

Тема:

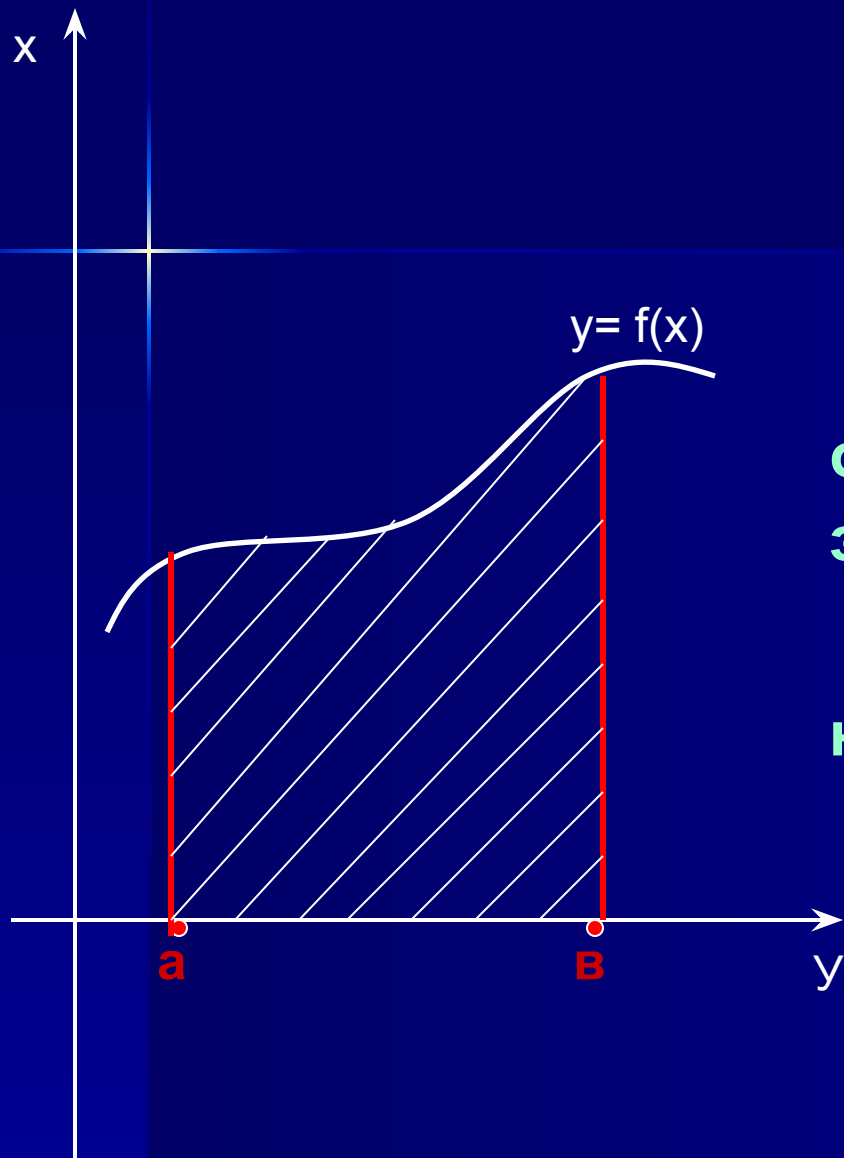
Интегра

л

Учебник: Колмогоров А. Н. и др.
« Алгебра и начала анализа для 10-11 классов »

Выполнила:

Рябкова Ю.И



Пусть на $[a; b]$

Задана $f(x)$ – непрерывная,
не имеющая на нем знака

Фигуру, ограниченную графиком
этой функции, отрезком $[a; b]$
и прямыми $x=a, x=b$
называют **криволинейной**
трапецией

Теорема:

Если f – непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a;b]$ функция, а F – ее первообразная на этом отрезке, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции равна приращению первообразной на отрезке $[a;b]$, т.е.

$$S = F(b) - F(a)$$

Доказательство:

Рассмотрим $S(x)$ определенную на $[a;b]$

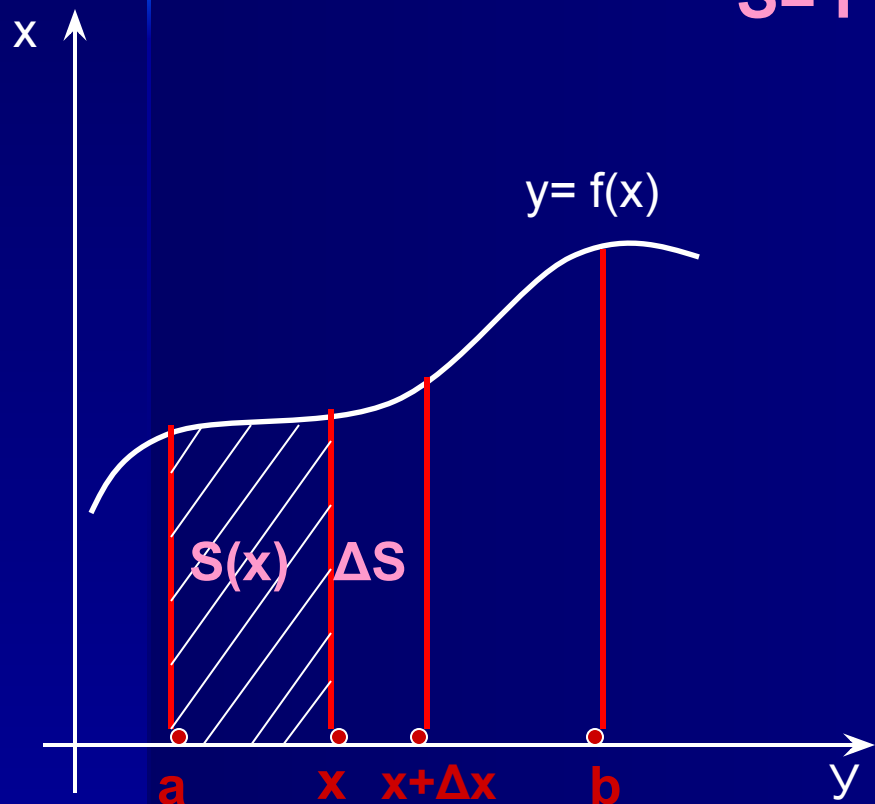
$$S(a) = 0, \quad S_{\text{тр}} = S(b)$$

$$\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x) \approx f(x) \cdot \Delta x$$

При $\Delta x \rightarrow 0$, тогда

$$\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \rightarrow f(x), \quad \text{т.е. } S'(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow \Delta S(x) = F(x) + c$$



Теорема:

Если f – непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a;b]$ функция, а F – ее первообразная на этом отрезке, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции равна приращению первообразной на отрезке $[a;b]$, т.е.

$$S = F(b) - F(a)$$

Доказательство

$$\Delta S(x) = F(x) + c$$

Найдем $c = ?$

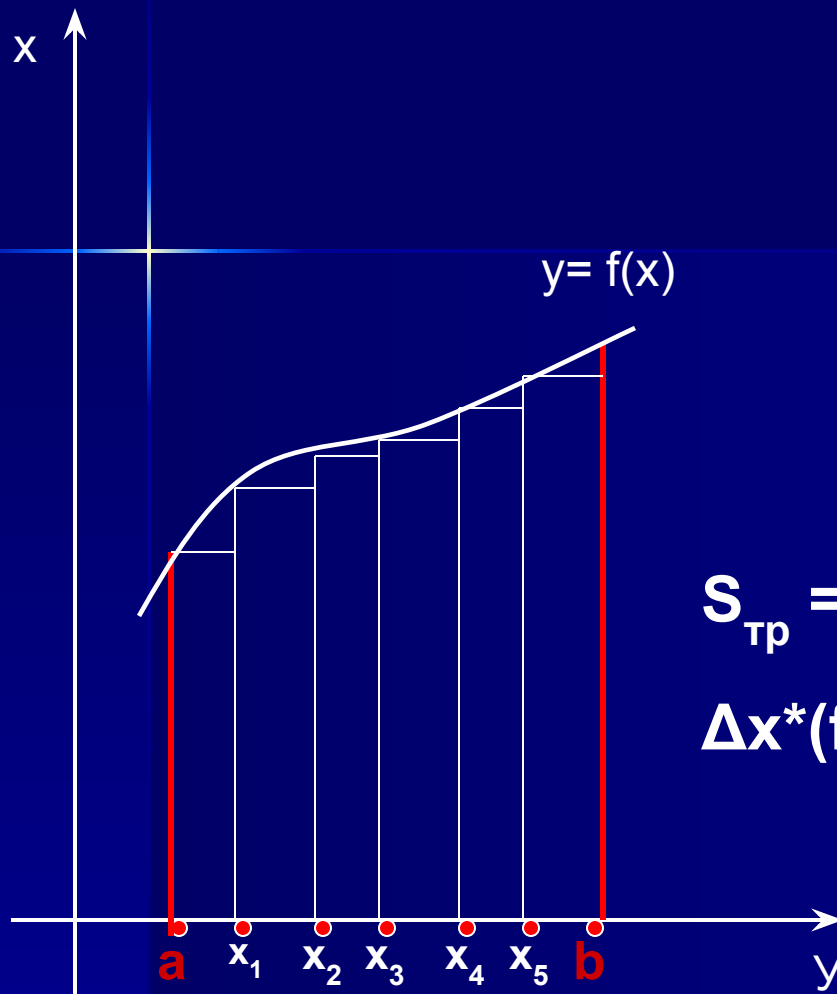
$$\Delta S(a) = F(a) + c \Rightarrow c = -F(a)$$

$$\Delta S(x) = F(x) - F(a)$$

$$S_{\text{тр}} = S(b) = F(b) - F(a)$$

Вывод: Чтобы найти $S_{\text{тр}}$ надо взять первообразную и найти её приращение, полученное число и даст $S_{\text{тр}}$

Рассмотрим второй способ нахождения площади криволинейной трапеции



Пусть на $[a; b]$

Задана $f(x)$ – непрерывная, не имеющая на нем знака

Разобьём $[a; b]$ на n частей, одинаковой длины

$$S_{тр} = f(a) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + \dots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x = \Delta x \cdot (f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) = S_n$$

$$S_n \rightarrow S_{тр}$$

Предел S_n при $n \rightarrow \infty$ называется интегралом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$$

Получили:

$$\text{Стр} = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

a, b – пределы интегрирования (a - верхний предел, b - нижний предел)

\int – знак интеграла

x – переменная интегрирования

Если F – первообразная для f на $[a; b]$, то

Формула Ньютона - Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

