

Работа по теме

*«Показательная функция
и ее применение»*

Выполнил Антонов Борис.

1. Показательная функция

2. Экспонента.

3. Показательной функции и ее применения в природе

4. В биологии.

5. В экономике.

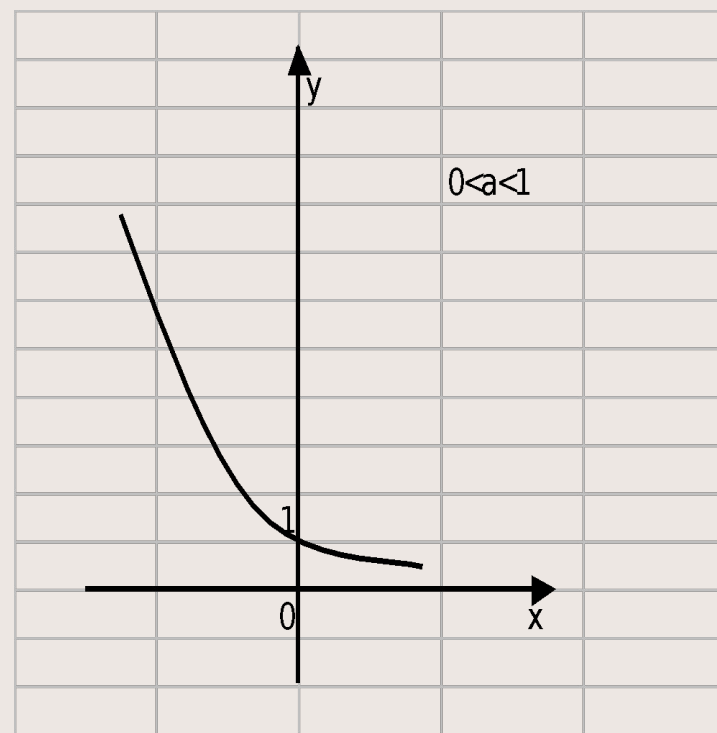
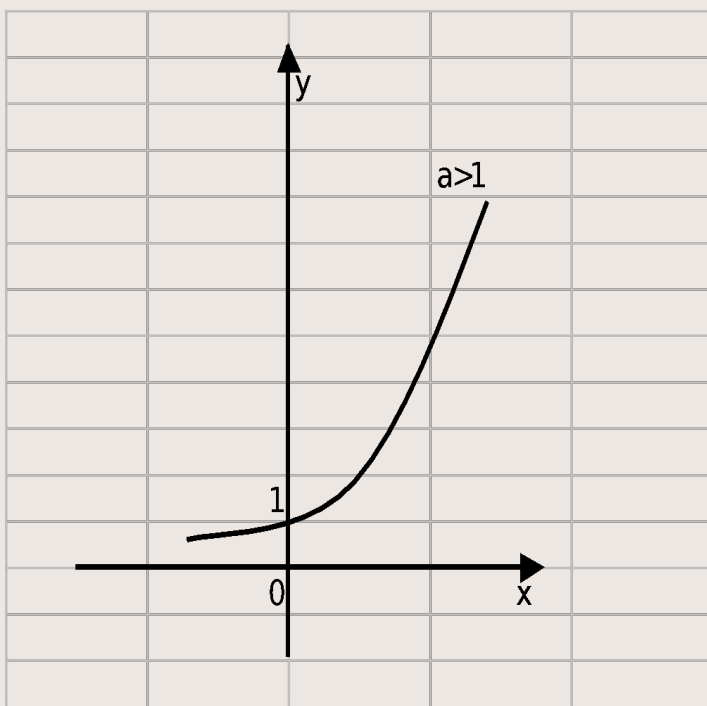
Презентация по теме: «Показательная функция».

Некоторые наиболее часто
встречающиеся виды
трансцендентных функций,
прежде всего показательные,
открывают доступ ко
многим исследованиям.

Л.Эйлер.

Показательная функция.

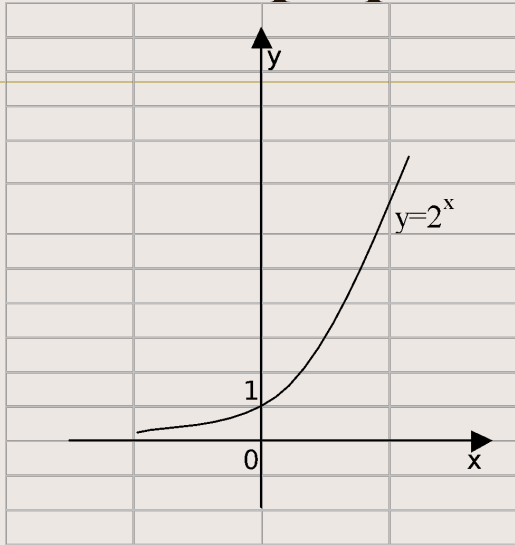
Функция вида $y=a^x$, где a -заданное число, $a>0$, $a\neq 1$, x -переменная, называется показательной.



Показательная функция обладает следующими свойствами:

1. $D(y)$: множество \mathbb{R} всех действительных чисел;
2. $E(y)$: множество всех положительных чисел;
3. Показательная функция $y=a^x$ является возрастающей на множестве всех действительных чисел, если $a>1$, и убывающей, если $0<a<1$;
4. Не является ни четной, ни нечетной;
5. Не ограничена сверху, ограничена снизу;
6. Не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения;
7. Непрерывна;
8. Если $a>1$, то функция выпукла вниз.

Графики функции $y=2^x$ и $y=(1/2)^x$

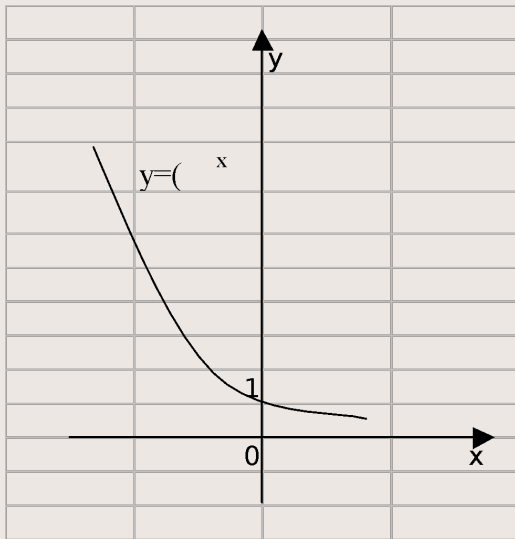


1. График функции $y=2^x$ проходит через точку $(0;1)$ и расположен выше оси Ox .

$a > 1$ $D(y): x \in \mathbb{R}$

$E(y): y > 0$

Возрастает на всей области определения.



2. График функции $y=(1/2)^x$ также проходит через точку $(0;1)$ и расположен выше оси Ox .

$0 < a < 1$ $D(y): x \in \mathbb{R}$

$E(y): y > 0$

Убывает на всей области определения.

Показательные уравнения.

Уравнения, у которых неизвестное находится в показателе степени, называются показательными.

Способы решения:

1. По свойству степени;
2. Вынесение общего множителя за скобки;
3. Деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение, принимающее значение отличное от нуля при всех действительных значениях x ;
4. Способ группировки;
5. Сведение уравнения к квадратному;
6. Графический.

Например:

$$3^{2x+6} = 2^{x+3}$$

Решение.

$$(3^2)^{x+3} = 2^{x+3}$$

$$9^{x+3} = 2^{x+3}$$

т.к. $2 \neq 0$, тогда

$$\left(\frac{9}{2}\right)^{x+3} = 1$$

$$\left(\frac{9}{2}\right)^{x+3} = \left(\frac{9}{2}\right)^0$$

$$x+3 = 0$$

$$x = -3$$

Ответ. $x = -3$.

$$9^{-\sqrt{x-1}} = \frac{1}{27}$$

Решение.

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{\sqrt{x-1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$(2\sqrt{x-1})^2 = 3^2$$

$$4x - 4 = 9$$

$$4x = 13$$

$$x = 3,25$$

Ответ. $x = 3,25$.

Используя свойства возрастания и убывания показательной функции, можно сравнить числа и решать показательные неравенства.

1. Сравнить:

а) 5^3 и 5^5 ; б) 4^7 и 4^3 ; в) $0,2^2$ и $0,2^6$; г) $0,9^2$ и $0,9$.

2. Решить:

а) $2^x > 1$; б) $13^{x+1} < 13^3$; в) $0,7^{x-2} > 0,7$; г) $0,04^x < 0,2^2$.

3. Неравенства, у которых неизвестное находится в показателе степени, называются показательными.

Решение показательных неравенств сводится к решению неравенств $a^x > a^b$ или $a^x < a^b$.

Если $a > 1$, то $x > b$ ($x < b$).

Если $0 < a < 1$, то $x < b$ ($x > b$).

Способы решения показательных неравенств.

1. По свойству степени;
2. Вынесение общего множителя за скобки;
3. Сведение к квадратному;
4. Графический.

$$11^{\sqrt{x+6}} \leq 11^x$$

Решение.

т.к. $11 \leq 1$, то $\sqrt{x+6} \geq x$

а) Построим график функции: $y = \sqrt{x+6}$

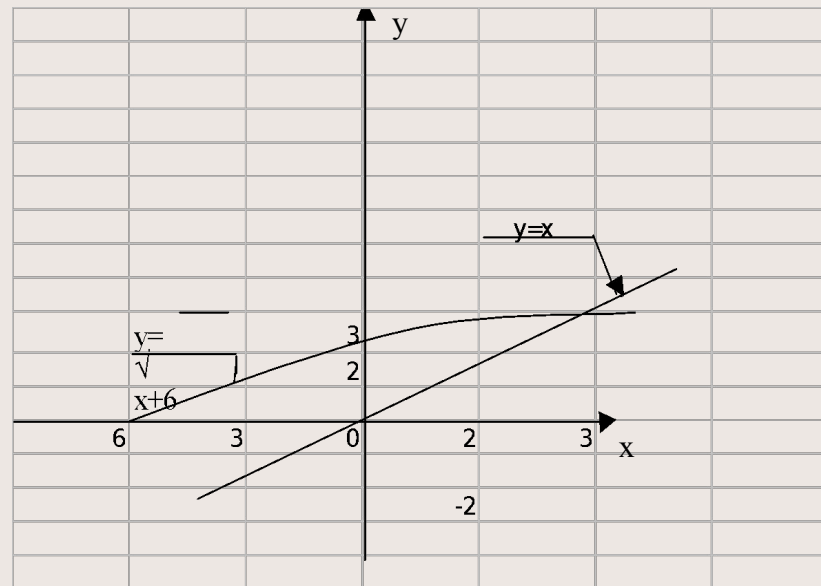
x	-2	3
$y = \sqrt{x+6}$	2	3

б) Построим график функции: $y = x$

x	-2	2
$y = x$	-2	2

Ответ $-6 \leq x \leq 3$.

Некоторые показательные неравенства заменой $a^x = t$ сводятся к квадратным неравенствам, которые решают, учитывая, что $t > 0$.



$$\frac{4^x - 2^{x+1} + 8}{2^{1-x}} \leq 8^x$$

Решение.

$$\begin{cases} 4^x - 2^{x+1} + 1 + 8 < 8^x \\ 2^{1-x} > 8^x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 2^{3x} + 8 < 0 \\ 1 - x > 33 \end{cases}$$

$$2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 8 \leq 2^{3x} \cdot 2^{1+x}$$

$$2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 8 - 2 \cdot 2^{2x} \leq 0$$

$$-2^{2x} - 2 \cdot 2^{2x} + 8 \leq 0$$

$$2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 8 \leq 0$$

Пусть $2^x = t \geq 0$, тогда

$$t^2 + 2t - 8 \leq 0$$

$$t^2 + 2t - 8 = 0$$

$$t_1 + t_2 = -2$$

$$t_1 \cdot t_2 = -8$$

$$(t+4) \cdot (t-2) = 0$$

$$t_1 = -4, \quad t_2 = 2.$$

При $t \geq 2, (t+4) \cdot (t-2) \leq 0$

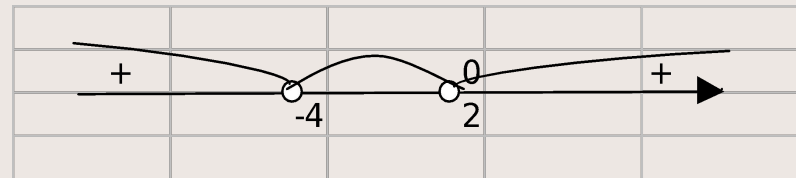
$$t \leq -4, \quad t \leq 2$$

$t \leq -4$ не удовлетворяет условию $t \geq 0$

$$2^x \leq 2$$

$$x \leq 1$$

Ответ : $x \leq 1$



Решение систем показательных уравнений и неравенств.

$$\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 17, \\ \frac{x}{3^2} + 2^y = 17. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} 3^x - (2^y)^2 = 17, \\ \frac{1}{(3^x)^2} + 2^y = 17. \end{cases}$$

1) Пусть $3^x = m$, $2^y = n$, $m \geq 0$, $n \geq 0$,

тогда

$$\begin{cases} m - n^2 = 17, \\ \sqrt{m+n} = 17. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -n^2 + m - 17 = 0, \\ m = (17 - n)^2. \end{cases}$$

$$m = 17 + n^2$$

$$17 + n^2 = (17 - n)^2$$

$$17 + n^2 = 289 - 34n + n^2$$

$$-34n = -272$$

$$n = 8$$

$$2) m = 17 + 8^2$$

$$m = 81$$

$$3) 3^x = 81 \quad 2^y = 8$$

$$3^x = 3^4 \quad 2^y = 2^3$$

$$x = 4 \quad y = 3$$

Ответ. (4;3)



Экспонента

Показательной функцией называется функция

$$y = a^x$$

Где a -заданное число, $a > 0$, $a \neq 1$

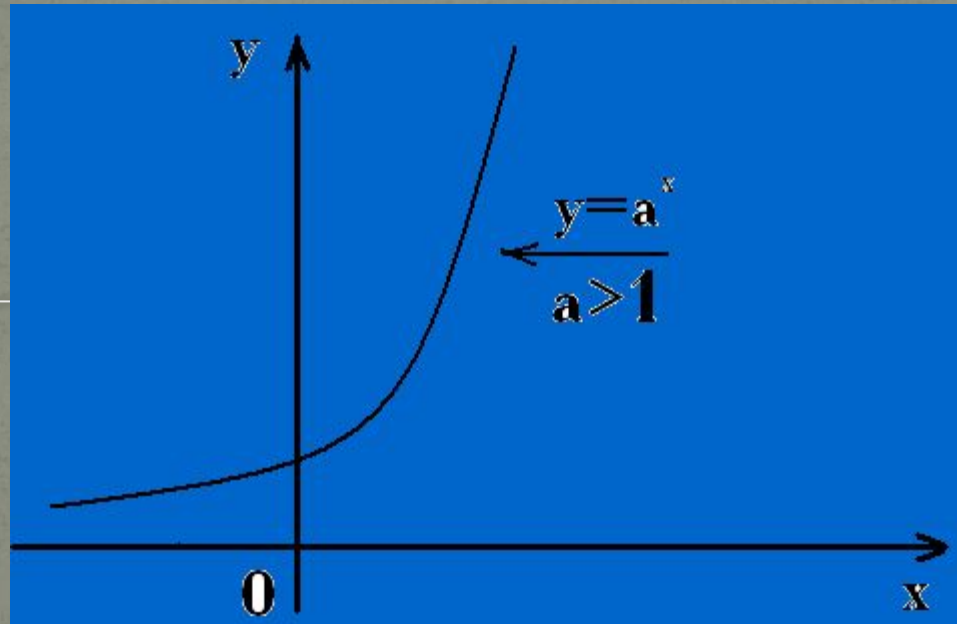


График функции $y = a^x$, $x \in \mathbb{N}$ состоит из точек с абциссами 1, 2, 3..., лежащие на некоторой кривой, - её называют Экспонентой

точке проходит по углом 45° .

Основное функциональное свойство экспоненты: $\exp(a \cdot x b) = \exp(a)\exp(b)$. Непрерывная функция с таким свойством либо тождественно равна 0, либо имеет вид $\exp(ct)$, где c — некоторая константа.

Дифференциальные уравнения

Экспонента является решением дифференциального уравнения $y' = y$ с граничным условием $y(0) = 1$.

Кроме того через экспоненту выражаются общие решения однородных дифференциальных уравнений.

Формальное определение

Экспоненциальная функция может быть определена двумя эквивалентными способами. Через ряд Тейлора:

или через предел:

Здесь x — любое вещественное, комплексное, p -адическое число или ограниченный линейный оператор.

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n$$

Многообразные применения показательной (или как еще ее называют экспонентой) функции вдохновили английского поэта Элмера Брилла, он написал «Оду экспоненте»

...Ею порождено многое из того,
Что достойно упоминания,

Как говорили наши
Англосаксонские предки.
Могущество ее порождений
Заранее обусловлено ее
Собственной красотой и силой,
Ибо они суть, физическое воплощение
Абстрактной идеи ее.

Английские моряки любят и знают ее
Под именем «Гунтер»

Две шкалы «Гунтера»-
Вот чудо изобретательности.

Экспонентой порождена
Логарифмическая линейка:
У инженера и астронома не было
Инструмента полезнее, чем она.

Даже изумные искусства питаются ею.
Разве музыкальная гамма не есть
Набор передовых логарифмов?

И таким образом абстрактно красивое
Стало предком одного из величайших
Человеческих достижений»

Были поэты, которые не посвящали од экспоненте, но упоминали их в своих стихах, Например, поэт Борис Слуцкий в стихотворении «Физики и лирики».



Показательная функция

*И её применение в природе
и технике.*



Наглядный бытовой пример!

- ◆ Все, наверное, замечали, что если снять кипящий чайник с огня, то сначала он быстро остывает, а потом остывание идет гораздо медленнее. Дело в том, что скорость остывания пропорциональна разности между температурой чайника и температурой окружающей среды. Чем меньше становится эта разность, тем медленнее остывает чайник. Если сначала температура чайника равнялась T_0 , а температура воздуха T_1 , то через t секунд температура T чайника выразится формулой:
- ◆ $T = (T_0 - T_1)e^{-kt} + T_1$,
- ◆ где k - число, зависящее от формы чайника, материала, из которого он сделан, и количества воды, которое в нем находится.

При падении тел в безвоздушном пространстве скорость их непрерывно возрастает.

- ◆ При падении тел в воздухе скорость падения тоже увеличивается, но не может превзойти определенной величины.



- ◆ Рассмотрим задачу о падении парашютиста. Если считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости падения парашютиста, т.е. что $F = kv$, то через t секунд скорость падения будет равна: $v = mg/k(1 - e^{-kt/m})$, где m - масса парашютиста. Через некоторый промежуток времени $e^{-kt/m}$ станет очень маленьким числом, и падение станет почти равномерным. Коэффициент пропорциональности k зависит от размеров парашюта. Данная формула пригодна не только для изучения падения парашютиста, но и для изучения падения капли дождевой воды, пушинки и т.д.

- ◆ Много трудных математических задач приходится решать в теории межпланетных путешествий. Одной из них является задача об определении массы топлива, необходимого для того, чтобы придать ракете нужную скорость v . Эта масса M зависит от массы m самой ракеты (без топлива) и от скорости v_0 , с которой продукты горения вытекают из ракетного двигателя.

- ◆ Если не учитывать сопротивление воздуха и притяжение Земли, то масса топлива определится формулой: $M = m(ev/v_0 - 1)$ (формула К.Э. Циолковского). Например, для того чтобы ракете с массой 1,5 т придать скорость 8000 м/с, надо при скорости истечения газов 2000 м/с взять примерно 80 т топлива.

- ◆ Если при колебаниях маятника, гири, качающейся на пружине, не пренебрегать сопротивлением воздуха, то амплитуда колебаний становится все меньше, колебания затухают. Отклонения точки, совершающей затухающие колебания, выражается формулой: $s = Ae^{-kt} \sin(\omega t + \varphi)$. Так как множитель e^{-kt} уменьшается с течением времени, то размах колебаний становится все меньше и меньше.



- ◆ Когда радиоактивное вещество распадется, его количество уменьшается. Через некоторое время остается половина первоначального количества вещества. Этот промежуток времени t_0 называется периодом полураспада. Вообще через t лет масса m вещества будет равна:
 $m = m_0(1/2)^{t/t_0}$, где m_0 - первоначальная масса вещества. Чем больше период полураспада, тем медленнее распадается вещество.
- ◆ Явление радиоактивного распада используется для определения возраста археологических находок, например, определен примерный возраст Земли, около 5,5 млрд. лет, для поддержания эталона времени.

Задача: Период полураспада плутония равен 140 суткам. Сколько плутония останется через 10 лет, если его начальная масса равна 8г ?

Решение.

$$T = 140 \text{сут.}$$

$$t = 10 \text{лет}$$

$$m_0 = 8 \text{г}$$

$$m = ?$$

$$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

$$t = 365 \cdot 10 = 3650 \text{(дней)}$$

$$m(t) = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3650}{140}} = 1,1345 \cdot 10^{-7} \text{(г)} = 1,13 \cdot 10^{-7} \text{(г)}.$$

Ответ: $1,13 \cdot 10^{-7}$ (г).



- ◆ ***Как видите, во всех приведенных выше исследованиях использовалась показательная функция.***

◆ **Вот некоторые из Нобелевских лауреатов, получивших премию за исследования в области физики с использованием показательной функции:**

◆ **Пьер Кюри - 1903 г.**

◆ **Ричардсон Оуэн - 1928 г.**

◆ **Игорь Тамм - 1958 г.**

◆ **Альварес Луис - 1968 г.**

◆ **Альфвен Ханнес - 1970 г.**

◆ **Вильсон Роберт Вудро - 1978 г.**

Она не перестаёт нас удивлять!

- ◆ Показательная функция также используется при решении некоторых задач судовождения, например, функцию e^{-x} используют в задачах, требующих применения биномиального закона (повторение опытов), закона Пуассона (редких событий), закона Релея (длина случайного вектора).



*Применение
показательной функции
в биологии .*

Применение логарифмической функции в биологии.

В питательной среде бактерия кишечной палочки делится каждую минуту. Понятно, что общее число бактерий за каждую минуту удваивается. Если в начале процесса была одна бактерия, то через x минут их число (N) станет равной 2^x , т.е.

$$N(x) = 2^x.$$





Применение показательной функции

Задача: Ежемесячно на банковский вклад, равный S_0 рублей начисляется $r\%$. На сколько процентов возрастет банковский вклад за x месяцев?

Решение.

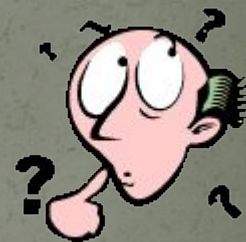
Пусть $r = 2\%$, $x = 12$ месяцев.

Тогда за год банковский вклад возрастет на

$$S_0(x) - S_0 = S_0(1 + 0,02)^{12} - S_0 = S_0(1,02^{12} - 1) = S_0(1,268241 - 1) \approx S_0 \cdot 0,27,$$

$$\frac{0,27S_0}{S_0} \cdot 100\% = 27\%.$$

Ответ: на 27%.



Спаси́бо за просмотр!

