

Задачи на работу. Математические модели

В задачах выполненную работу мы обозначили, как **1 часть**.

Другие случаи. Дроби, проценты...

- Выполнено 80% работы – это **0,8 части**.
- Перевыполнили работу на 25%. Это, значит, выполнили 125% работы – это **1,25 части**.
- Выполнили в 2 раза больший объем работы – это **2 части**.
- Осталось выполнить еще 5% работы. Это, значит, выполнено 95% работы, т.е. **0,95 части**.
- Выполнено $\frac{5}{9}$ работы – это $\frac{5}{9}$ части.
- Осталось выполнить $\frac{1}{18}$ работы. Значит, выполнено $1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$

Итак, в этом случае выполнено $\frac{17}{18}$ части всей работы.

Работа может измеряться и в других единицах измерения.

- в задаче о наполнении объемов работа будет измеряться в **м³**;
- в задаче о погрузке работа может быть **в ящиках, мешках**;
- задачи о рабочих, изготавливающих детали, работа **в дет.**;
- для каменщика – **в кирпичах**, для швеи – **в платьях** и т.д.

1. Бригада лесорубов должна была по плану изготовить за несколько дней 216 м^3 древесины. **Первые три дня** бригада выполняла ежедневно установленную планом норму, а затем каждый день заготавливала на 8 м^3 сверх плана. Поэтому за день до срока было заготовлено 232 м^3 древесины. Сколько м^3 древесины должна была бригада заготавливать по плану?

Это условие поможет ввести x ...

Первый столбик – скорость работы.
Введем x – скорость по плану.

В другой столбик внесем выполненную работу в м^3

| | $v, \text{ м}^3/\text{дн.}$ | $A, \text{ м}^3$ | $t, \text{ д.}$ |
|--|-------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|
| По плану | x <small>справка</small> | 216 <small>справка</small> | $\frac{216}{x}$ |
| Первые 3 дня | x | <small>справка</small> | 3 <small>справка</small> |
| С увеличенной производительностью | $x+8$ | $232-3x$ | $\frac{232-3x}{x+8}$ |

Выразим время работы, для этого работу : скорость

Внесем значения во 2-ю строчку: первые 3 дня

на 1 день

Чтобы найти работу скорость умножим на время

$$\frac{232-3x}{x+8} + 3 < \frac{216}{x} \quad \text{на 1 день}$$

$$A = vt$$

Реши уравнение самостоятельно

Это условие поможет ввести x ...

2. Один рабочий в день изготавливает на 5 деталей больше, чем второй. Если первый будет каждый день изготавливать на одну деталь, а второй на 9 деталей больше, чем они изготавливают, то за 6 дней первый изготовит столько деталей, сколько обрабатывает второй за a полных дней. Сколько деталей изготавливает каждый рабочий в день?

| | v , дет./день | v , дет./день | t , ч | A , <small>справка</small> дет. |
|---|-----------------|-----------------|---------|-----------------------------------|
| 1 | $x+5+1=x+6$ | $x+6$ | 6 | () |
| 2 | $x+9$ | $x+9$ | a | () |

$$6(x+6) = a(x+9)$$

$$6x+36 = ax+9a$$

$$6x - ax = 9a - 36$$

$$(6-a)x = 9a - 36$$

Чтобы найти работу $A = vt$ скорость умножим на время ❌

Решим уравнение относительно x (выразим x) ❌

$$x = \frac{9a - 36}{6 - a}$$

a – полное число дней

При $a = 1, 2, 3$ дробь отрицательна, x – не уд. усл. задачи

При $a = 4$ дробь равна 0, x – не уд. усл. задачи

При $a = 5$, $x = 9$ ✓

При $a = 6$ дробь не имеет смысла, при $a > 6$, дробь отрицательна

Ответ: 1^й рабочий изготавливал 14 дет./день, 2^й рабочий – 9 дет./день.

Решение задачи с помощью системы уравнений обычно проводят в такой последовательности:

1. Вводят переменные, т.е. обозначают буквами x , y , z ... величины, которые требуется найти по условию задачи, либо те, которые необходимы для отыскания искомым величин;
2. Используя введенные переменные, а также указанные в условии задачи конкретные значения переменных и соотношения между ними, составляют систему уравнений, т.е. «переводят» текст задачи на язык алгебры, составляя систему равенств алгебраических выражений.
3. Решают составленную систему уравнений и из полученных решений отбирают те, которые подходят по смыслу задачи.

3. Мастер и ученик изготовили в день 100 деталей. Во второй день мастер изготовил на 20% больше, а ученик – на 10% больше, чем в первый день. Всего во второй день мастер и ученик изготовили 116 деталей. Сколько деталей изготовил мастер и сколько изготовил ученик в первый день? **Вопрос задачи поможет нам ввести x и y**

| | 1 день | | 2 день | |
|---------------|--------|-------|----------------------------------|-------|
| | дет. | | дет. | |
| Мастер | x |] 100 | <small>справка</small> $1,2x$ |] 116 |
| Ученик | y | | <small>справка</small> $1,1y$ | |

На 20% больше, значит 120%.
120% = 1,2

На 10% больше, значит 110%.
110% = 1,1

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 1,2x + 1,1y = 116 \end{cases}$$

Реши систему уравнений самостоятельно

4. Двое рабочих, работая вместе, выполнили работу за 2 дня.

Вопрос задачи поможет нам ввести x и y

Сколько времени нужно каждому из них на выполнение всей работы, если известно, что если бы первый проработал 2 дня, а второй один, то всего было бы столько же работы. Формула $A = vt$ поможет нам составить уравнение

справка

| | t , дн. | A , часть | v , часть/дн. |
|---|-----------|-------------|-----------------|
| 1 | x | 1 | $\frac{1}{x}$ |
| 2 | y | 1 | $\frac{1}{y}$ |

Выразим скорость работы, для этого работу : время

$$v = \frac{A}{t}$$

Скорость совместной работы находим сложением скоростей

Работая вместе, рабочие выполнили работу, т.е. 1 часть

$$v_{\text{совм}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$A = 1$$

$$t = 2$$

Найдем работу, которую выполнит Iй раб. за 2 ч по формуле $A = vt$

$$A_1 = 2 \cdot \frac{2}{x}$$

$$A_2 = 1 \cdot \frac{1}{y}$$

$$= \frac{5}{6}$$

Найдем работу, которую выполнит IIй раб. за 1 ч по формуле $A = vt$

5. Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей. После того как первый проработал 7 ч и второй 4 ч, оказалось, что они выполнили $\frac{5}{9}$ всей работы. Проработав совместно еще 4 ч, они установили, что им остается выполнить $\frac{1}{18}$ всей работы. За сколько часов каждый из рабочих, работая отдельно, мог бы выполнить всю работу?

Вопрос задачи поможет нам ввести x и y

работу?

| | $t, \text{ ч}$ | $A, \text{ часть}$ | $v, \text{ часть/ч}$ |
|---|----------------|--------------------|----------------------|
| 1 | x | 1 | $\frac{1}{x}$ |
| 2 | y | | $\frac{1}{y}$ |

Совместно проработали 4 ч.
Находим работу по формуле $A=vt$

справка $(\quad) \cdot 4 = 1 - \frac{5}{9} - \frac{1}{18}$

Найдем работу, которую выполнит I^й раб. за 7 ч по формуле $A = vt$

Рассчитаем часть работы, которую они

Найдем работу, которую выполнит II^й раб. за 4 ч по формуле $A = vt$

выполняют за 4 ч совместной работы. Часть работы 1 вычтем работу,

справка $A_1 = \frac{7}{x}$

справка $A_2 = 4 \cdot \frac{4}{y}$

$= \frac{5}{9}$

Скорость совместной работы находим сложением скоростей

которую они уже выполнили $\frac{5}{9}$

И вычтем работу, которую им

справка $v_{\text{совм}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

осталось выполнить $\frac{1}{18}$



$$\begin{cases} \frac{7}{x} + \frac{4}{y} = \frac{5}{9} \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot 4 = 1 - \frac{5}{9} - \frac{1}{18} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{7}{x} + \frac{4}{y} = \frac{5}{9} \\ \frac{4}{x} + \frac{4}{y} = \frac{7}{18} - \frac{5}{9} - \frac{1}{18} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{7}{x} + \frac{4}{y} = \frac{5}{9} \\ \frac{3}{x} = \frac{3}{18} \end{cases}$$

$$\frac{7}{18} + \frac{4}{y} = \frac{5}{9}$$

$$\frac{4}{y} = \frac{5}{9} - \frac{7}{18}$$

$$\frac{4}{y} = \frac{3}{18}$$

$$y = 24$$

$$x = 18$$

Ответ:

за 18ч мог бы выполнить всю работу 1^й рабочий, работая отдельно,
за 24 ч – 2^й рабочий.

6. При испытании двух двигателей было установлено, что первый израсходовал 300 г, а второй 192 г бензина, причем второй работал на 2 ч меньше, чем первый. Первый двигатель затрачивал в час на 6 г бензина больше, чем второй. Какое количество бензина в час расходовал каждый из двигателей?

Например, эту задачу рассмотрим, что решить иную задачу можно разными способами: уравнением системы уравнений...

Начнем с расхода горючего в час.
Скорость расхода горючего (г/ч) 

| | $v, \text{ г/ч}$ | $A, \text{ г}$ | $t, \text{ ч}$ |
|---|---------------------------------|-------------------------------|-------------------|
| 1 | $x+6$ <small>справка</small> | 300 <small>справка</small> | $\frac{300}{x+6}$ |
| 2 | x | 192 | $\frac{192}{x}$ |

Общий расход горючего для каждого двигателя – это A (г) 

Выразим время работы, для этого работу : скорость 

на 2 ч 

$t = \frac{A}{v}$

$$\frac{192}{x} \text{ < } = \frac{300}{x+6} \text{ на 2 ч}$$

Решив это уравнение, мы сразу получим ответ на вопрос задачи, т.к. за x обозначена искомая величина – какое количество бензина в час расходовал 2 двигатель.

6. При испытании двух двигателей было установлено, что первый израсходовал 300 г, а второй 192 г бензина, причем второй работал на 2 ч меньше, чем первый. Первый двигатель затрачивал в час на 6 г бензина больше, чем второй. Какое количество бензина в час расходовал каждый из двигателей?

Составим уравнение между t и A .
 Начнем с времени работы каждого двигателя (ч)

| | $t, \text{ ч}$ | $A, \text{ г}$ |
|---|---------------------------------|-------------------------------|
| 1 | $x+2$ <small>справка</small> | 300 <small>справка</small> |
| 2 | x | 192 |

Общий расход горючего для каждого двигателя – это A (г)

Выразим скорость работы, для этого работу : время

$$v = \frac{A}{t}$$

$$\frac{300}{x+2} \geq \frac{192}{x} \quad \text{на } 6\text{ г/ч}$$

Но, решив это уравнение, придется сделать еще дополнительные действия, чтобы ответить на вопрос задачи.

6. При испытании двух двигателей было установлено, что первый израсходовал 300 г, а второй 192 г бензина, причем второй работал на 2 ч меньше, чем первый. Первый двигатель затрачивал в час на 6 г бензина больше, чем второй. Какое количество бензина в час расходовал каждый из двигателей?

Решим эту задачу с помощью системы уравнений...

Начнем с времени работы каждого двигателя (ч)



Введем переменную для расхода горючего в час (г/ч)



| | ч | v , г/ч | A , г |
|---|---------------------------------|---------------------------------|--------------|
| 1 | $x+2$ <small>справка</small> | $y+6$ <small>справка</small> | $(x+2)(y+6)$ |
| 2 | x | y | xy |

справка

Найдем общий расход бензина по формуле $A = vt$



$$= 300$$

$$= 192$$

$$(x+2)(y+6) = 300,$$

$$xy = 192.$$

$$(x+2)(y+6) = 300,$$

$$xy = 192;$$

$$xy+6x+2y+12 = 300,$$

$$xy = 192;$$

$$192+6x+2y+12 = 300,$$

$$6x+2y = 96, \quad /: 2$$

| | Ч | $v, \text{ г/ч}$ | $A, \text{ г}$ |
|----|---------|------------------|--------------------|
| 30 | 1 $x+2$ | $y+6$ | $(x+2)(y+6) = 300$ |
| x | 2 x | y | $xy = 192$ |

$$3x^2 - 48x + 192 = 0$$

$$D = 24^2 - 3 \cdot 192 = 0$$

$$x = \frac{24 + 0}{3} = 8$$

$$y = 48 - 3 \cdot 8 = 24$$

$$y = 48 - 3x,$$

$$x(48 - 3x) = 192;$$

$$48x - 3x^2 = 192$$

$$y = 24,$$

$$x = 8.$$

Теперь ответим на вопрос задачи.
24 г/ч расходует 2^й двигатель,
30 г/ч – 1^й двигатель.

7. Ученик токаря втачивает шахматные пешки для определенного числа комплектов шахмат. Он хочет научиться изготавливать ежедневно на 2 пешки больше, чем теперь; тогда такое же задание он выполнит на 10 дней быстрее. Если бы ему удалось научиться изготавливать на 4

Работа – неизвестная величина, поэтому введем y

пешками этот ученик, если для ка

Чтобы найти время надо работу разделить на скорость

$$t = \frac{A}{v}$$

| | v , шт./дн. | A , шт. | t , дн. |
|-----------------------|---------------|-----------|-----------------|
| Вытачивает фактически | x | y | $\frac{y}{x}$ |
| На 2 пешки больше | $x+2$ | y | $\frac{y}{x+2}$ |

на 10 дн. <

| | v , шт./дн. | A , шт. | t , дн. |
|-----------------------|---------------|-----------|-----------------|
| Вытачивает фактически | x | y | $\frac{y}{x}$ |
| На 4 пешки больше | $x+4$ | y | $\frac{y}{x+4}$ |

На 10 дней быстрее, значит на 10 дней меньше.

на 16 дн. <

На 16 дней быстрее, значит на 16 дней меньше.

Составьте и решите систему уравнений самостоятельно.

Найдите ответ на вопрос задачи.

Задачи для самостоятельной работы.

1.

Однотипные детали обрабатываются на двух станках. Производительность первого станка на 40% больше производительности второго. Сколько деталей было обработано за смену каждым станком, если первый работал в эту смену 6 ч, а второй – 7 ч, причем вместе они обработали 616 деталей?

2.

Двое рабочих вместе могут выполнить некоторую работу за 10 дней. После семи дней совместной работы один из них был переведен на другой участок, а второй закончил работу, проработав еще 9 дней. За сколько дней каждый рабочий мог выполнить всю работу?

3.

Две бригады колхозников должны закончить уборку урожая за 12 дней. После 8 дней совместной работы первая бригада получила другое задание, поэтому вторая закончила оставшуюся часть работы за 7 дней. За сколько дней могла бы убрать урожай каждая бригада, работая отдельно?

Уравнения

Задача 1. по плану

Задача 3. мастер ученик

Задача 4. 1 рабочий 2 рабочий

Задача 7. КОМПЛЕКТОВ шахмат

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. 1 станок 2 станок

Задача 2. 1 рабочий 2 рабочий

Задача 3. 1 бригада 2 бригада

**Форма для
поверки
ответов.**

