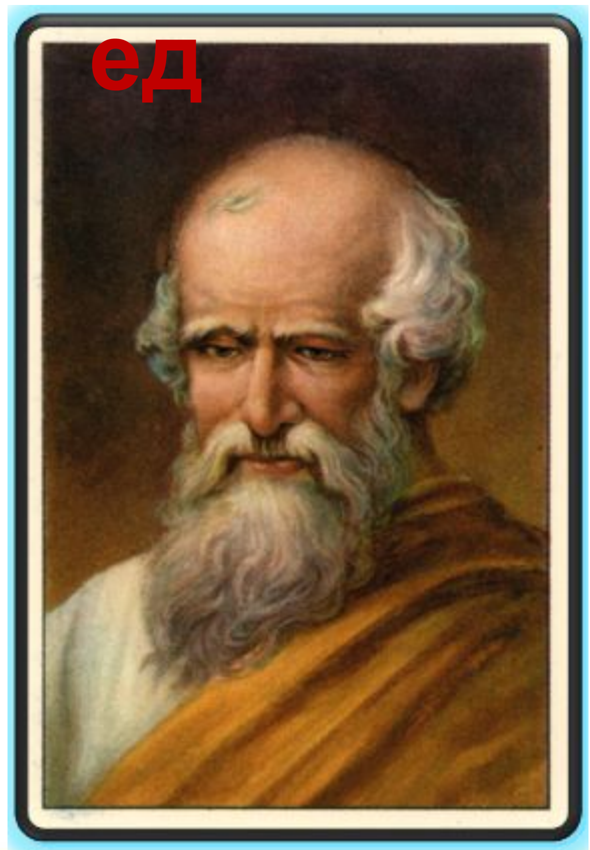
а сама наука ещё в глубокой древности

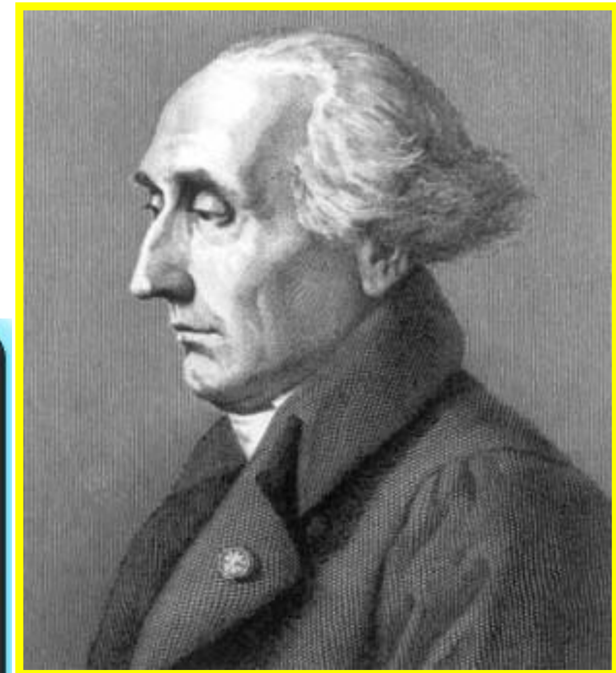
Начало тригонометрии

Эти ученые внесли свой вклад в развитие тригонометрии



Архим
ед





Жозеф
Луи
Лагранж

Фал
ес

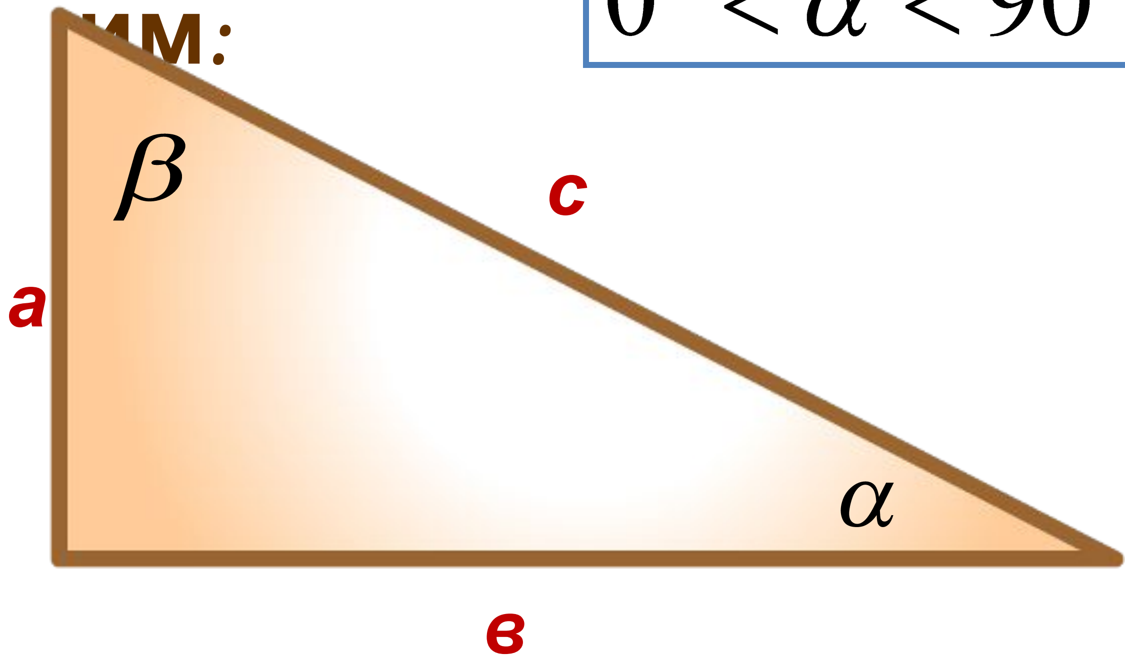
Вспомним:

$$0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

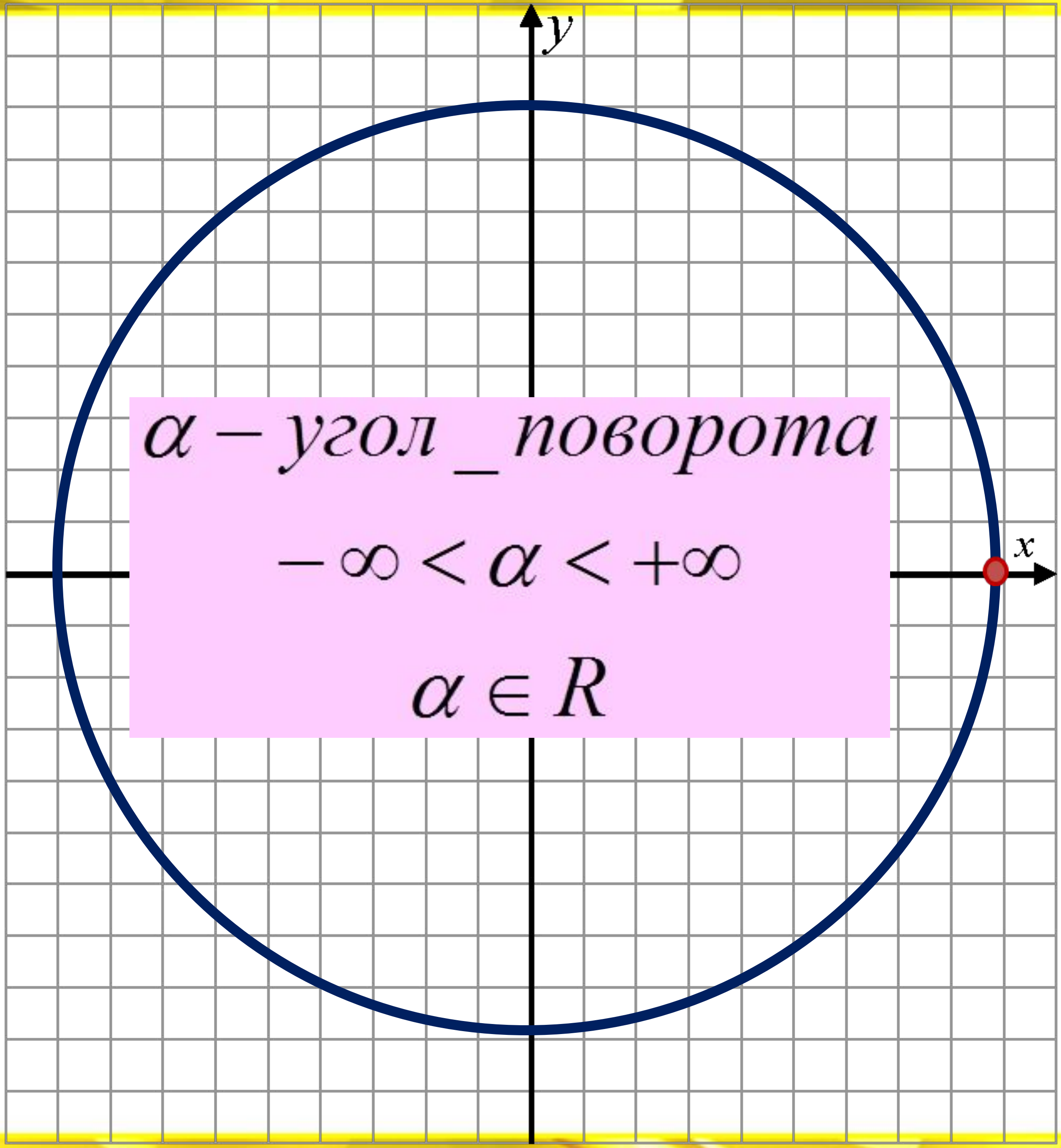
$$tg\alpha = \frac{a}{b}$$



Синус острого угла в прямоугольном треугольнике — отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинус — отношение прилежащего катета к гипотенузе.

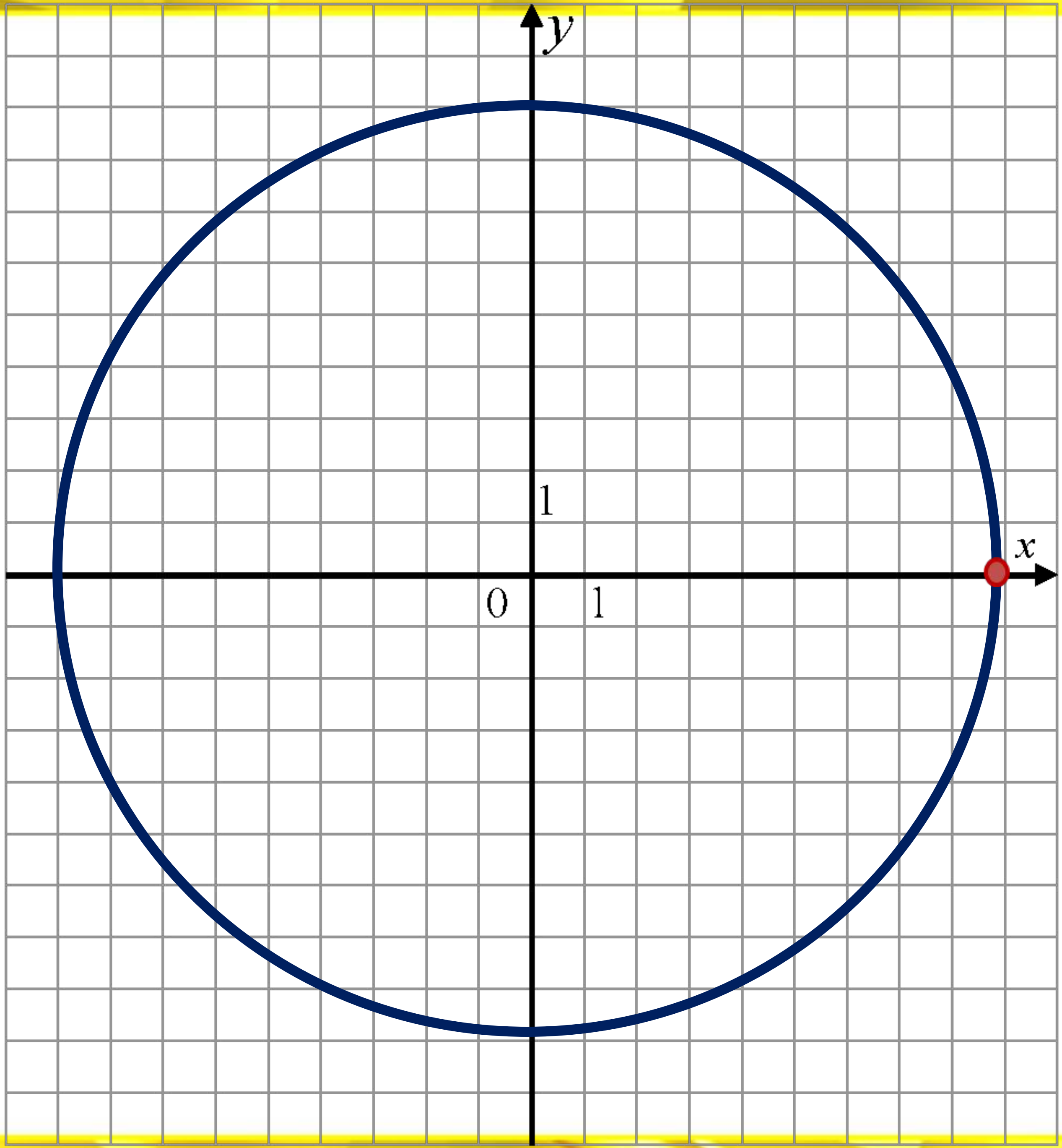
Тангенс — отношение противолежащего



$$\alpha - угол\_поворота$$

$$-\infty < \alpha < +\infty$$

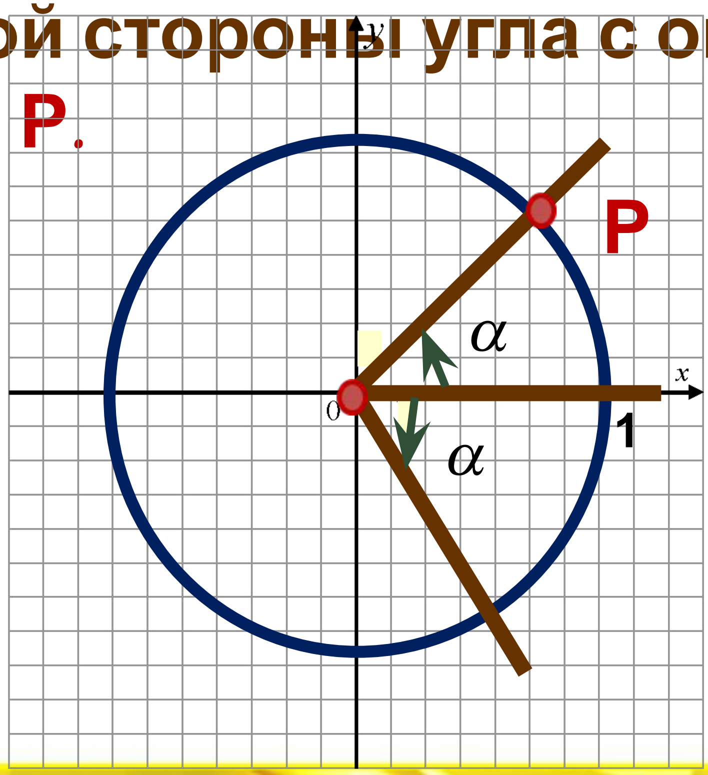
$$\alpha \in R$$



y
x
0
1
1

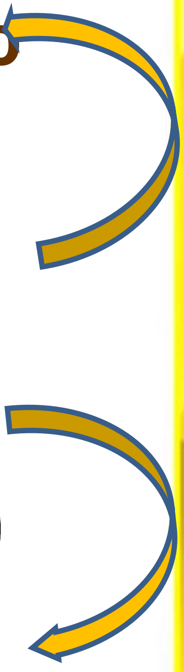
Livre d'or

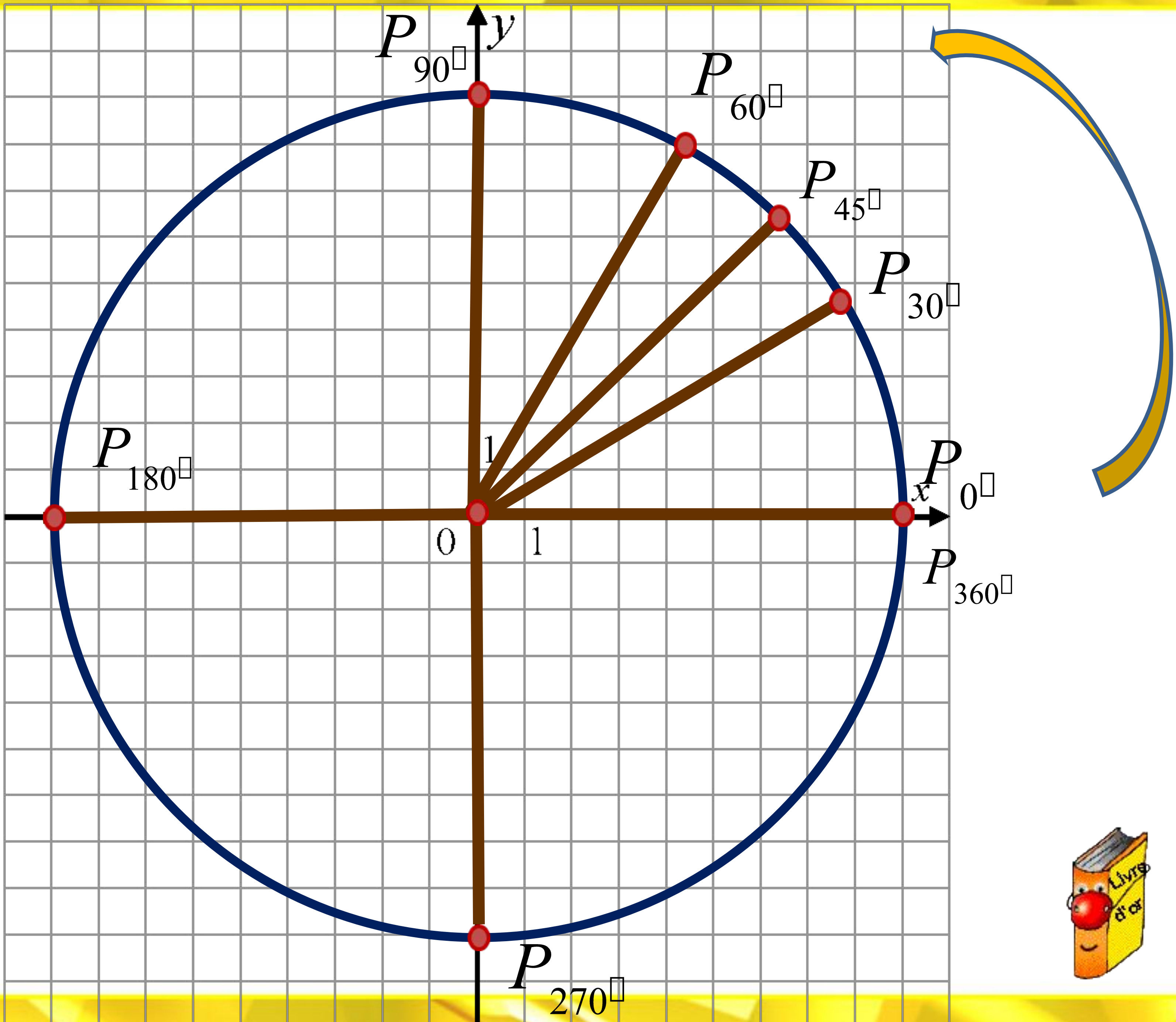
Рассмотрим в прямоугольной системе координат окружность единичного радиуса и отложим от горизонтальной оси угол (если величина угла положительна, то откладываем против часовой стрелки, иначе по часовой стрелке). Точку пересечения построенной стороны угла с окружностью обозначим **Р**.

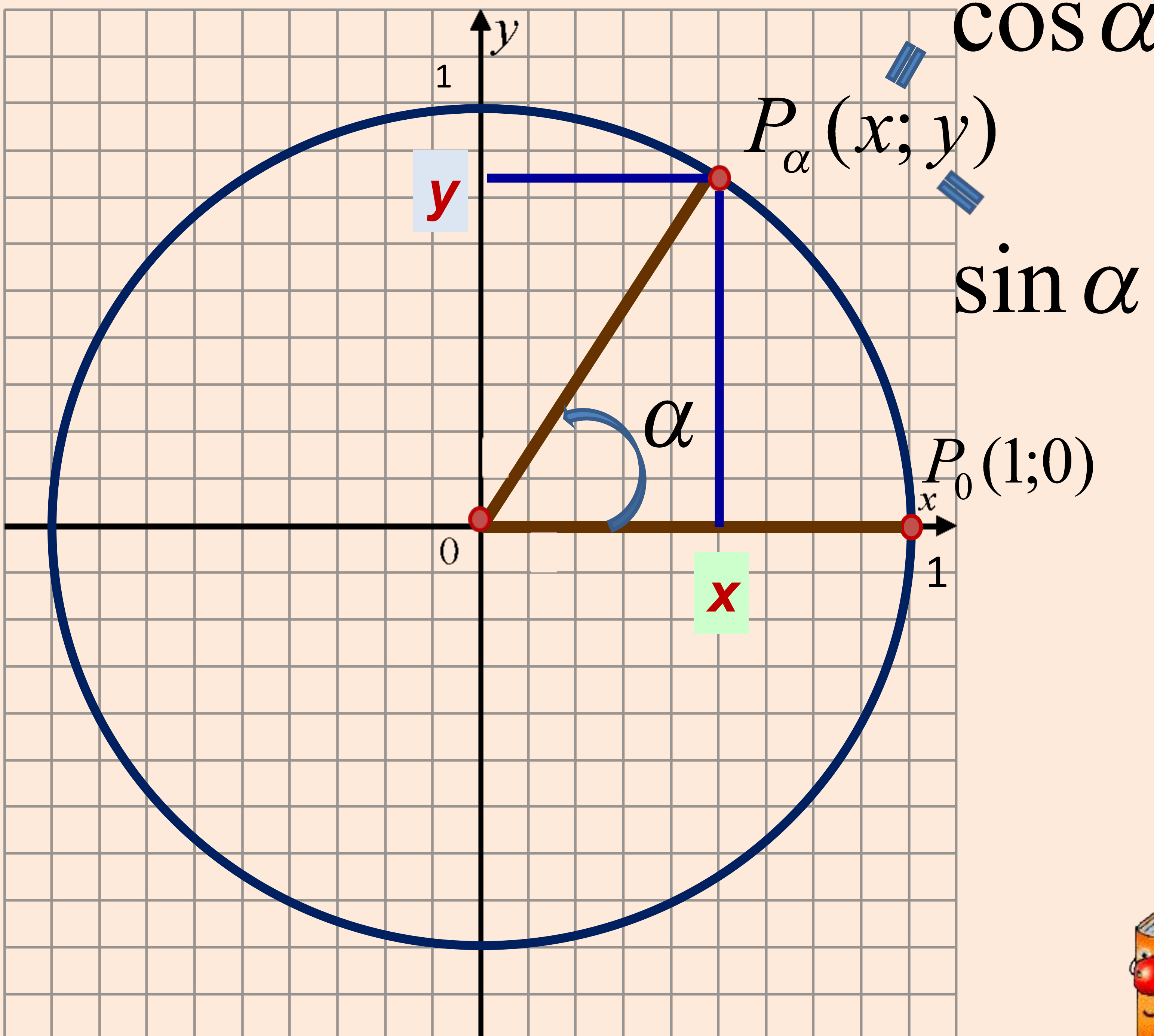


$$\alpha > 0$$

$$\alpha < 0$$




y
P
90
P
60
P
45
P
30
P
180
1
P
0
x
0
1
P
360
P
270



$\cos\alpha$
$P_\alpha(x; y)$
$\sin\alpha$
y
1
y
α
$P_0(1;0)$
x
0
1
x

Синус угла определяется как ордината точки P_α

$$\sin\alpha = y$$

Косинус — абсцисса точки P_α

$$\cos\alpha = x$$

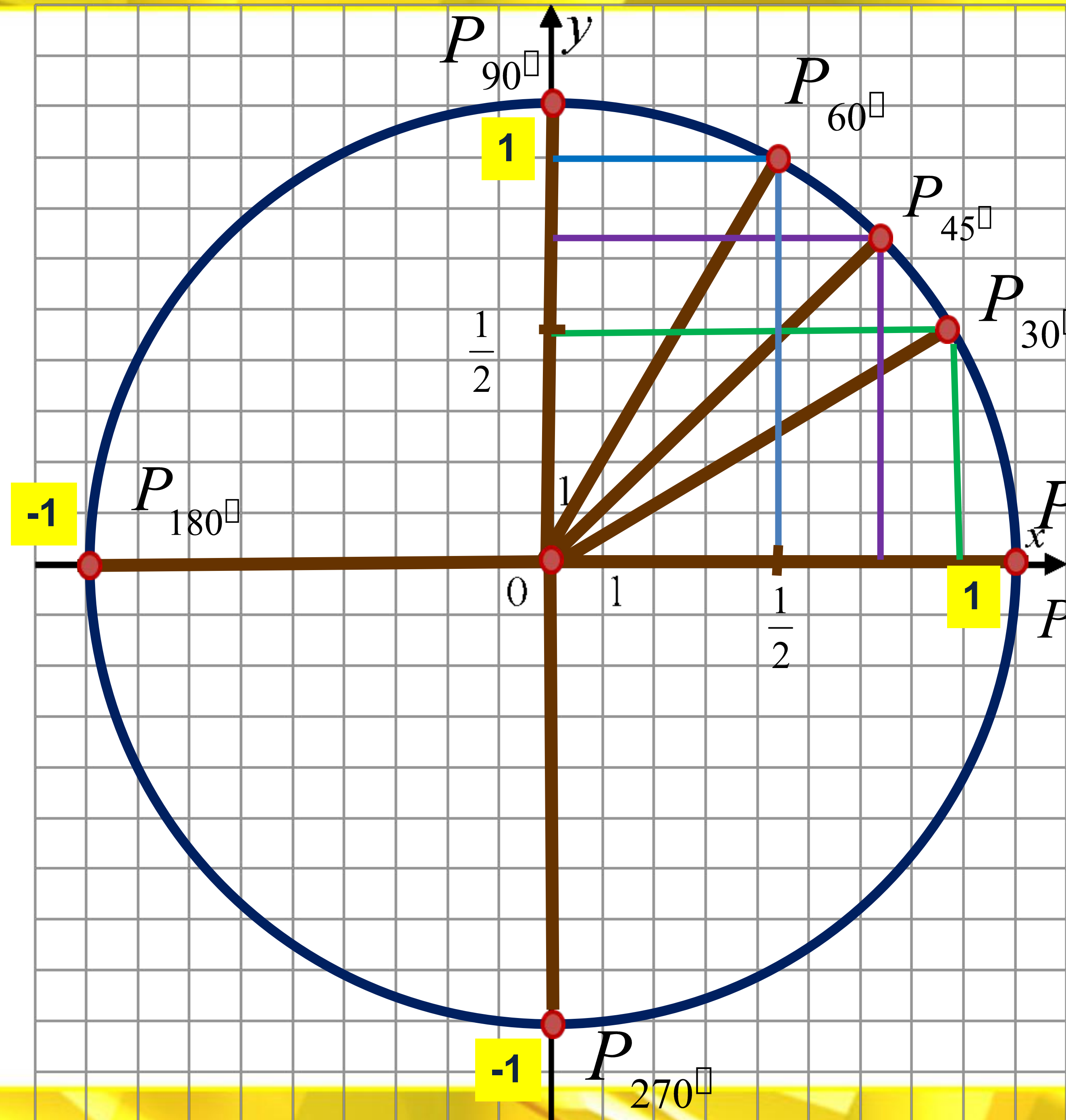
Тангенс – отношение ординаты к абсциссе точки P_α

$$tg\alpha = \frac{y}{x}$$

Котангенс – отношение абсциссы к

$$ctg\alpha = \frac{x}{y}$$

P_α



$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ \approx 0{,}9$$

$$\sin 45^\circ \approx 0{,}7$$

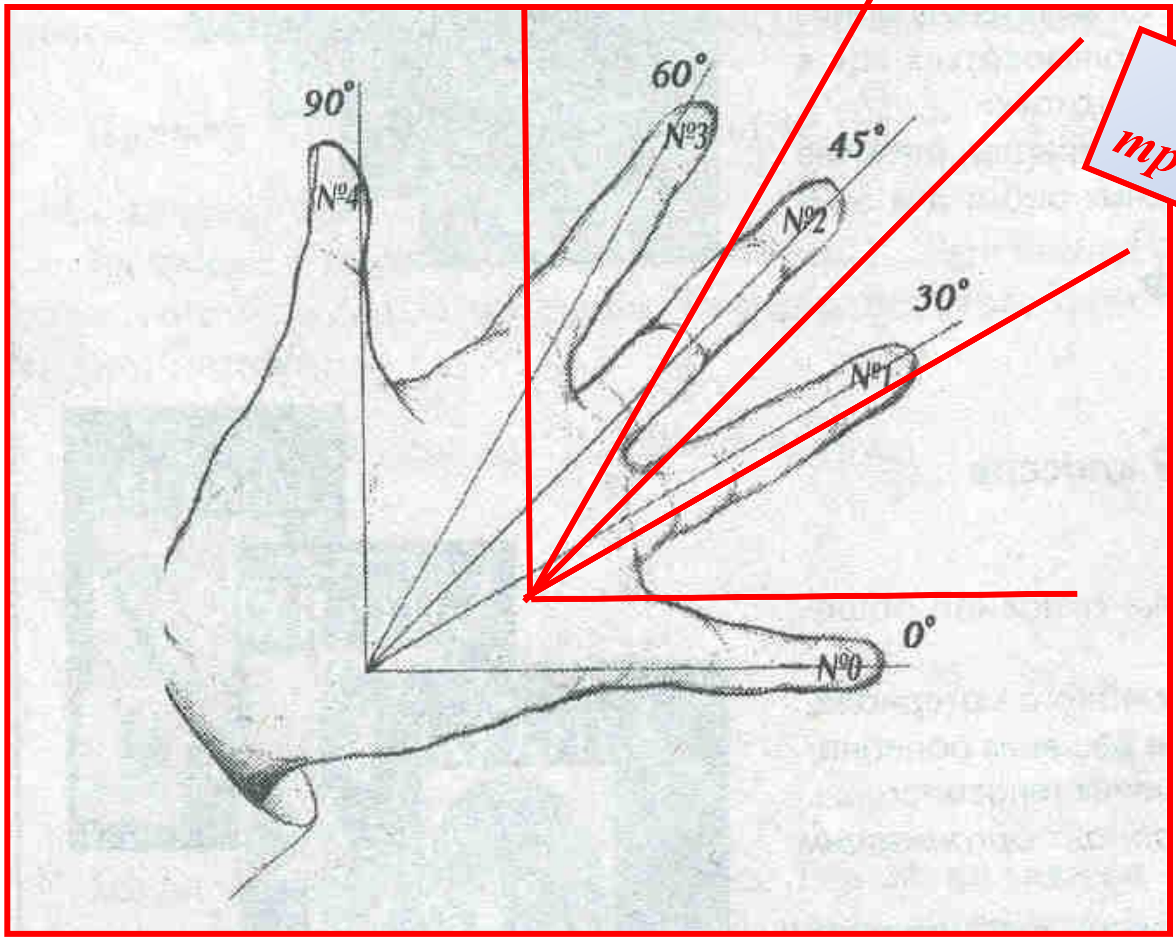
$$\cos 45^\circ \approx 0{,}7$$

$$\sin 60^\circ \approx 0{,}9$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$ctg\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Это интересно тригонометрия на ладони



№0	Мизинец	0^0
№1	Безымянный	30^0
№2	Средний	45^0
№3	Указательный	60^0
№4	Большой	90^0

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{n}}{2}$$

Значение синуса

№ пальца	Угол α	
0	0	$\sin 0^{\circ} = \frac{\sqrt{0}}{2} = 0$
1	30	$\sin 30^{\circ} = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$
2	45	$\sin 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3	60	$\sin 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
4	90	$\sin 90^{\circ} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$

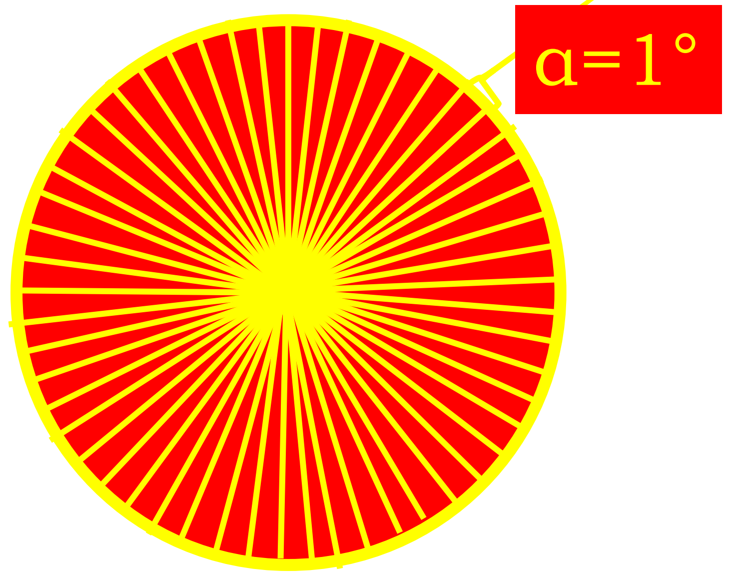
Единицы измерения углов

Радианы

Градусы

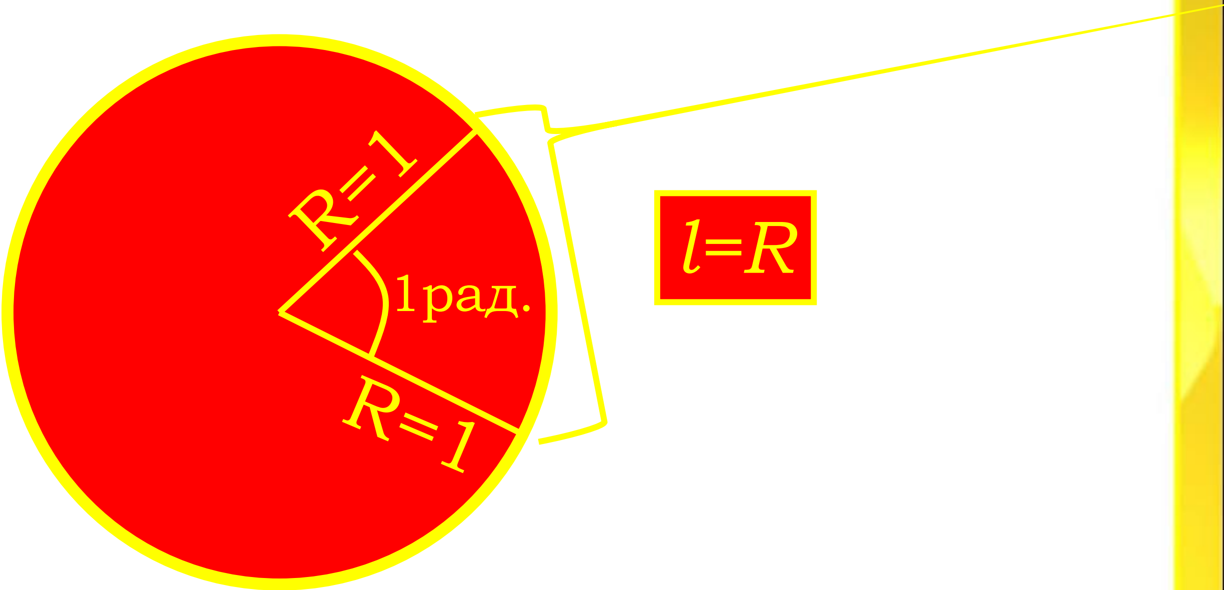
π радиан=180°

Градусная мера угла



1° – цена одного деления окружности, разделенной на 360 частей

Радианная мера угла



1 радиан – это величина центрального угла, длина дуги которого равна радиусу

Перевод из градусной меры в радианную:

$$n^{\circ} = \frac{\pi \cdot n^{\circ}}{180^{\circ}}\, рад.$$

Перевод из радианной меры в градусную:

$$n \cdot \pi_{\,рад.} = n \cdot 180^{\circ}$$

А теперь примеры!

$$30^\circ = \frac{\pi \cdot 30^\circ}{180^\circ} \text{рад.} = \frac{\pi}{6} \text{рад.}$$

$$90^\circ = \frac{\pi \cdot 90^\circ}{180^\circ} \text{рад.} = \frac{\pi}{2} \text{рад.}$$

$$135^\circ = \frac{\pi \cdot 135^\circ}{180^\circ} \text{рад.} = \frac{3\pi}{4} \text{рад.}$$

Продолжаем решать примеры

$$\frac{\pi}{3} \text{рад.} = \frac{180^{\circ}}{3} = 60^{\circ}$$

$$\frac{\pi}{4} \text{рад.} = \frac{180^{\circ}}{4} = 45^{\circ}$$

$$\frac{4\pi}{5} \text{рад.} = \frac{4 \cdot 180^{\circ}}{5} = 144^{\circ}$$

Тренажер №1: переведите градусную меру в радианную .

$1^0 = \frac{\pi}{180}$

Нужно умножить число градусов на $\pi / 180$
т. е. на величину одного градуса в радианах.

10^0	=	$\pi/18$	36^0	=	$\pi/5$	180^0	=	π
15^0	=	$\pi/12$	45^0	=	$\pi/4$	270^0	=	$3\pi/2$
20^0	=	$\pi/9$	60^0	=	$\pi/3$	360^0	=	2π
18^0	=	$\pi/10$	75^0	=	$5\pi/12$	135^0	=	$3\pi/4$
30^0	=	$\pi/6$	90^0	=	$\pi/2$	225^0	=	$5\pi/4$

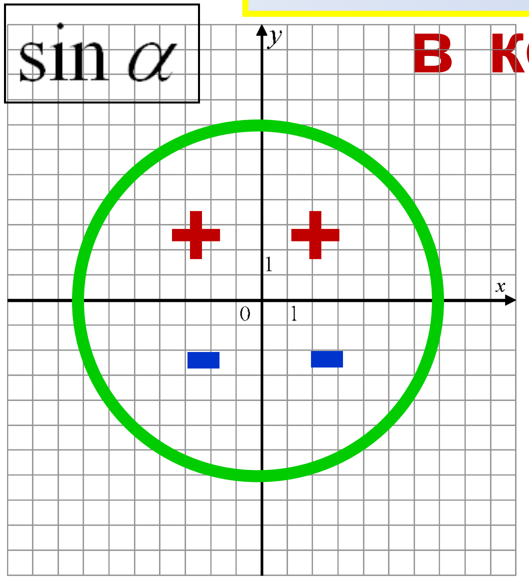
Тренажер №2: переведите радианную меру в градусную .

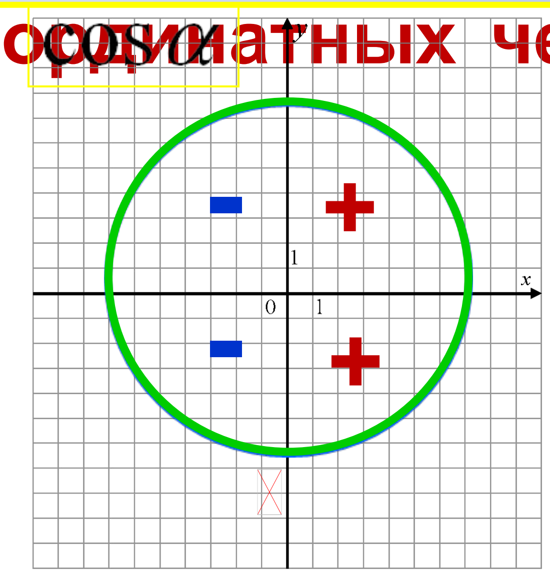
$$1\,рад = \frac{180^0}{\pi}$$

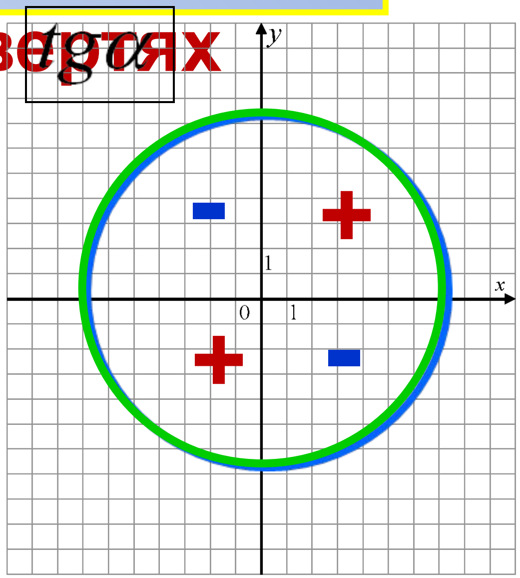
Нужно умножить число радиан на $180^0 / \pi$ т. е. на величину одного радиана в градусах.

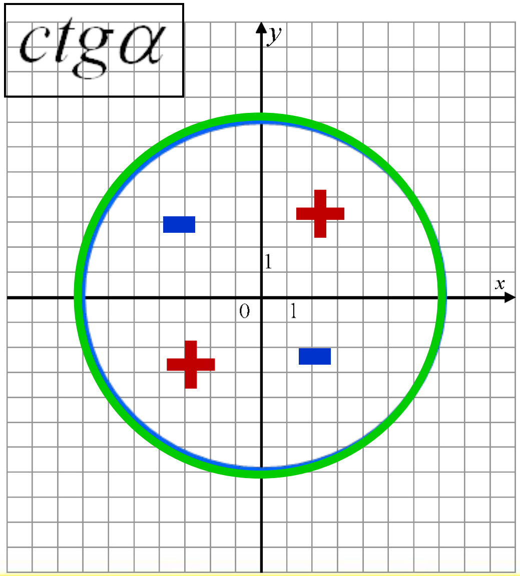
$\pi/12$	=	15^0	$\pi/7$	=	$180^0/7$	$\pi/18$	=	10^0
$\pi/2$	=	90^0	$\pi/8$	=	$45^0/2$	$\pi/20$	=	9^0
$\pi/3$	=	60^0	$\pi/9$	=	20^0	$\pi/30$	=	6^0
$\pi/4$	=	45^0	$\pi/10$	=	18^0	$2\pi/3$	=	120^0
$\pi/5$	=	36^0	$\pi/15$	=	12^0	$3\pi/4$	=	135^0

Знаки синуса, косинуса, тангенса, котангенса в координатных четвертях









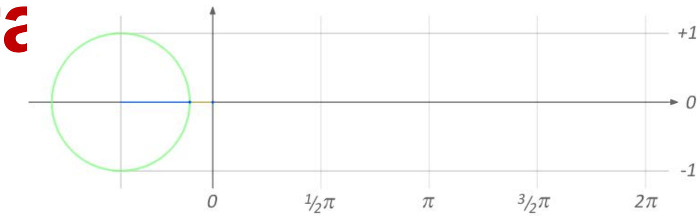
$$\sin 68^{\circ} > 0 \qquad \cos 76^{\circ} > 0$$

$$\sin 153^{\circ} > 0 \qquad \cos 236^{\circ} < 0$$

$$\sin 249^{\circ} < 0 \qquad tg 127^{\circ} < 0$$

$$\sin 315^{\circ} < 0 \qquad ctg 195^{\circ} > 0$$

Четность, нечетность синуса, косинуса,
тангенса, кота



$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

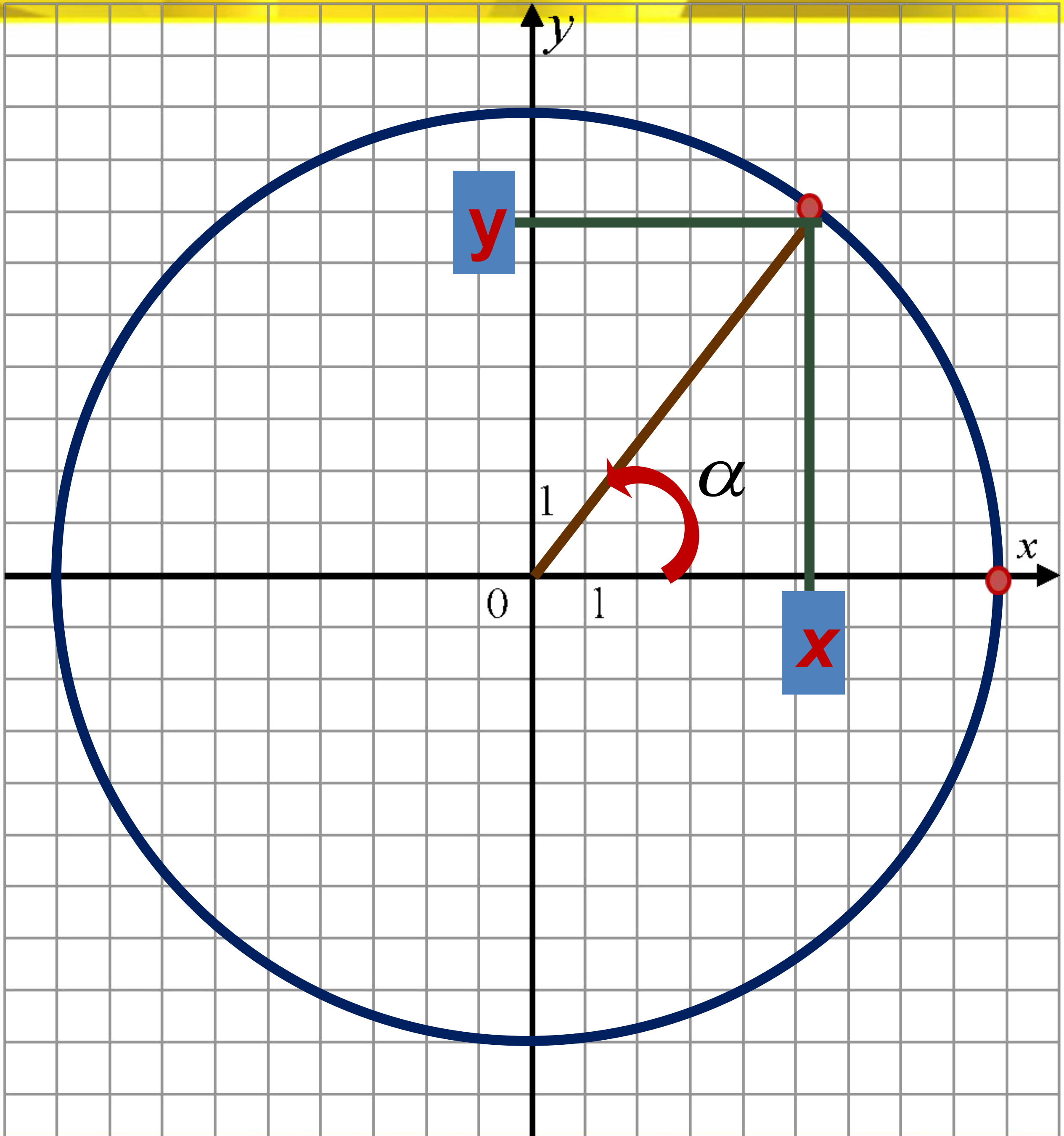
$$tg(-\alpha) = -tg\alpha$$

$$ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$$

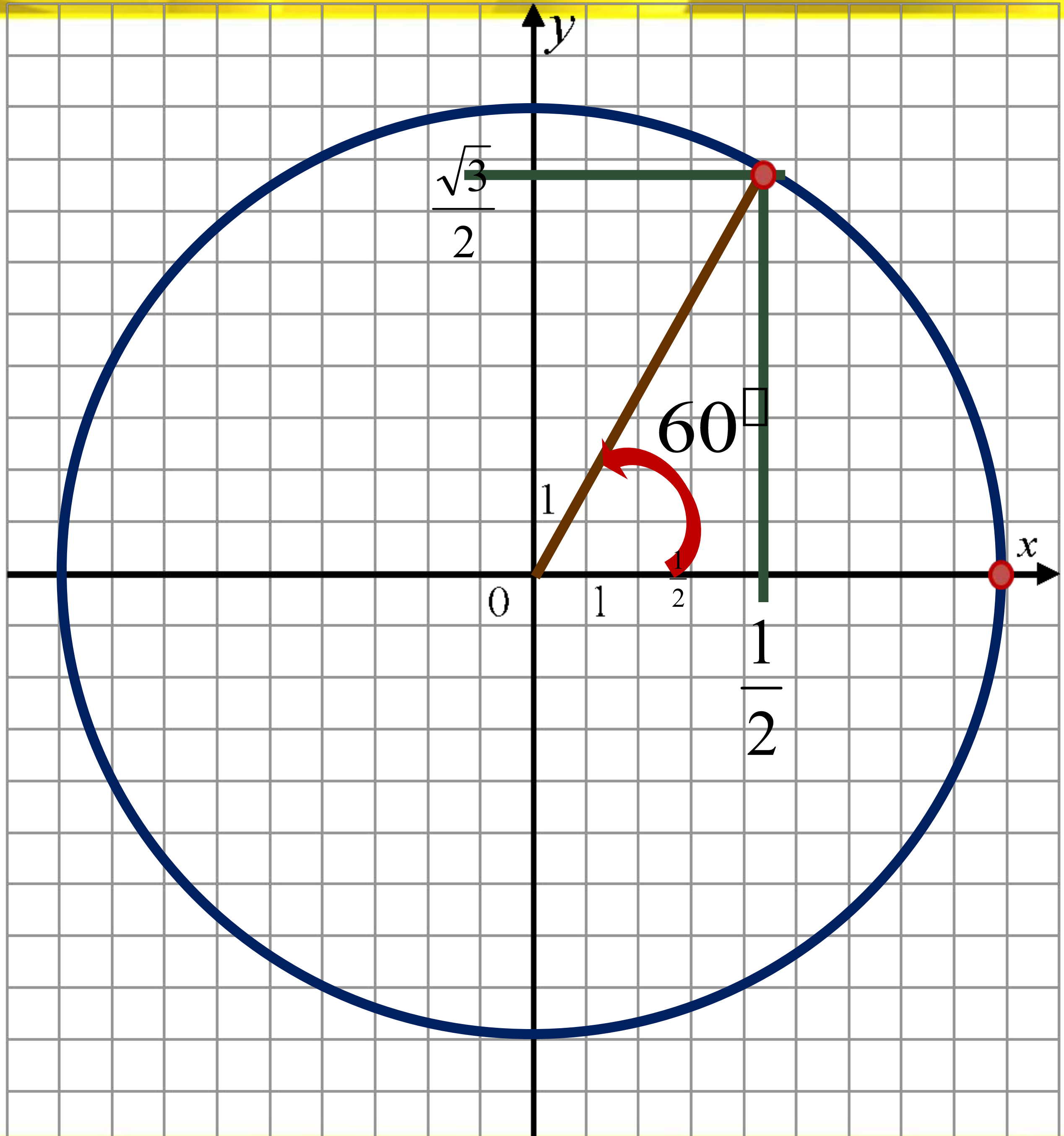
Нечетные функции

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

Четная функция



$$\sin\alpha =$$
$$= \sin(\alpha + 360^\circ) =$$
$$= \sin(\alpha + 2\cdot 360^\circ) =$$
$$= \sin(\alpha + n\cdot 360^\circ)$$
$$\cos\alpha =$$
$$= \cos(\alpha + 360^\circ) =$$
$$= \cos(\alpha + 2\cdot 360^\circ) =$$
$$= \cos(\alpha + n\cdot 360^\circ)$$
$$tg\alpha =$$
$$= tg(\alpha + n\cdot 180^\circ)$$
$$ctg\alpha =$$
$$= ctg(\alpha + n\cdot 180^\circ)$$



$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 420^\circ = ?$$

$$\sin 780^\circ = ?$$

$$\cos 420^\circ = ?$$

$$\cos 780^\circ = ?$$

$$\sin 780^\circ = \sin(60^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 420^\circ = \sin(60^\circ + 360^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 780^\circ = \cos(60^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 420^\circ = \cos(60^\circ + 360^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 765^\circ = \sin(45^\circ + 2\cdot 360^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 1110^\circ = \cos(30^\circ + 3\cdot 360^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(-1470^\circ) = -\sin 1470^\circ = -\sin(30^\circ + 4\cdot 360^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

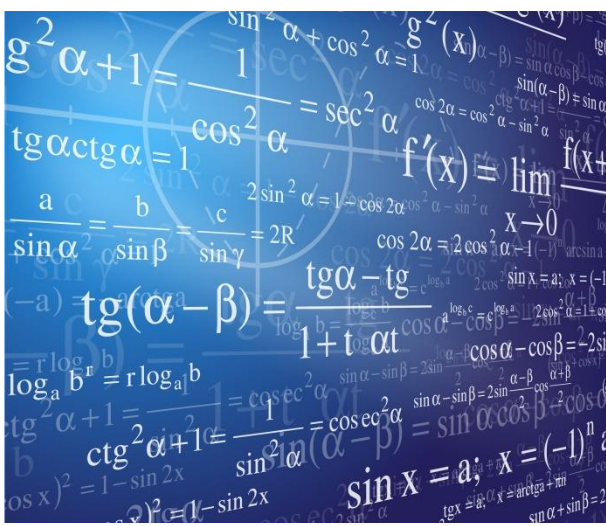
$$\cos(-1140^\circ) = \cos 1140^\circ = \cos(60^\circ + 3\cdot 360^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin(-810^\circ) = -\sin 810^\circ = -\sin(90^\circ + 2\cdot 360^\circ) = -\sin 90^\circ = -1$$

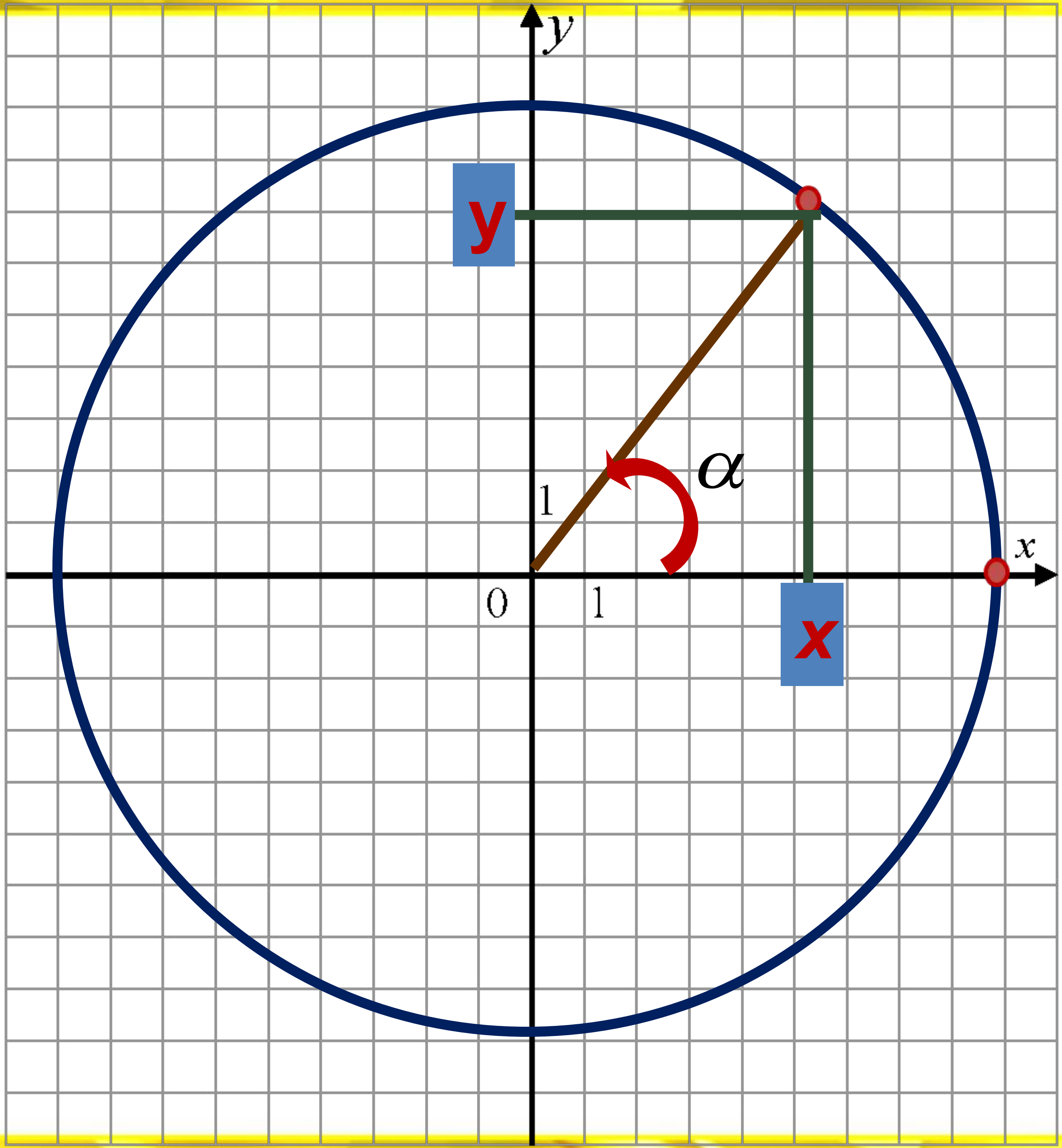
$$\cos(-1170^\circ) = \cos 1170^\circ = \cos(90^\circ + 3\cdot 360^\circ) = \cos 90^\circ = 0$$

Периодичность тригонометрических функций

При изменении угла на целое число оборотов значения синуса, косинуса, тангенса, котангенса



изме ются



$\sin\alpha =$

$= \sin(\alpha + 360^\circ) =$

$= \sin(\alpha + 2\cdot 360^\circ) =$

$= \sin(\alpha + n\cdot 360^\circ)$

$\cos\alpha =$

$= \cos(\alpha + 360^\circ) =$

$= \cos(\alpha + 2\cdot 360^\circ) =$

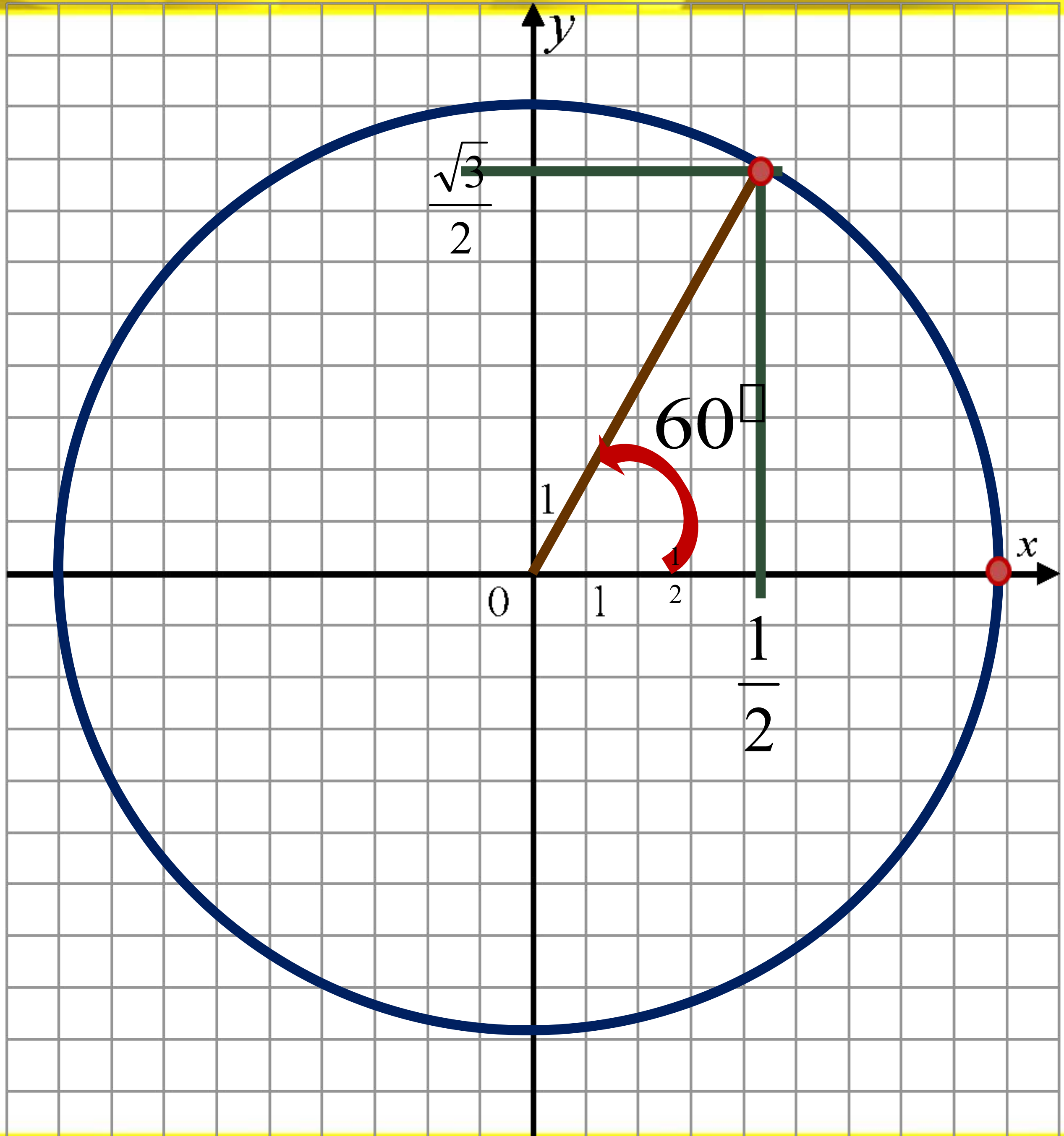
$= \cos(\alpha + n\cdot 360^\circ)$

$tg\alpha =$

$= tg(\alpha + n\cdot 180^\circ)$

$ctg\alpha =$

$= ctg(\alpha + n\cdot 180^\circ)$



$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 480^\circ = ?$$
$$\sin 780^\circ = ?$$

$$\cos 480^\circ = ?$$
$$\cos 780^\circ = ?$$

$$\sin 780^\circ = \sin(60^\circ + 2\cdot 360^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 420^\circ = \sin(60^\circ + 360^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 780^\circ = \cos(60^\circ + 2\cdot 360^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 420^\circ = \cos(60^\circ + 360^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

Зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

Основное тригонометрическое тождество:

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

$$\boxed{tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$\boxed{ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

$$\boxed{tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1}$$

Косинус, синус суммы и разности двух аргументов

Для любых двух углов α и β справедливы тождества:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

Тригонометрические функции двойного и половинного аргументов

Для любого угла α справедливы тождества:

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}}$$

$$\boxed{\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}}$$

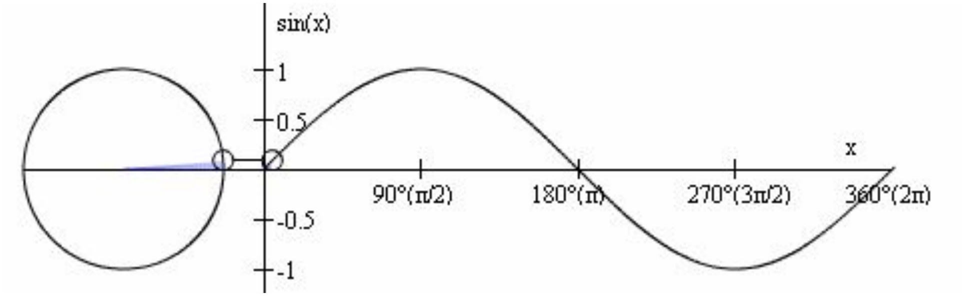
Тригонометрические функции двойного и половинного аргументов

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$

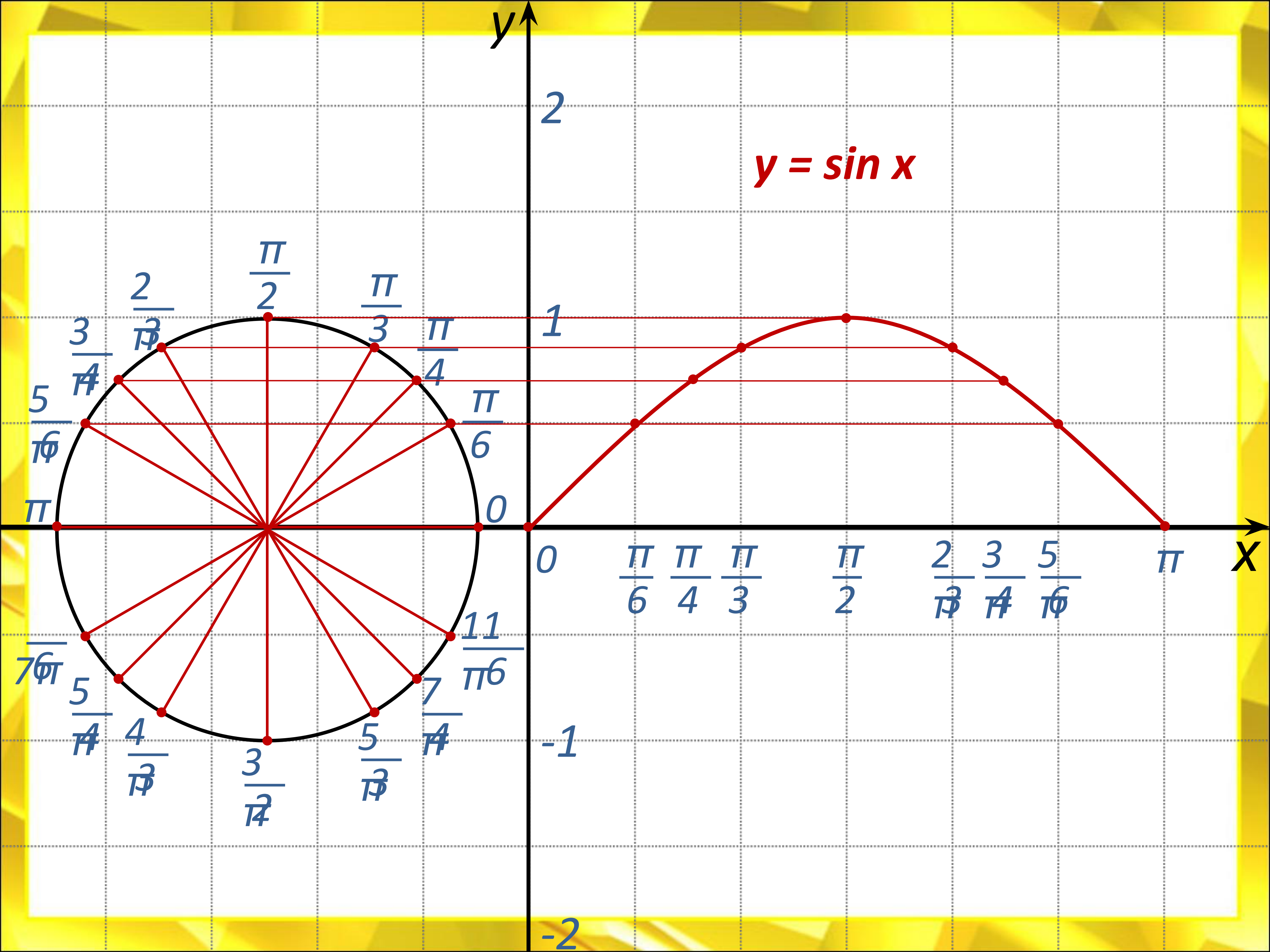
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$

$$\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}}$$

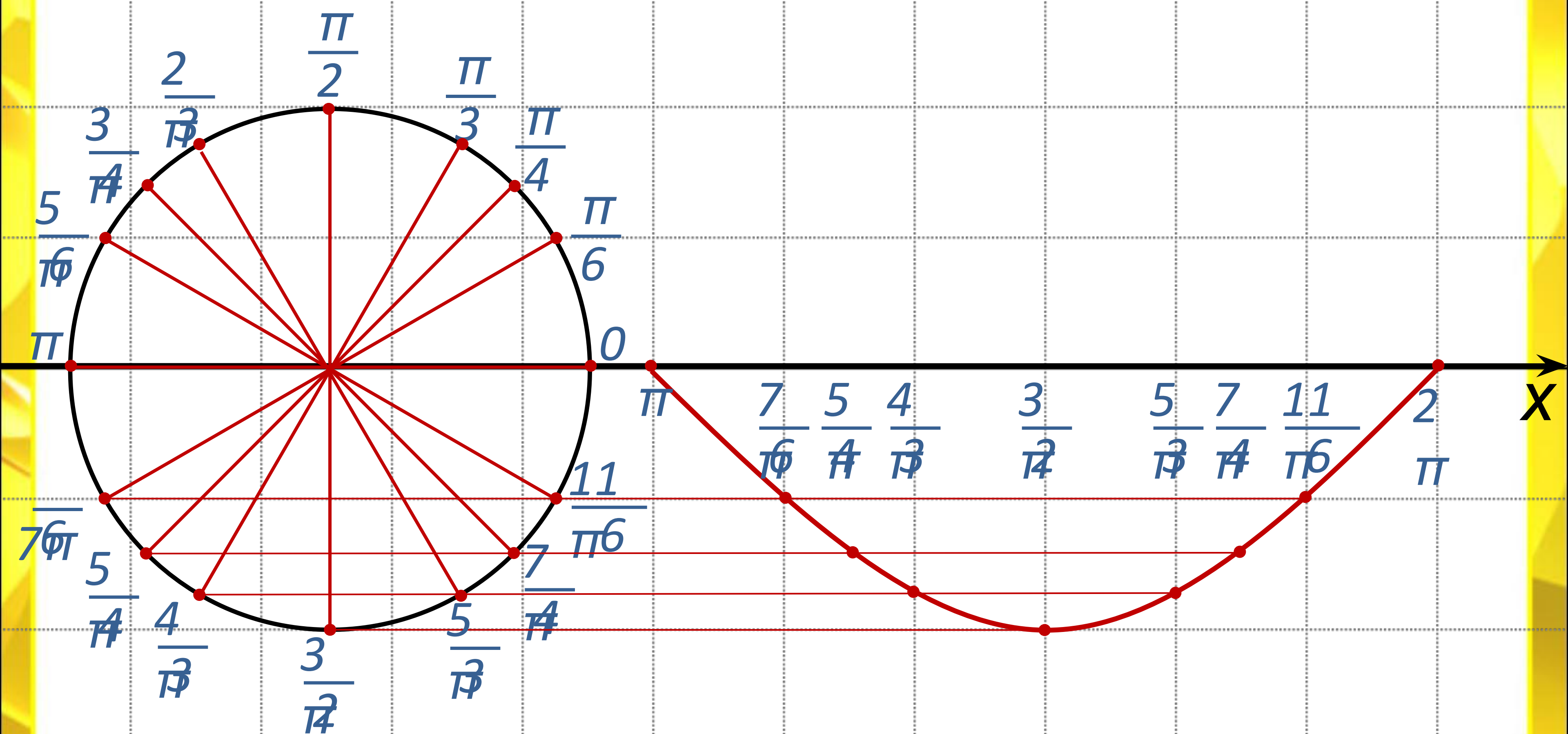


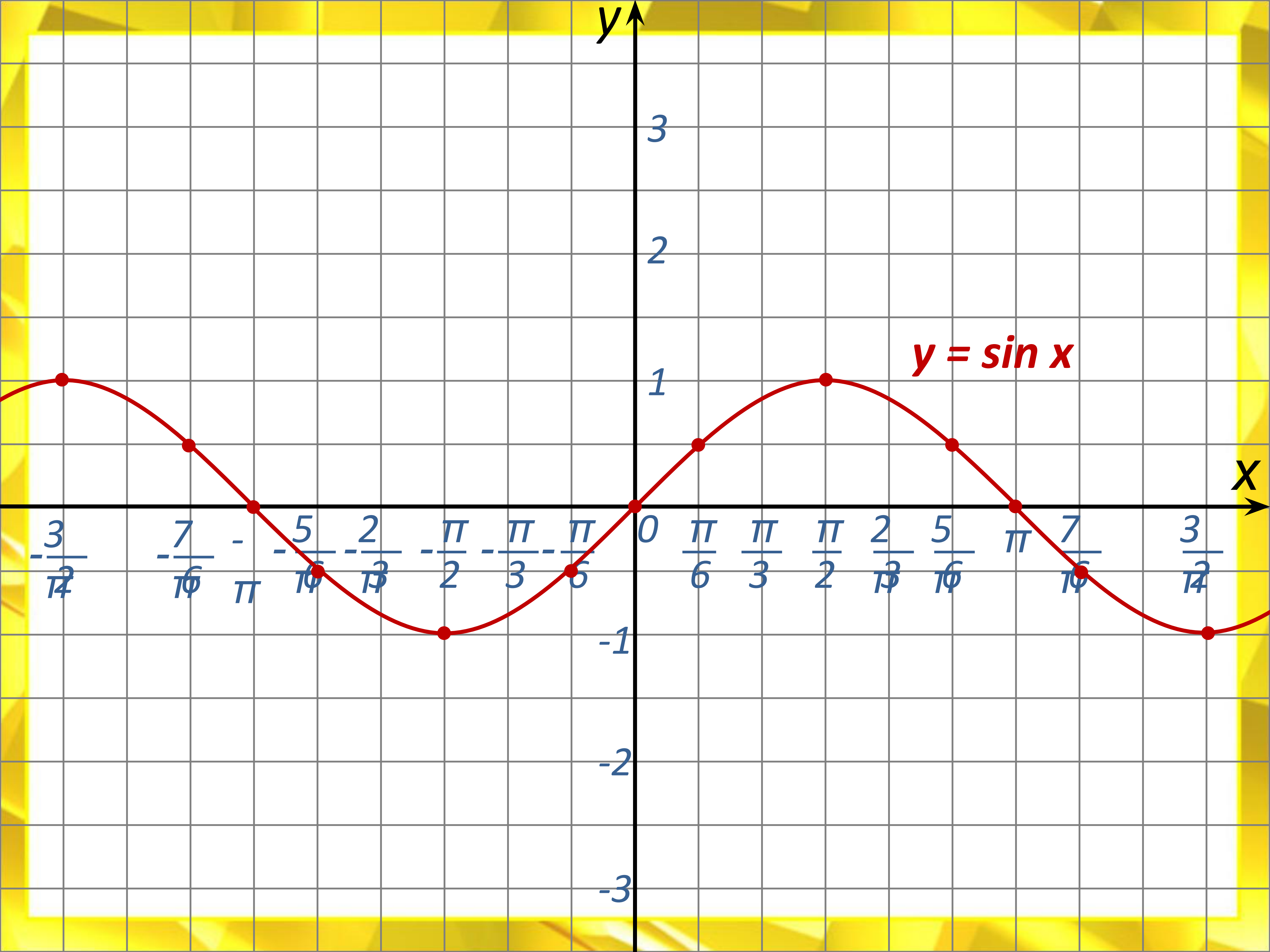
Построение графиков тригонометрических функций



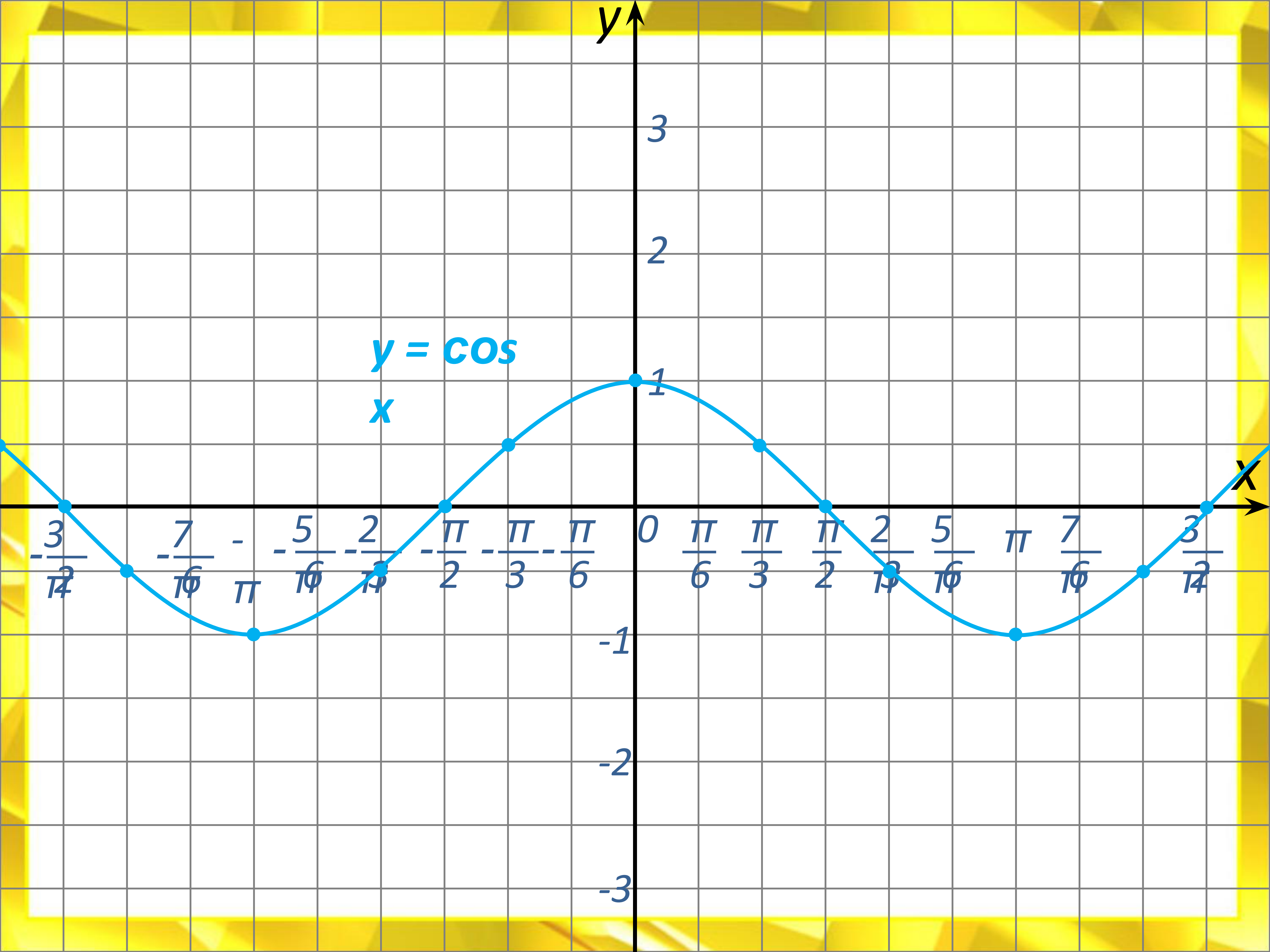
y
2
y = sin x
1
0
-1
-2
X
π/2
π/3
π/4
π/6
2π/3
3π/4
5π/6
π
7π/6
5π/4
4π/3
3π/2
5π/3
7π/4
11π/6

y = sin x

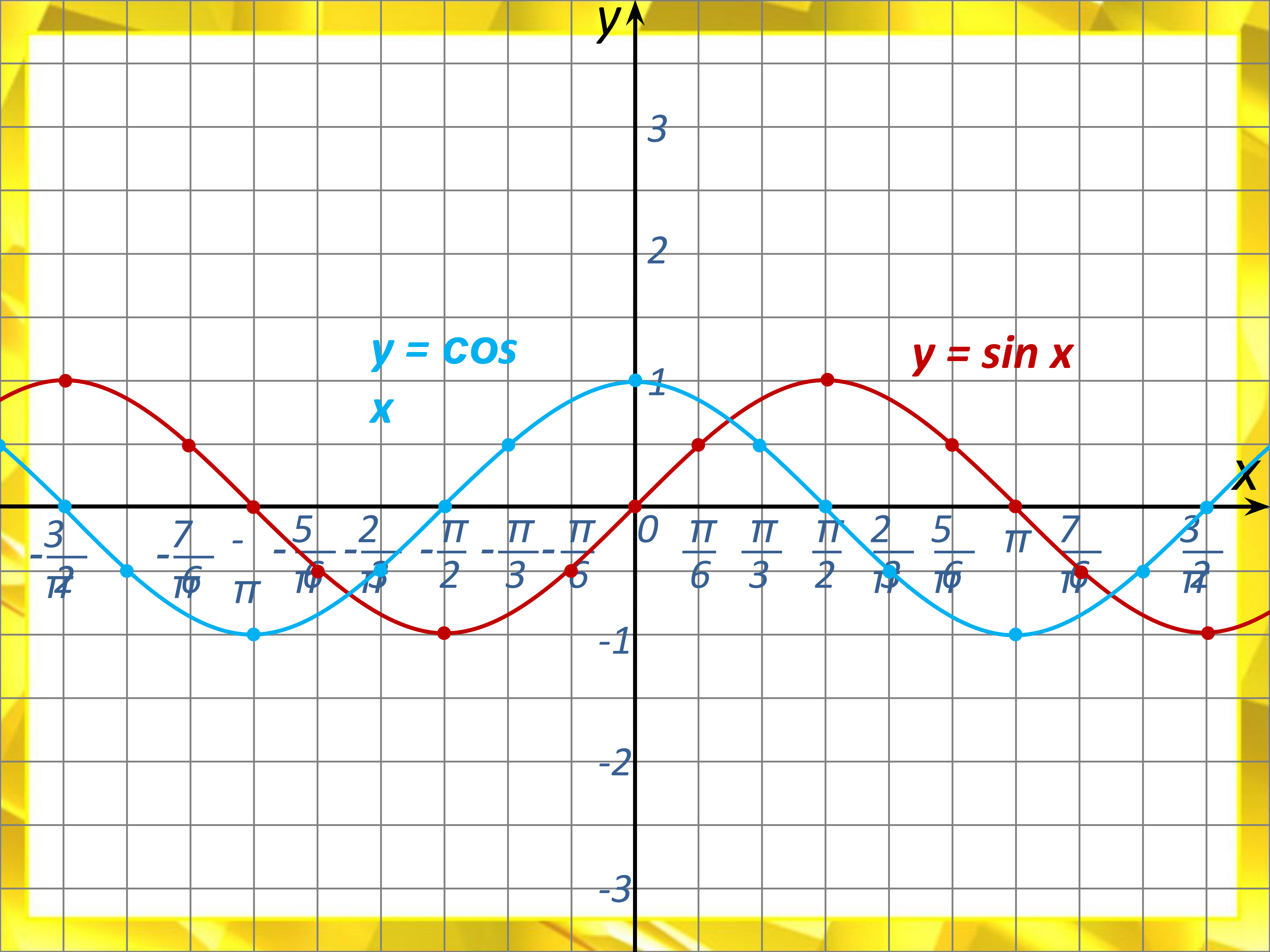




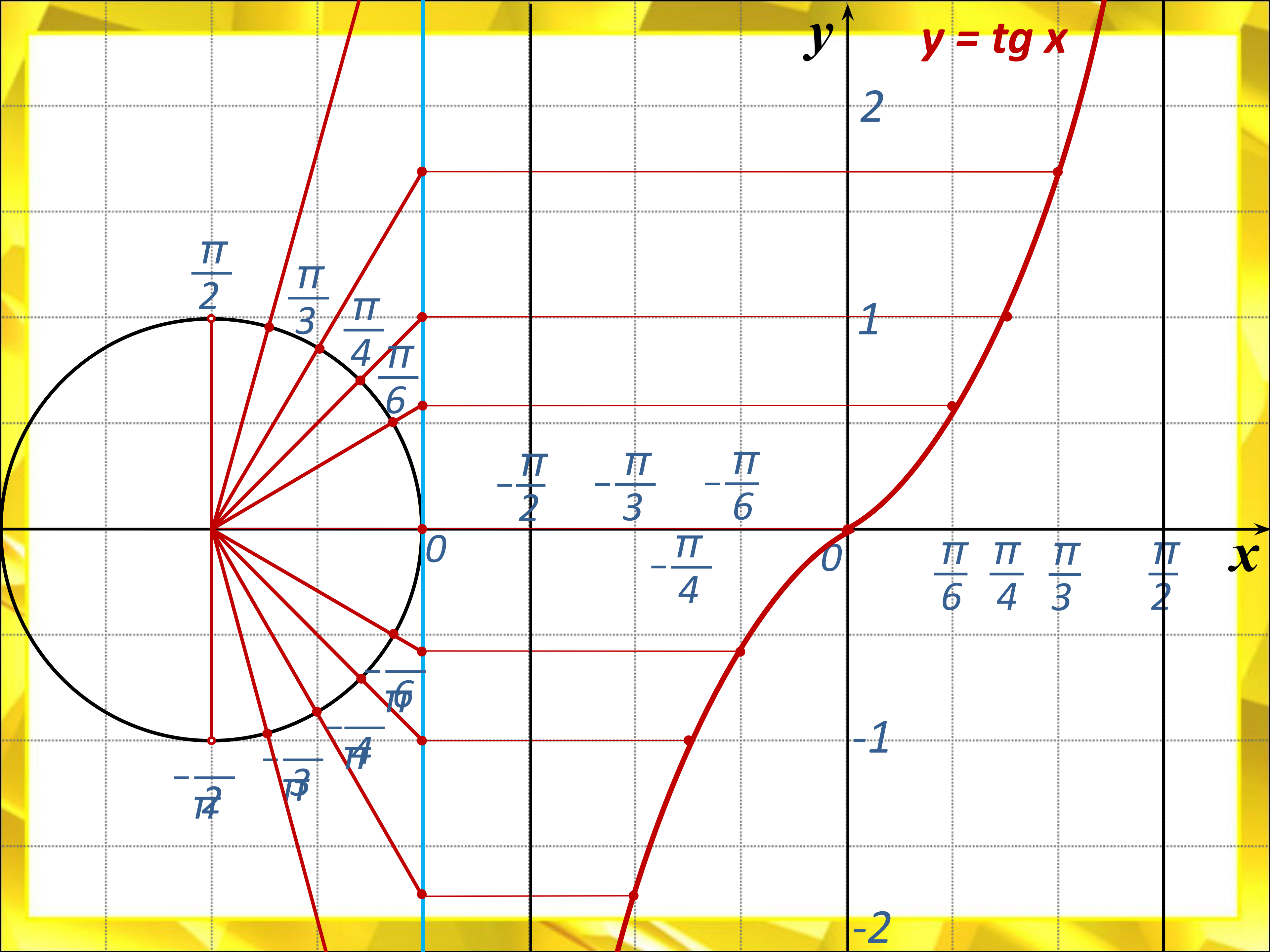
y
X
y = sin x
3
2
1
-1
-2
-3
0



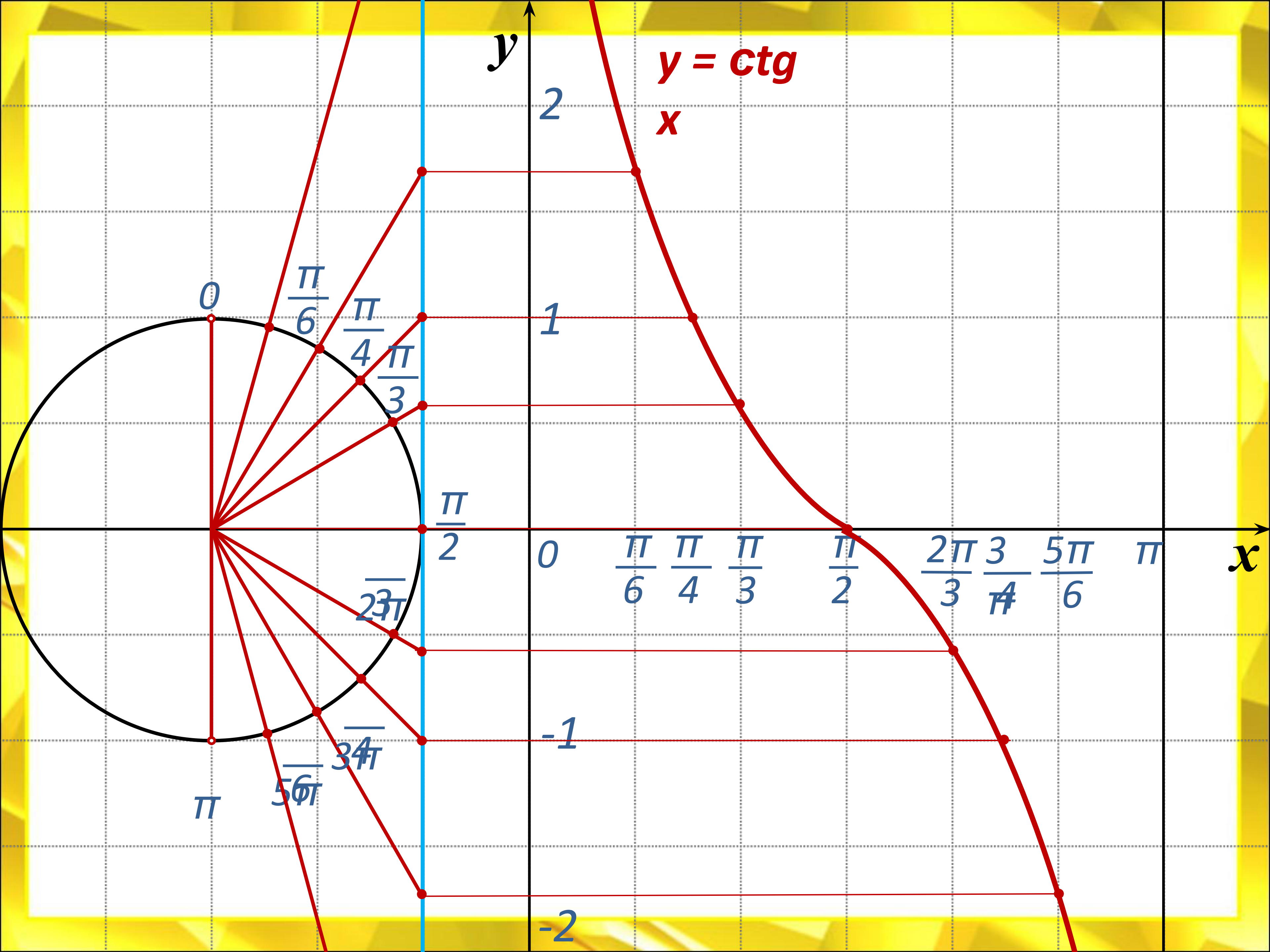
y
x
3
2
1
-1
-2
-3
y = cos x
0
π/6
π/3
π/2
π



y
x
y = cos x
y = sin x
3
2
1
-1
-2
-3
0
-3π/2
-7π/6
-π
-5π/6
-2π/3
-π/2
-π/3
-π/6
π/6
π/3
π/2
2π/3
5π/6
π
7π/6
3π/2



y = tg x
y
x
2
1
0
-1
-2
π/2
π/3
π/4
π/6
−π/2
−π/3
−π/6
−π/4
π/6
π/4
π/3
π/2

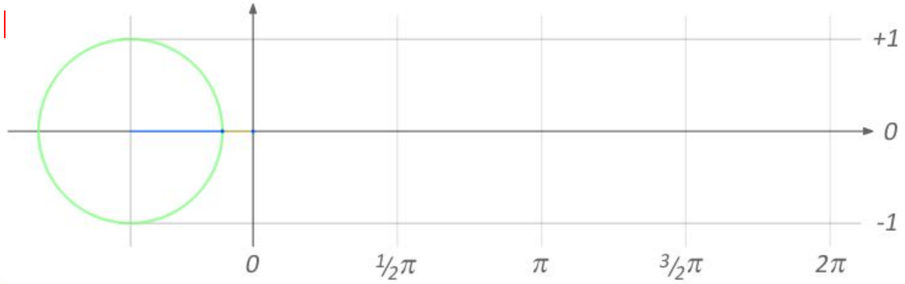


y = ctg x
y
x
2
1
0
-1
-2
π/6
π/4
π/3
π/2
2π/3
3π/4
5π/6
π

Функция $y = \sin x$

Свойства функции:

1. $D(y) = R$.
2. $E(y) = [-1 ; 1]$
3. Функция периодическая; Т = Т = 2Т = 2π
4. Функция нечетная
5. $\sin x = 0$ при $x = \pi n$, $n \in Z$.
6. Функция возрастает на $[-\pi/2 + 2\pi n; \pi/2 + 2\pi n]$, $n \in Z$,
   убывает на $[\pi/2 + 2\pi n; 3\pi/2 + 2\pi n]$, $n \in Z$.
7. $\sin x > 0$ при $2\pi n < x < \pi + 2\pi n$, $n \in Z$;
   $\sin x < 0$ при $\pi + 2\pi n < x < 2\pi + 2\pi n$, $n \in Z$.
8. Наибольшее значение функции $y = 1$;
   наименьшее значение функц



Функция $y = \cos x$

Свойства функции:

1. $D(y) = R$.
2. $E(y) = [-1 ; 1]$
3. Функция периодическая; $T = 2\pi$
4. Функция четная.
5. $\cos x = 0$ при $x = {}^{\pi}/_{2} + \pi n,\ n \in Z$, $n \in Z$.

6. 6. 6. Функция возрастает на $[\pi + 2\pi n;\ 2\pi + 2\pi n],\ n \in Z$,
   убывает на $[2\pi n;\ \pi + 2\pi n],\ n \in Z$.
7. $\cos x > 0$ при $-{}^{\pi}/_{2} + 2\pi n < x < {}^{\pi}/_{2} + 2\pi n,\ n \in Z$;
   $\cos x < 0$ при ${}^{\pi}/_{2} + 2\pi n < x < {}^{3\pi}/_{2} + 2\pi n,\ n \in Z$
8. Наибольшее значение функции $y = 1$;
   наименьшее значение функции $y = -1$.

Функция $y = tg\,x$

Свойства функции:

1. $D(y) = (-\pi/2 + \pi n;\ \pi/2 + \pi n)$; $n \in Z$.
2. $E(y) = R$.
3. Функция периодическая; периодическая; T = периодическая; T = π периодическая; T = π.
4. Функция нечетная.
5. $tg\,x = 0$ при $x = \pi n$, $n \in Z$.
6. Функция возрастает на $(-\pi/2 + \pi n;\ \pi/2 + \pi n)$, $n \in Z$
7. $tg\,x > 0$ при $\pi n < x < \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$;

   $tg\,x < 0$ при $-\pi/2 + \pi n < x < \pi n$, $n \in Z$.
8. Функция не достигает наибольшего и наименьшего значений.
9. Прямые $\pi/2 + \pi n$, $n \in Z$, являются ***асимптотами*** ***графика функции.***

Функция $y = ctg\ x$

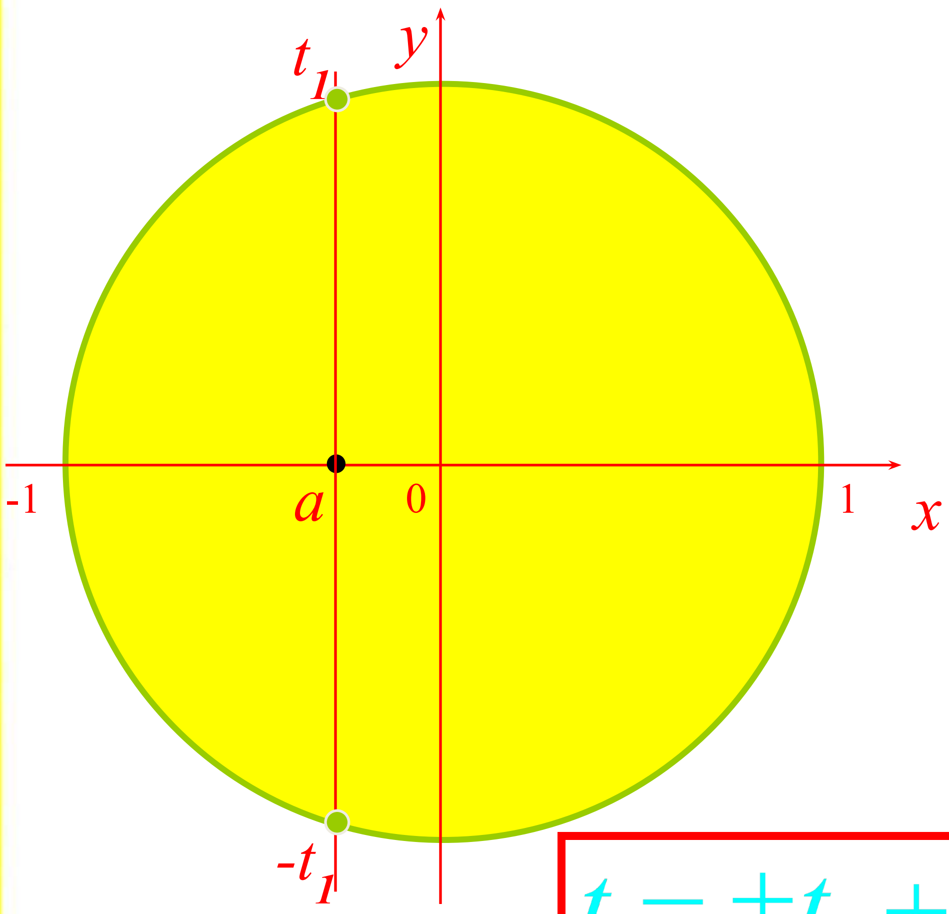
Свойства функции:

1. $D(y) = (\pi n;\ \pi + \pi n)$, $n \in Z$.
2. $E(y) = R$
3. Функция периодическая; $T = \pi$.
4. Функция нечетная.
5. $ctg\ x = 0$ при $x = {}^{\pi}/_{2} + \pi n$, $n \in Z$.
6. Функция убывает на $(\pi n;\ \pi + \pi n)$, $n \in Z$.
7. $ctg\ x > 0$ при $\pi n < x < {}^{\pi}/_{2} + \pi n$, $n \in Z$;
   $ctg\ x < 0$ при ${}^{\pi}/_{2} + \pi n < x < \pi + \pi n$, $n \in Z$.
8. Функция не достигает наибольшего и наименьшего значений.
9. Прямые πn, $n \in Z$, являются асимптотами графика функции






Уравнение *cost = a*



1. Проверить условие $| a | \leq 1$

2. Отметить точку *a* на оси абсцисс.

3. Построить перпендикуляр в этой точке.

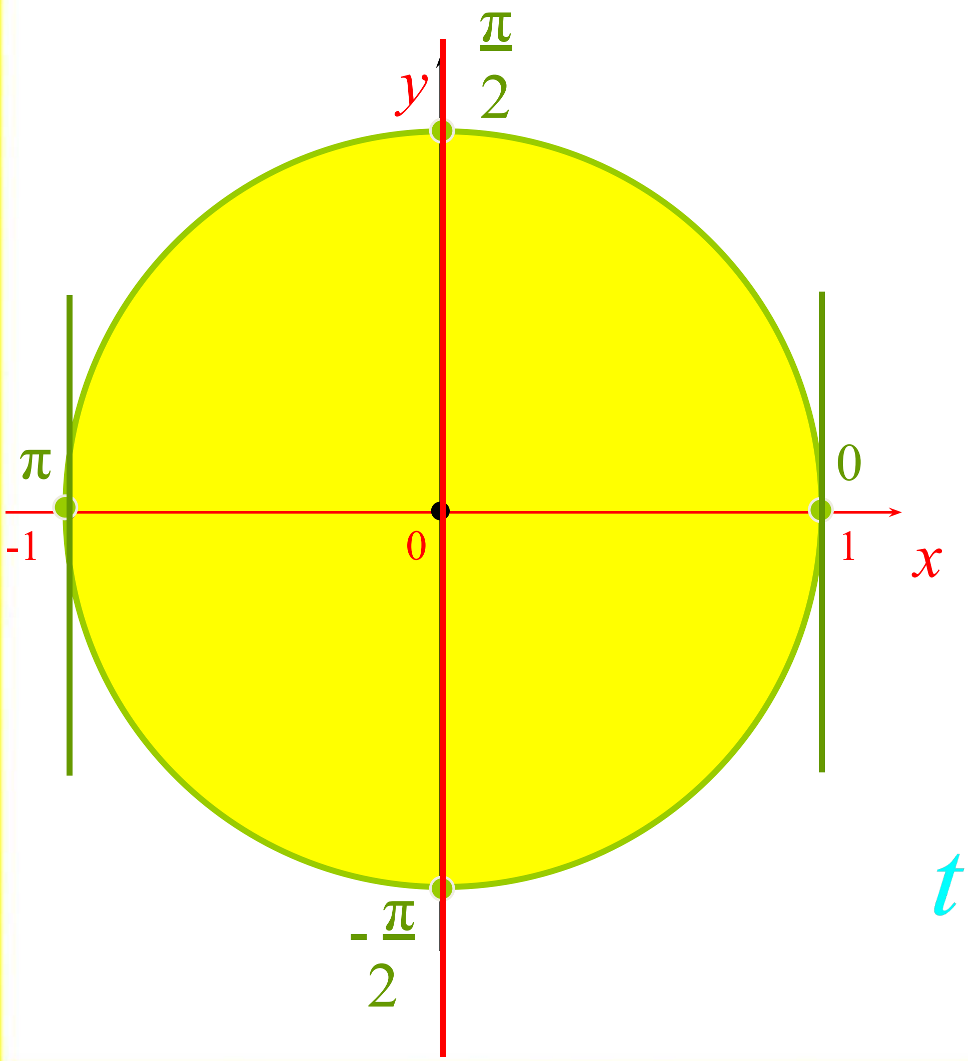
4. Отметить точки пересечения перпендикуляра с окружностью

5. Полученные точки – решение уравнения *cost = a.*

6. Записать общее решение уравнения

$$\boxed{t = \pm t_1 + 2\pi n, \quad n \in Z}$$

Частные случаи уравнения *cost = a*



$\cos t = 1$

$$t = 2\pi n, \quad n \in Z$$

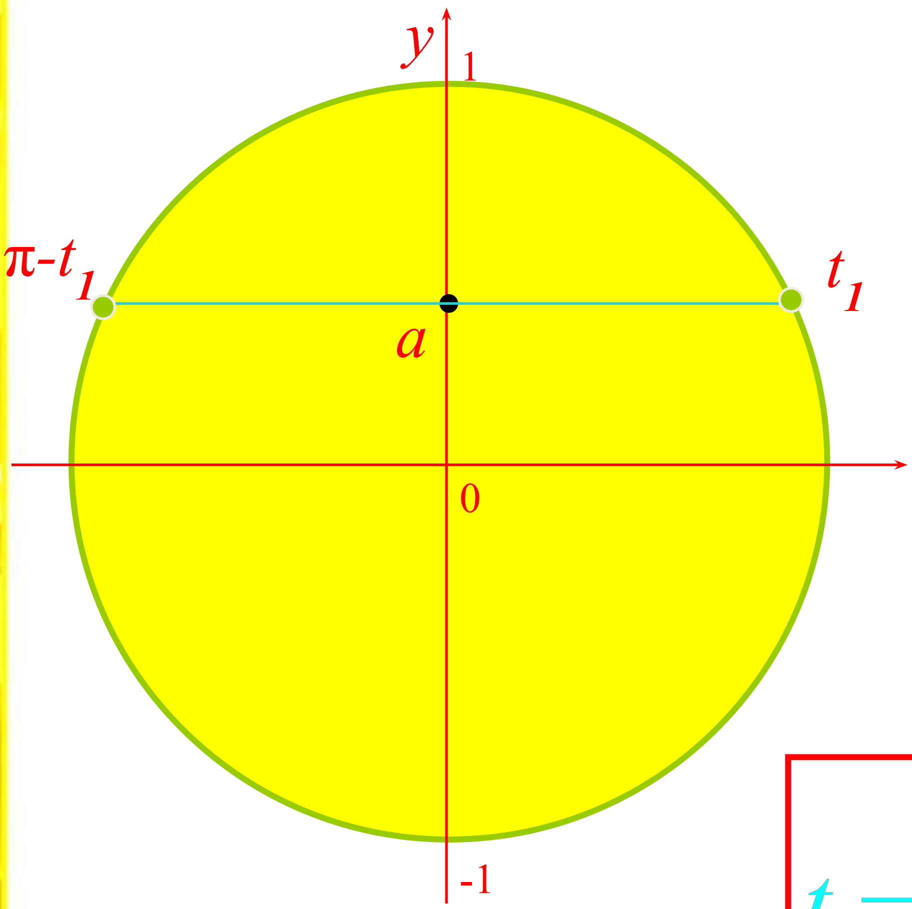
$\cos t = 0$

$$t = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$$

$\cos t = -1$

$$t = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z$$

Уравнение *sin t = a*



1. Проверить условие | *a* | ≤ 1

2. Отметить точку *a* на оси ординат.

3. Построить перпендикуляр в этой точке.

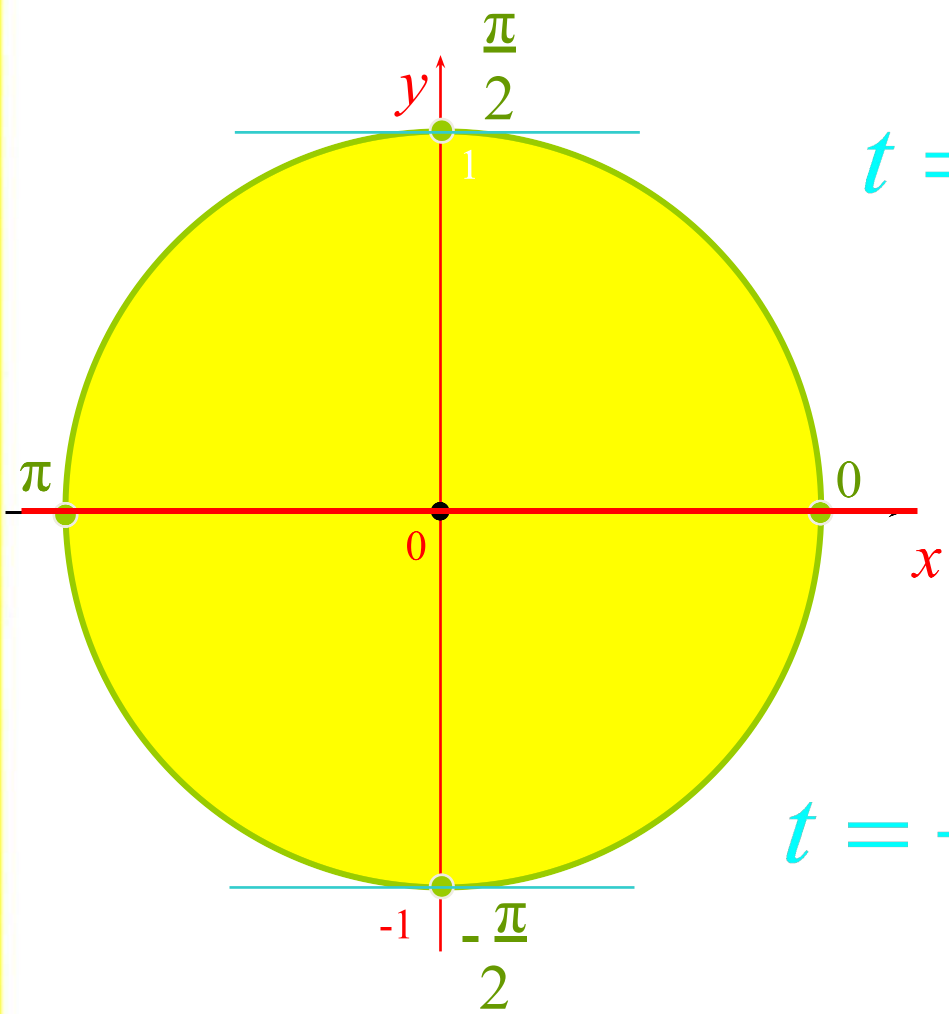
4. Отметить точки пересечения перпендикуляра с окружностью.

5. Полученные точки – решение уравнения *sint = a.*

6. Записать общее решение уравнения.

$$t = \left[\begin{array}{ll} t_1 + 2\pi n, & n \in Z \\ \pi - t_1 + 2\pi n, & n \in Z \end{array} \right.$$

Частные случаи уравнения *sint = a*



sint = 1

$$t=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in Z$$

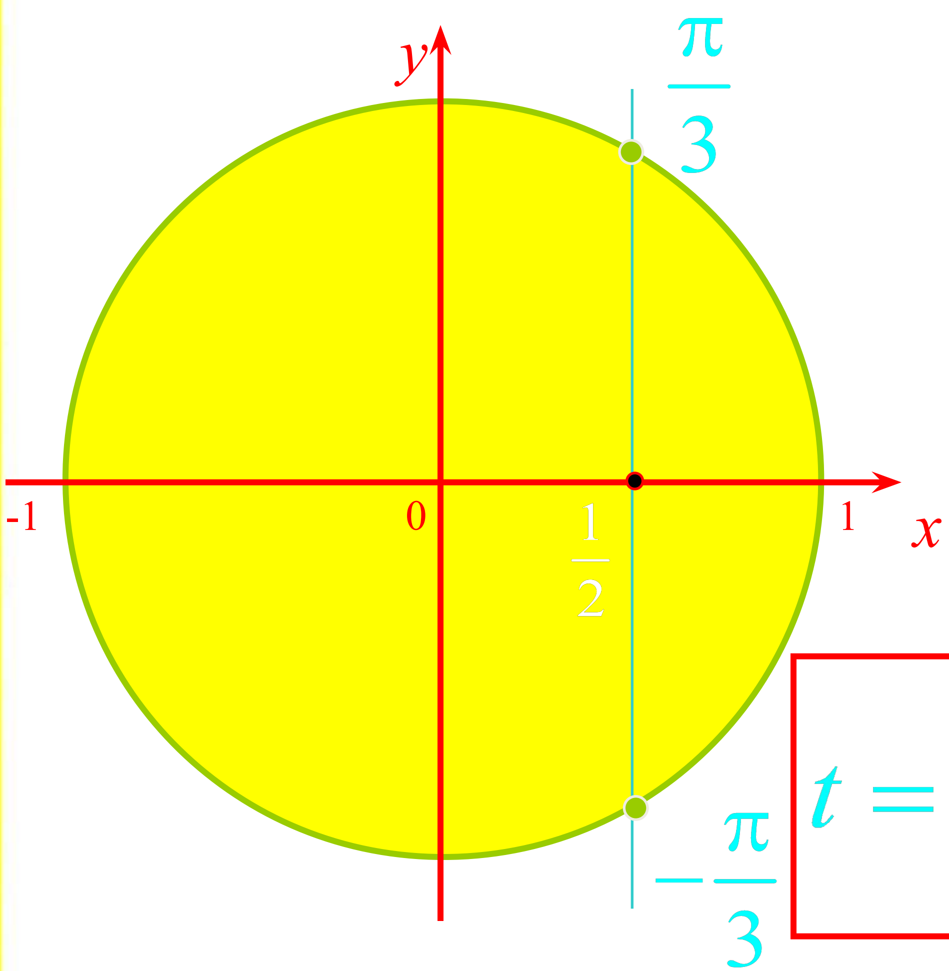
sint = 0

$$t=\pi n,\quad n\in Z$$

sint = -1

$$t=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in Z$$

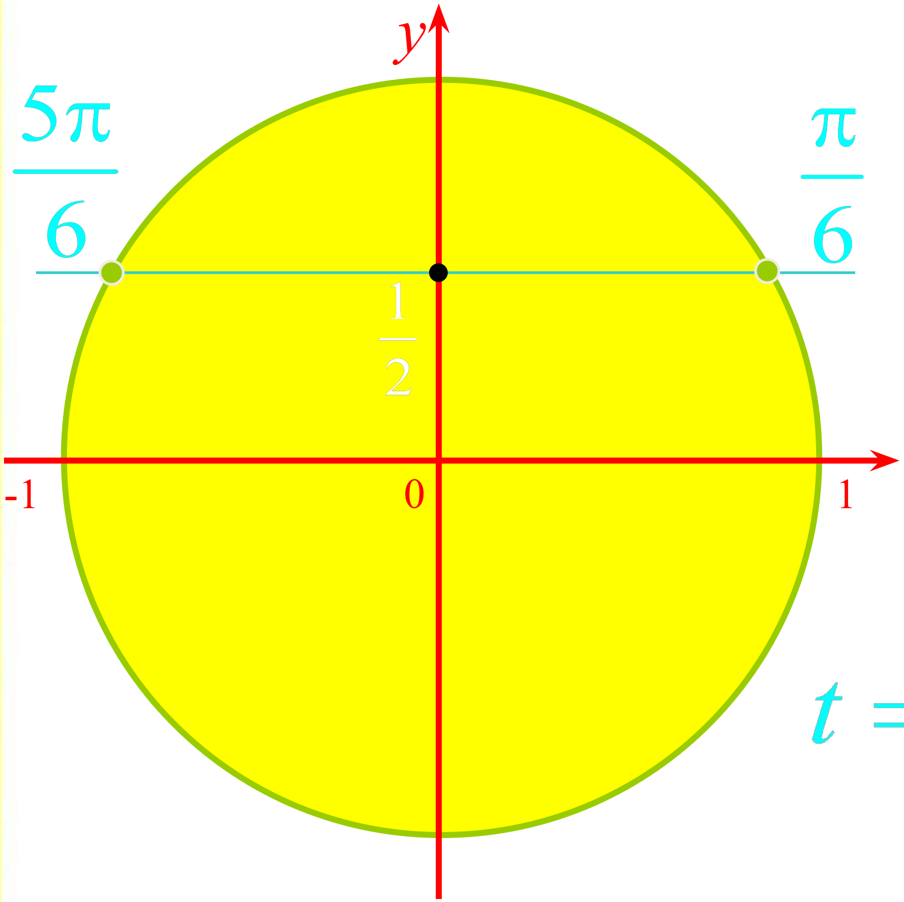
Примеры уравнений



$$\cos t = \frac{1}{2}$$

$$t = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z$$

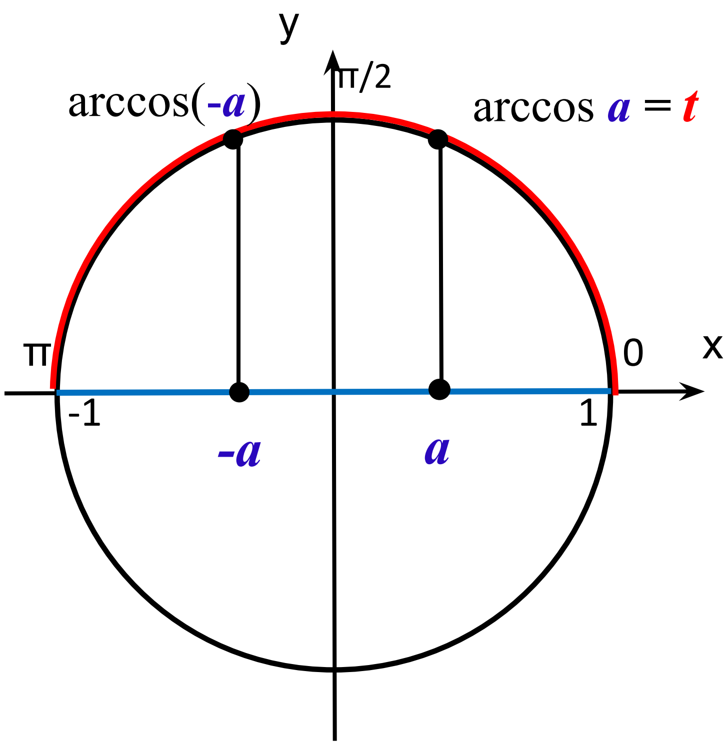
Примеры уравнений



$$\sin t = \frac{1}{2}$$

$$t = \left[\begin{array}{ll} \frac{\pi}{6} + 2\pi n, & n \in Z \\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, & n \in Z \end{array} \right.$$

Арккосинус



Арккосинусом числа ***a*** называется такое число (угол) ***t*** из [0;π], что **cos *t* = *a*.**

Причём, | ***a*** |≤ **1**.

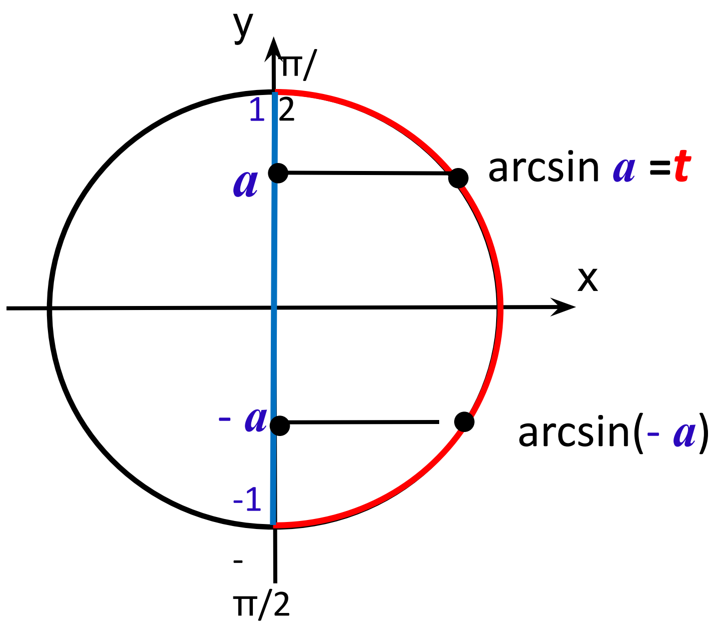
arccos(- ***a***) = π- arccos ***a***

Примеры:

1)arccos(-1) **= π**

2)arccos$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $= \frac{\pi}{6}$

Арксинус



Арксинусом числа ***a*** называется такое число (угол) **t** из **[-π/2;π/2]**, что ***sin t* = *a*.**
Причём, | ***a*** |≤ **1**.

arcsin(- *a*)= - arcsin *a*

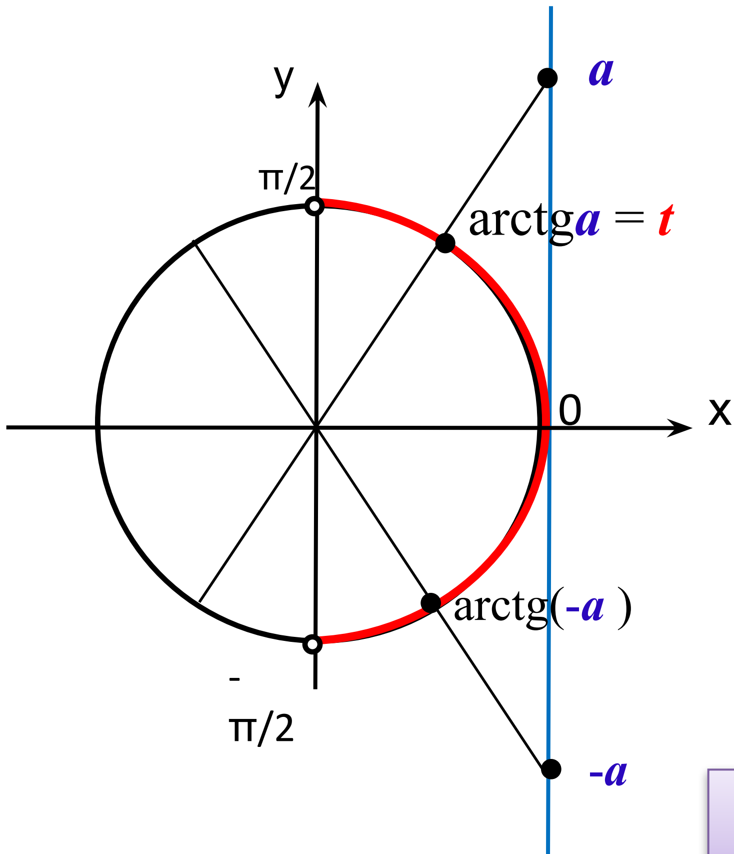
Примеры:

$1)\ arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

$3) arcsin 0 = 0$

$2) arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$

Арктангенс



Арктангенсом числа a называется такое число (угол) t из $(-\pi/2;\pi/2)$, что $tg\ t = a$.
Причём, a Є **R.**

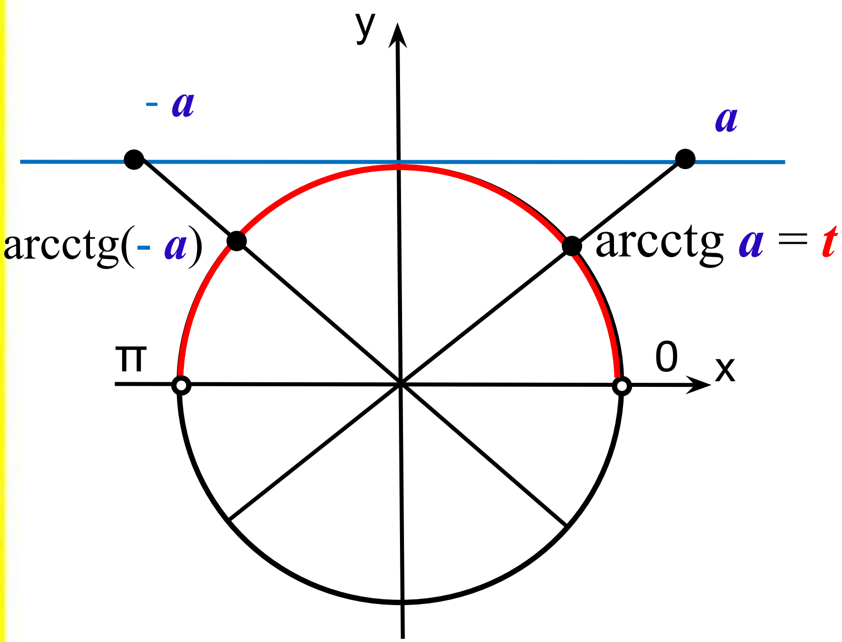
$\mathrm{arctg}(-a) = -\ \mathrm{arctg}\ a$

Примеры:

1) $\mathrm{arctg}\sqrt{3}/3 =$ $\pi/6$

2) $\mathrm{arctg}(-1) =$ $-\pi/4$

Арккотангенс



Арккотангенсом числа ***a*** называется такое число (угол) **t** из (0;π), что c***tg t* = *a*.**
Причём, ***a*** ЄR .

arcctg(- ***a***) = π – arcctg ***a***

Примеры:

1) arcctg(-1) = 3π/4

2) arcctg√3 = π/6

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений

$\cos t = a$, где $|a| \le 1$

$$\left[\begin{array}{l} t = \arccos a + 2\pi k, k \in Z \\ t = -\arccos a + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

или

$$t = \pm\arccos a + 2\pi k, k \in Z$$

Частные случаи

$\underline{\cos t = 0}$

$t = \pi/2 + \pi k,\ k \in Z$

$\underline{\cos t = 1}$

$t = 2\pi k,\ k \in Z$

$\underline{\cos t = -1}$

$t = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений

sin t = *a*, *где* | *a* |≤ 1

$$\left[\begin{array}{l} t = \arcsin a + 2\pi k, k \in Z \\ t = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

или

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z$$

Частные случаи

<u>sin t = 0</u>
t = πk, kЄZ

<u>sin t = 1</u>
t = π/2+2πk, kЄZ

<u>sin t = - 1</u>
t = - π/2+2πk, kЄZ

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений

tg t = *a*, *a* Є R

t = arctg ***a*** + πk, kЄZ

Ctg t = *a*, *a* Є R

t = arcctg ***a*** + πk, kЄZ

Пример ы:

1) $\cos t = -\frac{1}{2}$

$t = \pm \arccos(-1/2) + 2\pi k,\ k \in Z$

$t = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$

2) $\sin t = 0$

Частный случай:
$t = \pi k,\ k \in Z$

3) $\mathrm{tg}\, t = 1;$

$t = \mathrm{arctg}\, 1 + \pi k,\ k \in Z$

$t = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$

4) $\mathrm{ctg}\, t = -\sqrt{3}$

$t = \mathrm{arcctg}(-\sqrt{3}) + \pi k,\ k \in Z$

$t = \frac{5\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$

Виды тригонометрических уравнений

<u>Сводимые к квадратным</u>

Решаются методом введения новой переменной

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x + c = 0$$

Пусть $\sin x = p$, где $|p| \le 1$, тогда $a \cdot p^2 + b \cdot p + c = 0$

Найти корни, вернуться к замене и решить простые уравнения.

Пример. Решить уравнение: $2\cos^2(x + \pi/6) - 3\sin(\pi/3 - x) + 1 = 0$.

Решение. Используя формулы приведения, имеем:

$$2\cos^2(x + \pi/6) - 3\cos(x + \pi/6) + 1 = 0,$$

делаем замену: $\cos(x + \pi/6) = y$, тогда $2y^2 - 3y + 1 = 0$,

находим корни: $y_1 = 1$, $y_2 = 1/2$, откуда следуют два случая:

1). $\cos(x + \pi/6) = 1$, 2). $\cos(x + \pi/6) = 1/2$,

$x + \pi/6 = 2\pi k$, $x + \pi/6 = \pm\arccos(1/2) + 2\pi n$,

$x_1 = -\pi/6 + 2\pi k$; $x_2 = \pm\pi/3 - \pi/6 + 2\pi n$.

Виды тригонометрических уравнений

Однородные

Первой степени:

Решаются делением на cos x (или sin x) и методом введения новой переменной.

a ·sin x + b · cos x = 0

Т.к. Sin x и cos x одновременно не равны нулю, то разделим обе части уравнения на cos x (или на sin x). Получим: простое уравнение

a · tg x + b = 0 или tg x = m

Пример. Решите уравнение sinx + 2cosx = 0.

Решение: Разделим обе части уравнения на cosx.

Получим

$$\frac{\sin x}{\cos x}+2\frac{\cos x}{\cos x}=0$$

$$tgx+2=0$$

$$tgx=-2$$

$$x=-arctg2+\pi k,\ k\in Z$$

Ответ: $-arctg2+\pi k,\ k\in Z$

Виды тригонометрических уравнений

Однородные уравнения второй степени:

Решаются делением на $\cos^2 x$ (или $\sin^2 x$) и методом введения новой переменной.

$$\mathbf{a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0}$$

Разделим обе части на $\cos^2 x$. Получим квадратное уравнение:

$$a \cdot tg^2 x + b \cdot tg\, x + c = 0.$$

Решить уравнение: $3\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2.$

Решение. $3\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$,

$\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0$,

$tg^2 x + 4\, tg\, x + 3 = 0$, отсюда $y^2 + 4y + 3 = 0$,

корни этого уравнения: $y_1 = -1,\ y_2 = -3$, отсюда

1) $tg\, x = -1$, 2) $tg\, x = -3$,

Ответ: $\boxed{-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z;\ -arctg 3 + \pi n,\ n \in Z}$

Виды тригонометрических уравнений

Уравнение вида:

$A \sin x + B \cos x = C.$ $A, B, C \neq 0$

$1. \sin 2x = \sin x$

$2 \sin x \cos x - \sin x = 0$

$\sin x (2 \cos x - 1) = 0$

$\sin x = 0$ или $\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \pi k, k \in Z.$ $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k.$

$2. 3 \sin x = 2 \cos^2 x$

$2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$

$\sin x = t$

$2t^2 + 3t - 2 = 0$

$t = \frac{1}{2}$ $t = -2$

$\sin x = \frac{1}{2}$ $\sin x = -2$

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$ Нет решения.

$\sin x + \cos x = 1.$

Р е ш е н и е . Перенесём все члены уравнения влево:

$\sin x + \cos x - 1 = 0,$

$\sin x - 2 \sin^2 (x/2) = 0,$

$2 \sin (x/2) \cdot \cos (x/2) - 2 \sin^2 (x/2) = 0,$

$2 \sin (x/2) \cdot [\cos (x/2) - \sin (x/2)] = 0,$

1). $\sin (x/2) = 0,$ 2). $\cos (x/2) - \sin (x/2) = 0,$

$x/2 = \pi k,$ $\tan (x/2) = 1,$

$x_1 = 2\pi k;$ $x/2 = \arctan 1 + \pi n,$

$x/2 = \pi/4 + \pi n,$

$x_2 = \pi/2 + 2\pi n.$

Решение тригонометрических уравнений с помощью универсальной тригонометрической подстановки

Решаются с помощью введения вспомогательного аргумента.

A sin x + B cos x = C

$$\boxed{\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}}$$

$$3\sin x + 4\cos x = 5, x \in Z$$

$$3\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} + 4\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 5$$

$$\frac{6tg\frac{x}{2} + 4 - 4tg^2\frac{x}{2} - 5 - 5tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 0$$

$$\begin{cases} 9tg^2\frac{x}{2} - 6tg\frac{x}{2} + 1 = 0 \\ 1+tg^2\frac{x}{2} \neq 0 \end{cases}$$

$$\left(3tg\frac{x}{2} - 1\right)^2 = 0$$

$$\boxed{tgx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}}$$

$$tg\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x}{2} = arctg\frac{1}{3} + \pi n, n \in Z$$

$$x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

При переходе от уравнения (1) к уравнению (2), могла произойти потеря корней, значит необходимо проверить, являются ли корни уравнения корнями данного уравнения.

$$\boxed{\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}}$$

$$\cos\frac{x}{2} = 0$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$$

Проверка

Если $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$,

$$3\sin(\pi + 2\pi n) + 4\cos(\pi + 2\pi n) = 5, x \in Z$$

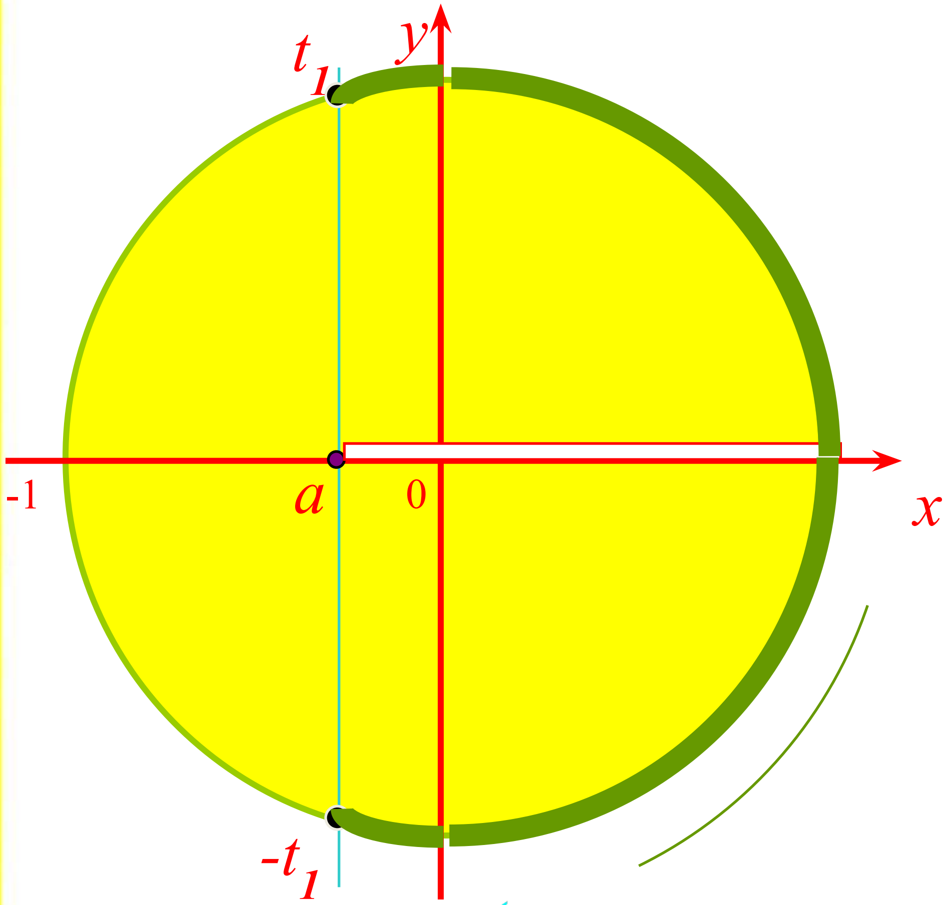
$0 + 4(-1) = 5$ не верно, значит $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$ не является корнями исходного уравнения

Ответ: $x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi n, n \in Z$

Правила

- Увидел квадрат – понижай степень!
- Увидел произведение – делай сумму!
- Увидел сумму – делай произведение!

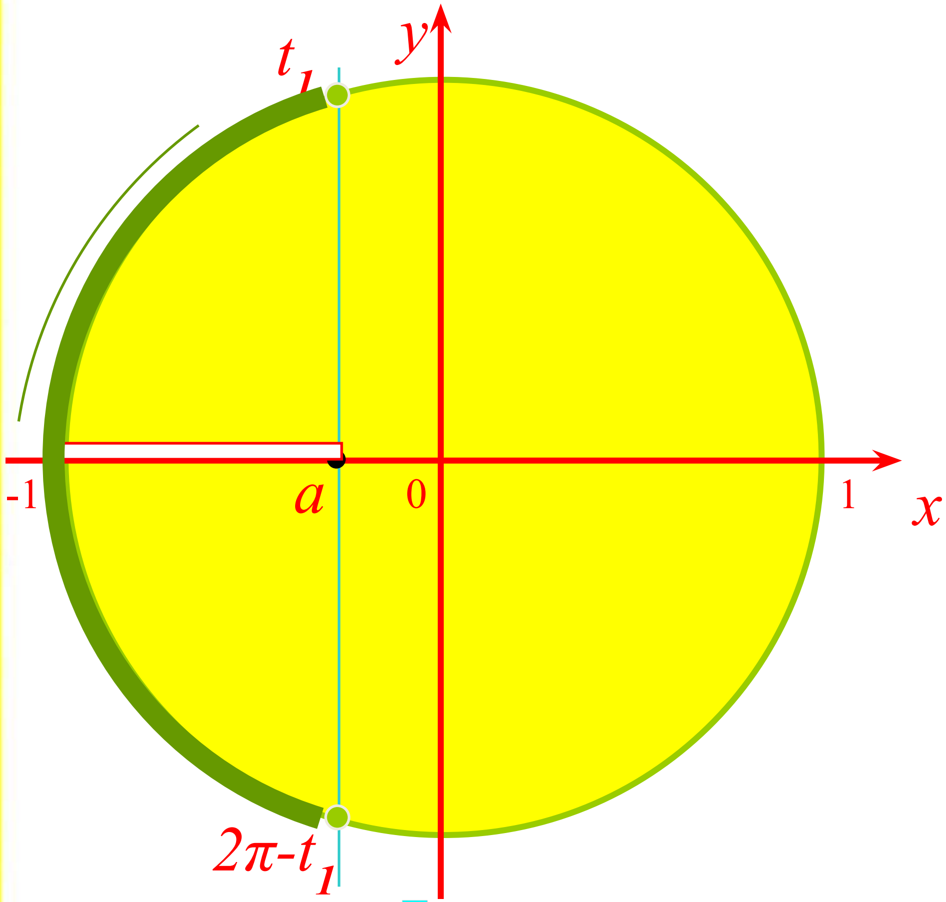
Неравенство *cost > a*



1. Отметить на оси абсцисс интервал $x > a$.
2. Выделить дугу окружности, соответствующую интервалу.
3. Записать числовые значения граничных точек дуги.
4. Записать общее решение неравенства.

$$t \in \left(-t_1 + 2\pi n; t_1 + 2\pi n\right), \quad n \in Z$$

Неравенство *cost ≤ a*



1. Отметить на оси абсцисс интервал $x \le a$.

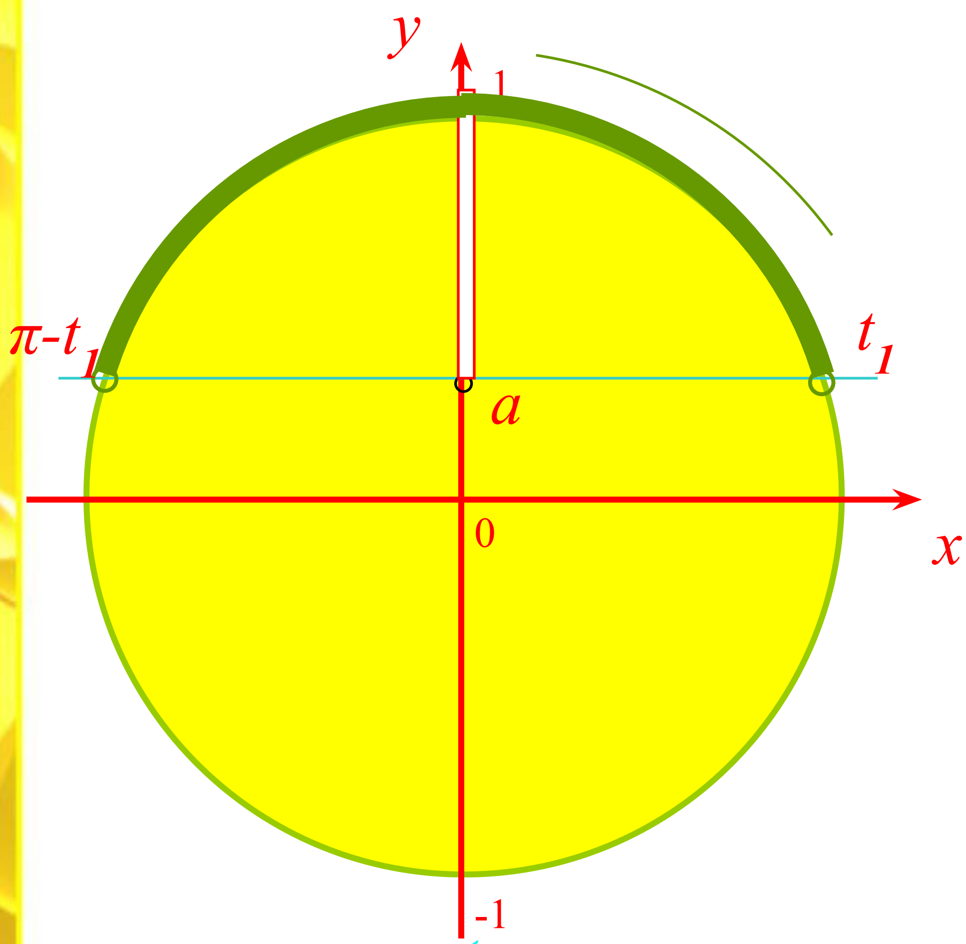
2. Выделить дугу окружности, соответствующую интервалу.

3. Записать числовые значения граничных точек дуги.

4. Записать общее решение неравенства.

$$t \in [t_1 + 2\pi n; 2\pi - t_1 + 2\pi n], \quad n \in Z$$

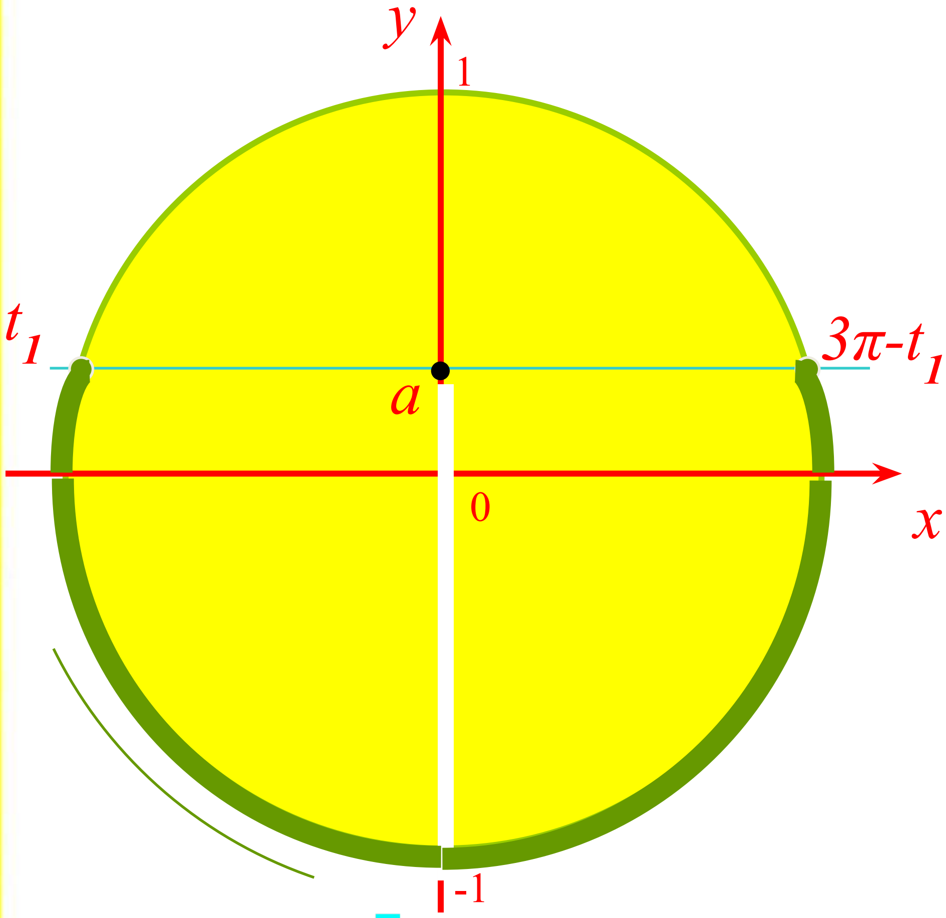
Неравенство *sint > a*



1. Отметить на оси ординат интервал $y > a$.
2. Выделить дугу окружности, соответствующую интервалу.
3. Записать числовые значения граничных точек дуги.
4. Записать общее решение неравенства.

$$t \in \left(t_1 + 2\pi n; \pi - t_1 + 2\pi n\right), \quad n \in Z$$

Неравенство $\sin t \le a$



1. Отметить на оси ординат интервал $y \le a$.

2. Выделить дугу окружности, соответствующую интервалу.

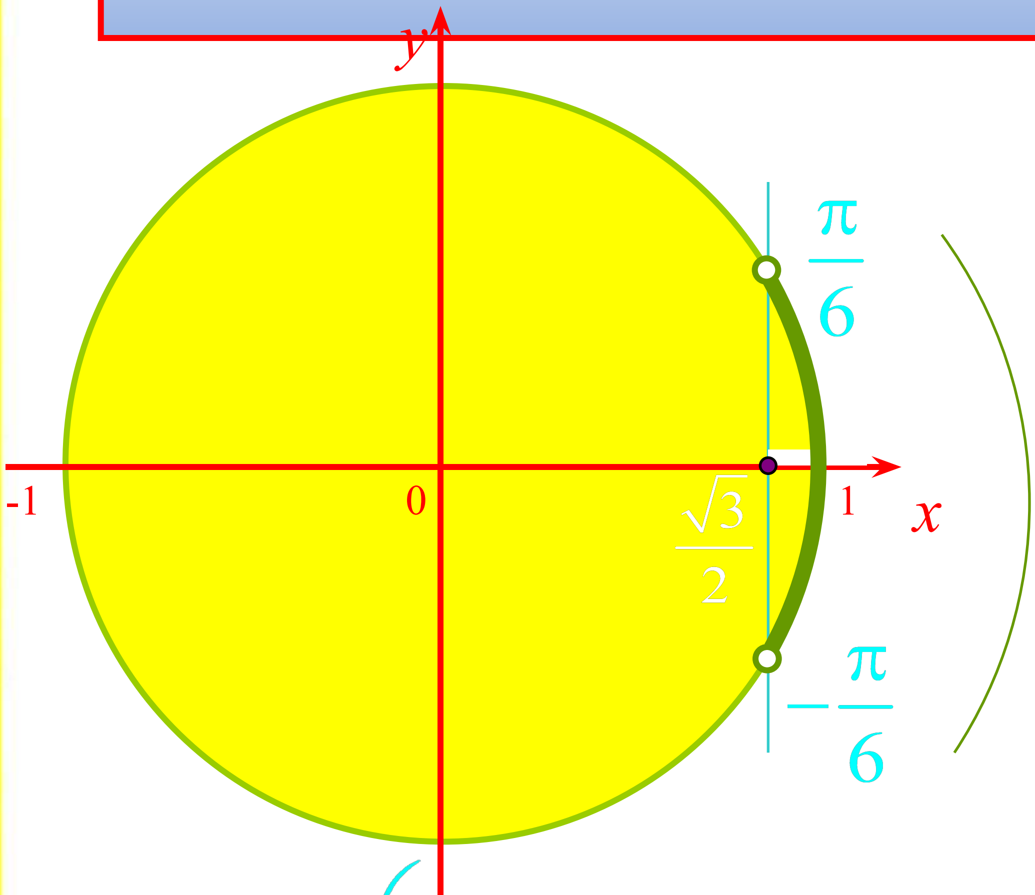
3. Записать числовые значения граничных точек дуги.

4. Записать общее решение неравенства.

$$t \in [t_1 + 2\pi n; 3\pi - t_1 + 2\pi n], \quad n \in Z$$

Примеры неравенств

$$\cos t > \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$t \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right), \quad n \in Z$$

1 Вариант часть1

Найдите корень уравнения $\cos t = -\frac{1}{2}$

на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

А) $-\frac{\pi}{3}$; Б) $\frac{\pi}{3}$; В) $-\frac{\pi}{6}$; Г) корней нет

Чему равен $\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2})$?

А) $-\frac{\pi}{6}$; Б) $\frac{7\pi}{6}$; В) $\frac{5\pi}{6}$; Г) $-\frac{\pi}{3}$.

Решите уравнение $\sin^2 x - 3\sin x = 0$.

А) $(-1)^{к} \arcsin 3 + \pi к, к \in Z, \pi n, n \in Z$; Б) $\pi n, n \in Z$;

В) $(-1)^{к} \arcsin 3 + \pi к, к \in Z$; Г) корней нет

2 Вариант часть1

Найдите корень уравнения $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$

на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

А) $\frac{\pi}{3}$; Б) $\frac{2\pi}{3}$; В) $-\frac{2\pi}{3}$; Г) корней нет

Чему равен $\arcsin(-\frac{1}{2})$?

А) $-\frac{\pi}{6}$; Б) $\frac{7\pi}{6}$; В) $\frac{5\pi}{6}$; Г) $-\frac{\pi}{3}$.

Решите уравнение $2\cos x - \cos^2 x = 0$.

А) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \pm \arccos 2 + 2\pi к, к \in Z$;

Б) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;

В) $\pm \arccos 2 + 2\pi к, к \in Z$; Г) корней нет

1 Вариант часть2

Определите число корней уравнения $\sin x = 0{,}1x$.

А) 3; Б) 5; В) 10; Г) 7.

2 Вариант часть2

Определите число корней уравнения $\cos x = 0{,}2x$.

А) 3; Б) 4; В) 2; Г) 5.

Ответы теста

1 Вариант:
Г, В, Б, Г.

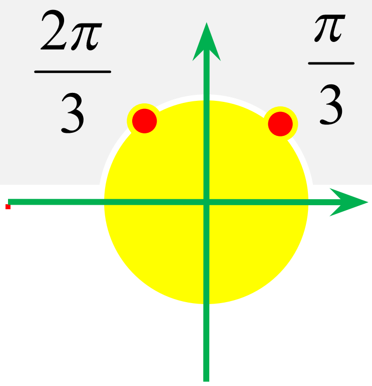
2 Вариант:
Б, А, Б, А.

Учимся решать!

Тригонометрия на ЕГЭ

Решите уравнение $\sin\frac{\pi(8x-7)}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

В ответе напишите наибольший отрицательный корень.



Решение

$$\frac{\pi(8x-7)}{3}=\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z;$$

$$\frac{8x-7}{3}=\frac{1}{3}+2n,\ n\in Z;$$

$$8x-7=1+6n,\ n\in Z;$$

$$x=1+\frac{3}{4}n,\ n\in Z;$$

$$n=-2,\ x=-0{,}5;$$

$$\frac{\pi(8x-7)}{3}=\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z;\quad \Big|:\pi$$

$$\frac{8x-7}{3}=\frac{2}{3}+2n,\ n\in Z;\ \Big|\times 3$$

$$8x-7=2+6n,\ n\in Z;$$

$$x=\frac{9}{8}+\frac{6}{8}n,\ n\in Z;$$

$$n=-2,\quad x=-\frac{3}{8}=-0{,}375.$$

Ответ: $-0{,}375.$

Найдите значение выражения $\sqrt{12}\cos^2\frac{5\pi}{12}-\sqrt{3}$.

Решение.

$$\sqrt{12}\cos^2\frac{5\pi}{12}-\sqrt{3}=\sqrt{3}\left(\sqrt{4}\cos^2\frac{5\pi}{12}-1\right)=\sqrt{3}\left(2\cos^2\frac{5\pi}{12}-1\right)=$$

$$=\sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6}=\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1{,}5.$$

Ответ: $-1{,}5$.

Найдите $\dfrac{10\cos\alpha+4\sin\alpha+15}{2\sin\alpha+5\cos\alpha+3}$, *если* $tg\alpha=-2{,}5.$

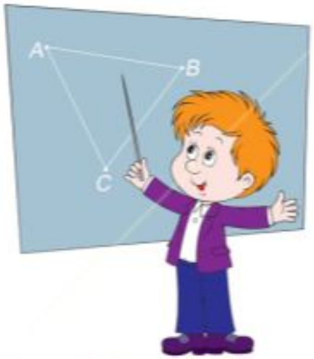
Решение.

Если $tg\alpha=-2{,}5,$ *то* $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2{,}5,$ *значит,* $\sin\alpha=-2{,}5\cos\alpha.$

Получим: $\dfrac{10\cos\alpha+4(-2{,}5\cos\alpha)+15}{2(-2{,}5\cos\alpha)+5\cos\alpha+3}=\dfrac{10\cos\alpha-10\cos\alpha+15}{-5\cos\alpha+5\cos\alpha+3}=$

$=\dfrac{15}{3}=5.$

Ответ: 5.



Груз массой 0,08 кг колеблется на пружине со скоростью, меняющейся по закону $v(t) = 0{,}5\sin\pi t$, где t — время в секундах. Кинетическая энергия груза, измеряемая в джоулях, вычисляется по формуле

$$E = \frac{mv^2}{2}$$

где m — масса груза (в кг), v — скорость груза (в м/с). Определите, какую долю времени из первой секунды после начала движения кинетическая энергия груза будет не менее $5\cdot 10^{-3}$ Дж. Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

Решение. $5\cdot 10^{-3}$

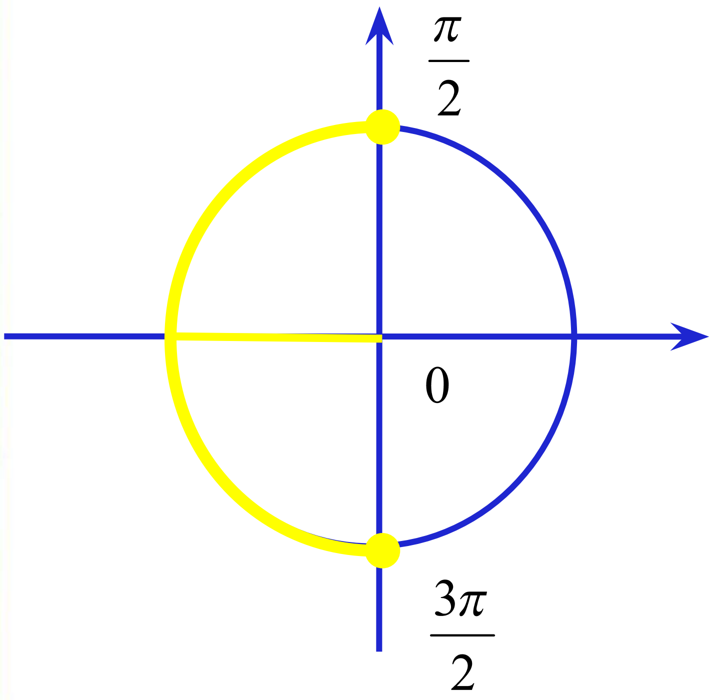
$$E \geq 5\cdot 10^{-3}; \qquad \frac{mv^2}{2} \geq 5\cdot 10^{-3}; \qquad \frac{m(0{,}5\sin\pi t)^2}{2} \geq 5\cdot 10^{-3}.$$

Поличим неравенство: $\dfrac{0{,}08(0{,}5\sin\pi t)^2}{2} \geq 5\cdot 10^{-3}.$

$$\frac{0{,}08(0{,}5\sin\pi t)^2}{2} \ge 5\cdot 10^{-3};\ \big|\times 2 \qquad 0{,}08\cdot 0{,}25\sin^2\pi t \ge 10^{-2};\ \big|\times 100$$

$$8\cdot 0{,}25\sin^2\pi t \ge 1; \qquad 2\sin^2\pi t \ge 1; \qquad 2\sin^2\pi t - 1 \ge 0;$$

$$-\cos 2\pi t \ge 0; \qquad \cos 2\pi t \le 0.$$



Так как необходимо найти долю времени из первой секунды после начала движения, то имеем:

$$\frac{\pi}{2} \le 2\pi t \le \frac{3\pi}{2};\ \big|:2\pi; \qquad \frac{1}{4} \le t \le \frac{3}{4}.$$

Значит, $\Delta t = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5\,\text{сек}.$

Получим: $\frac{0{,}5}{1} = 0{,}5.$

Ответ: $0{,}5.$

Решить уравнение:

Задание С1

$$\frac{\cos 2x + \cos x + 2\sin^2 x - 1{,}5}{\sqrt{-2\sin x}} = 0.$$

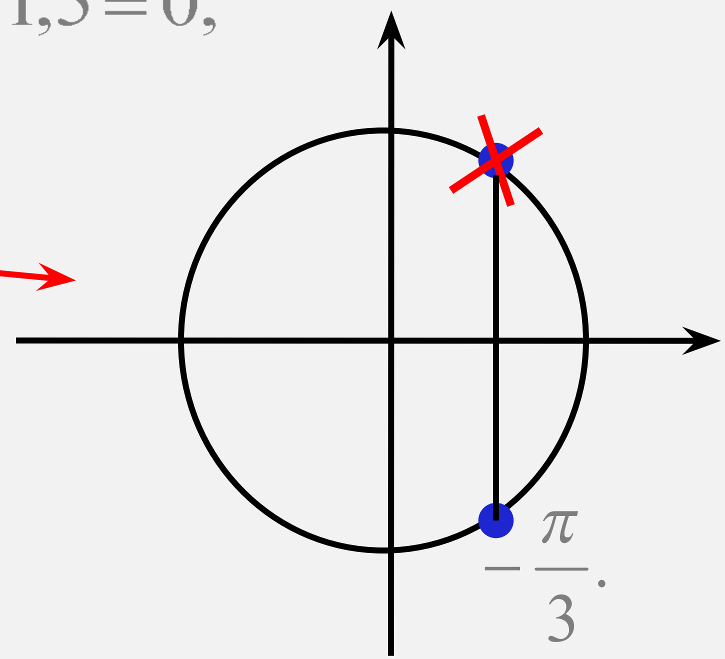
Решение:

$-2\sin x > 0$, *значит*, $\sin x < 0$. *Получим*:

$1 - 2\sin^2 x + \cos x + 2\sin^2 x - 1{,}5 = 0,$

$\cos x - 0{,}5 = 0,$

$\cos x = 0{,}5.$



Так как $\sin x < 0$, *то*

$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Решите уравнение: $\sqrt{3}\cdot\sin x - tgx + tgx\cdot\sin x = \sqrt{3}.$

Укажите корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{7\pi}{4}\right].$

Решение:

1) $\cos x \neq 0.$

2) $\sin x(\sqrt{3}+tgx)-(\sqrt{3}+tgx)=0;\ (\sqrt{3}+tgx)(\sin x-1)=0;$

$tgx=-\sqrt{3}$ *или* $\sin x = 1,$ *так как* $\cos x\neq 0,$ *то решений нет*

$x=-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z.$

3) *Отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку* $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{7\pi}{4}\right]:$

$-\frac{\pi}{2}\le -\frac{\pi}{3}+\pi n\le\frac{7\pi}{4}\ \Big|\times\frac{12}{\pi};\quad -6\le -4+12n\le 21;\quad -\frac{2}{12}\le n\le\frac{25}{12}.$

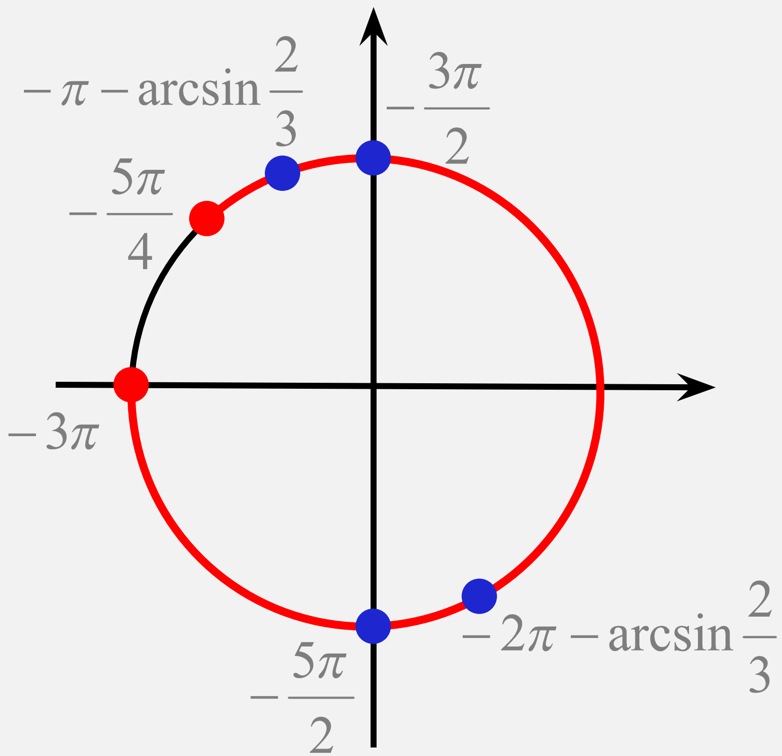
Так как $n\in Z,$ *то* $n=0,\ x=-\frac{\pi}{3};\quad n=1,\ x=\frac{2\pi}{3};\quad n=2,\ x=\frac{5\pi}{3}.$

Ответ: $-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z;\ -\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}.$

Найдём корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; -\frac{5\pi}{4}\right]$,

с помощью тригонометрического круга.

$$x = -\arcsin\frac{2}{3} + \pi n, \ n \in Z \qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z$$

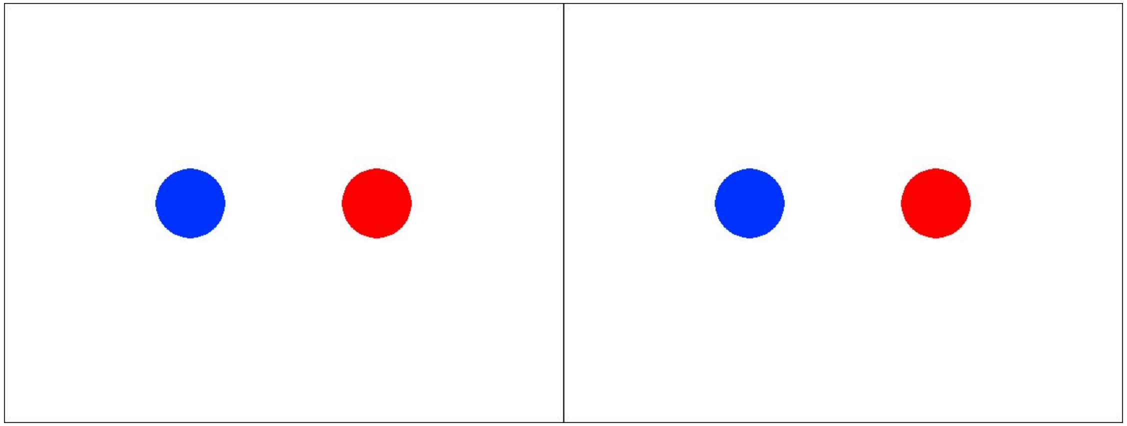


Ответ: $-\arcsin\frac{2}{3} + \pi n, \ n \in Z;$

$\frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z;$

$-\frac{5\pi}{2}, \ -2\pi - \arcsin\frac{2}{3},$

$-\frac{3\pi}{2}, \ -\pi - \arcsin\frac{2}{3}.$



М о л о д ц ы ! ! !