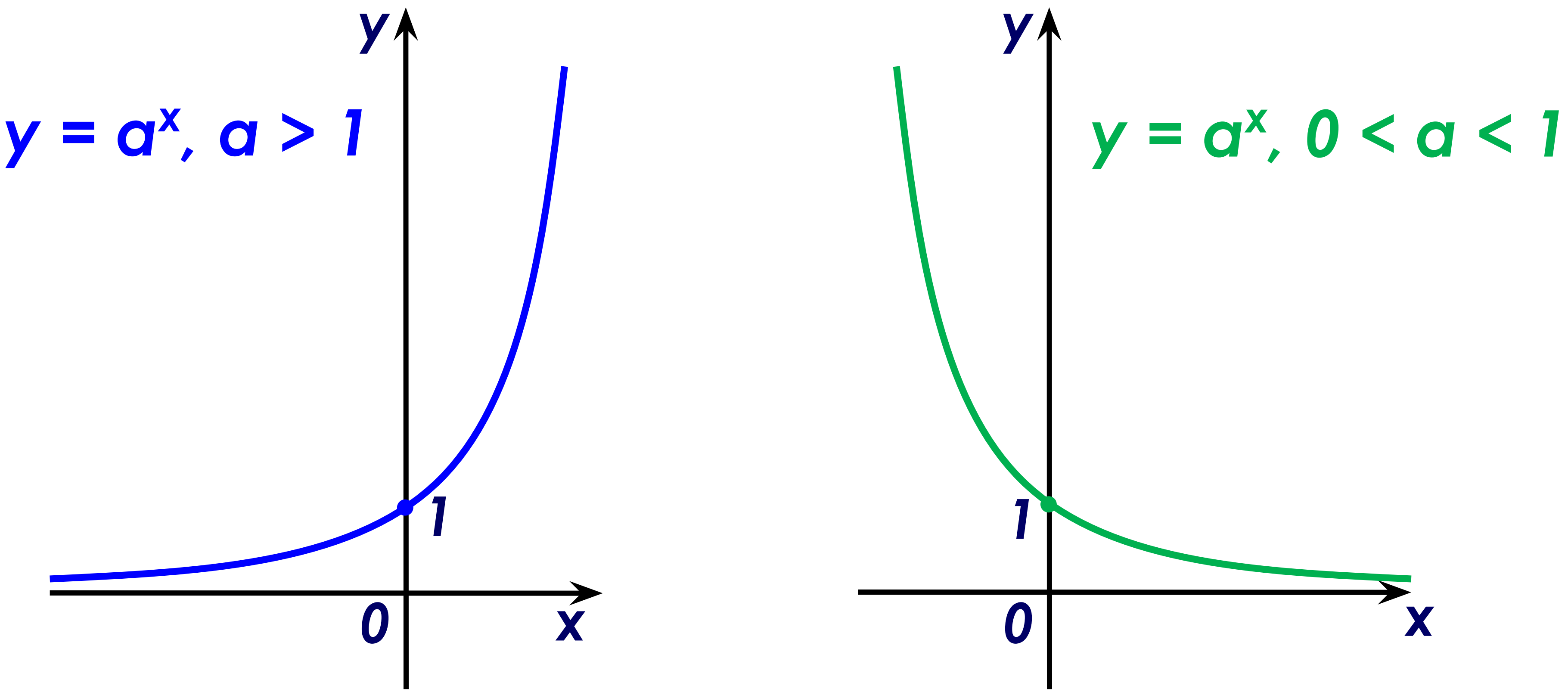


$y = a^x, a > 1$
y
x
0
1
$y = a^x, 0 < a < 1$
y
x
0
1

Содержание

Понятие показательной функции

Функцию вида

$y = a^x$, **где** $a \neq 1$, $a > 0$

называют

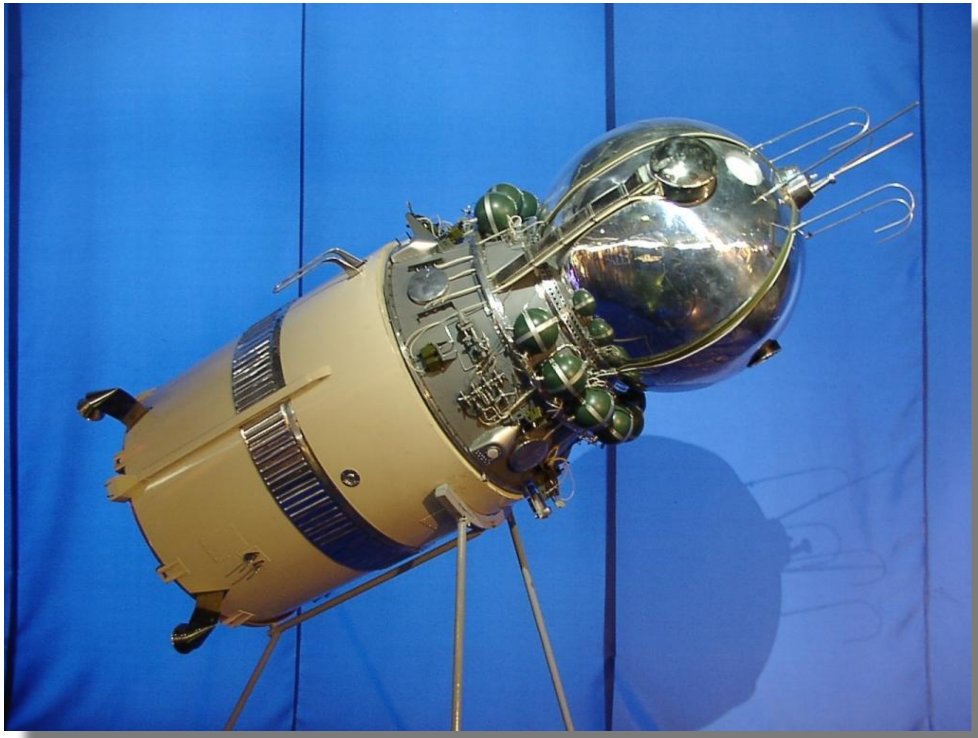
показательной функцией

Показательная функция часто используется при описании различных физических процессов

1) *Например, в теории межпланетных путешествий решается задача об определении массы топлива, необходимого для того, чтобы придать ракете нужную скорость* ***v****. Эта масса* ***M*** *зависит от массы* ***m*** *самой ракеты (без топлива) и от скорости* v_o*, с которой продукты горения вытекают из ракетного двигателя. Если не учитывать сопротивление воздуха и притяжение Земли, то масса топлива определяется формулой:*

$M = m(e^{v/v_o}-1)$ *(формула К.Э. Циолковского).*

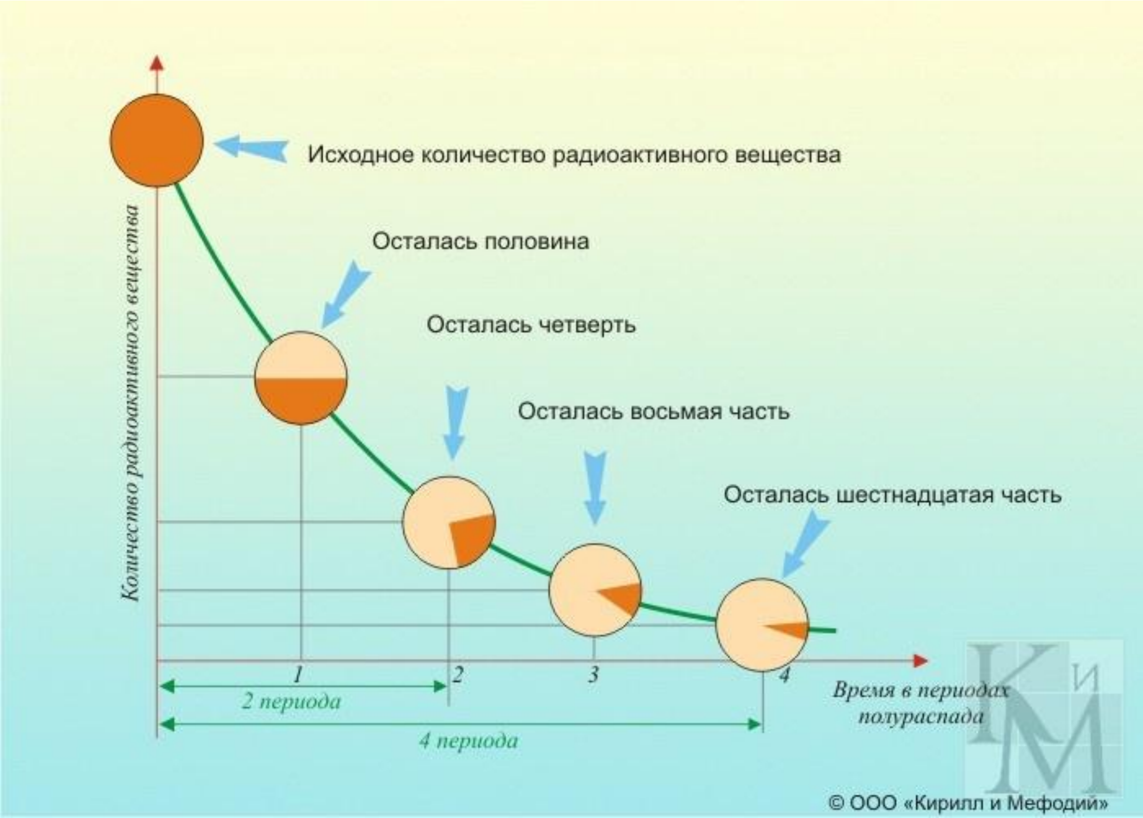
Например, для того чтобы ракета с массой 1,5т имела скорость 8000м/с, надо взять примерно 80т топлива.



Показательная функция часто используется при описании различных физических процессов

2) *Радиоактивный распад вещества задаётся формулой* $\boldsymbol{m = m_0(1/2)^{t/to}}$*, где* ***m*** *и* $\boldsymbol{m_o}$ *– масса радиоактивного вещества в момент времени* ***t*** *и в начальный момент времени* ***t = 0; T*** *- период полураспада (промежуток времени, за который первоначальное количество вещества уменьшается вдвое).*

Когда радиоактивное вещество распадается, его количество уменьшается. Через некоторое время остаётся половина первоначального количества вещества. Чем больше период полураспада, тем медленнее распадается вещество.



Показательная функция часто используется при описании различных физических процессов

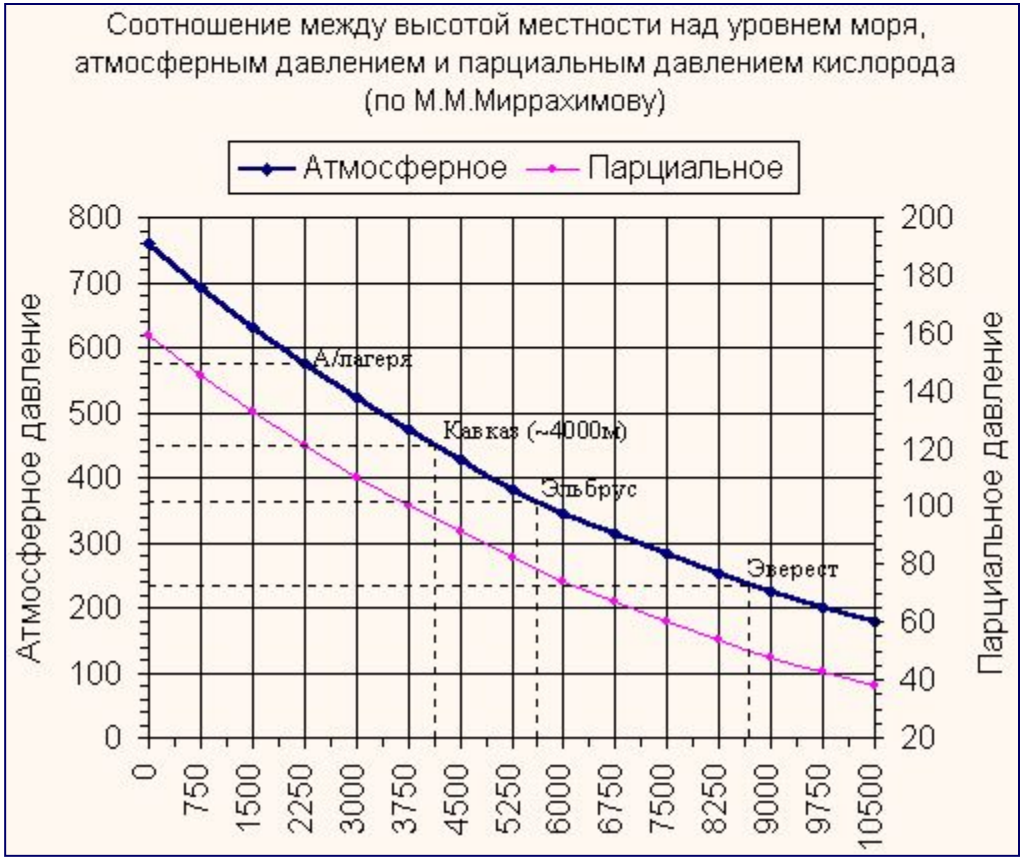
3) *Изменение атмосферного давления* ***p*** *в зависимости от высоты* ***h*** *над уровнем моря описывается формулой* $\boldsymbol{p = p_o \cdot a^k}$, *где* $\boldsymbol{p_o}$ *– атмосферное давление над уровнем моря,* ***a*** *– некоторая постоянная.*

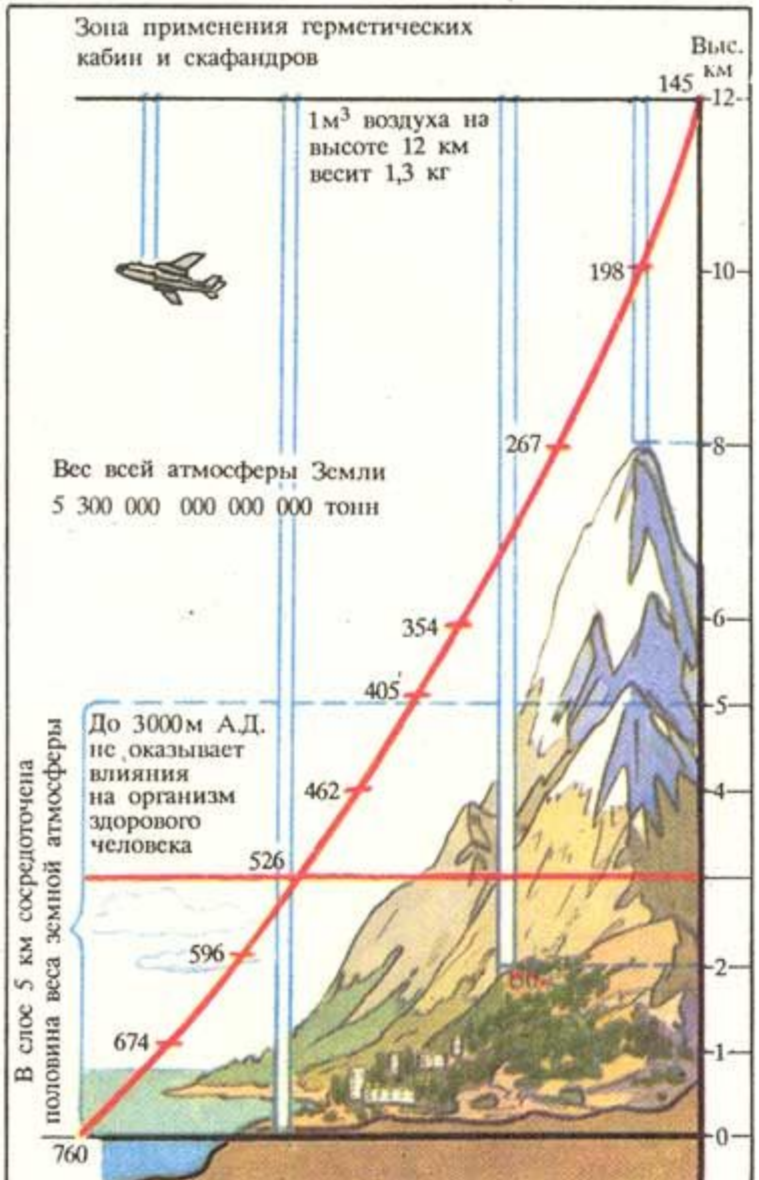
Барограф метеорологический анероидный

Погодная станция Oregon Scientific

Показательная функция часто используется при описании различных физических процессов

3) *Изменение атмосферного давления **p** в зависимости от высоты **h** над уровнем моря*





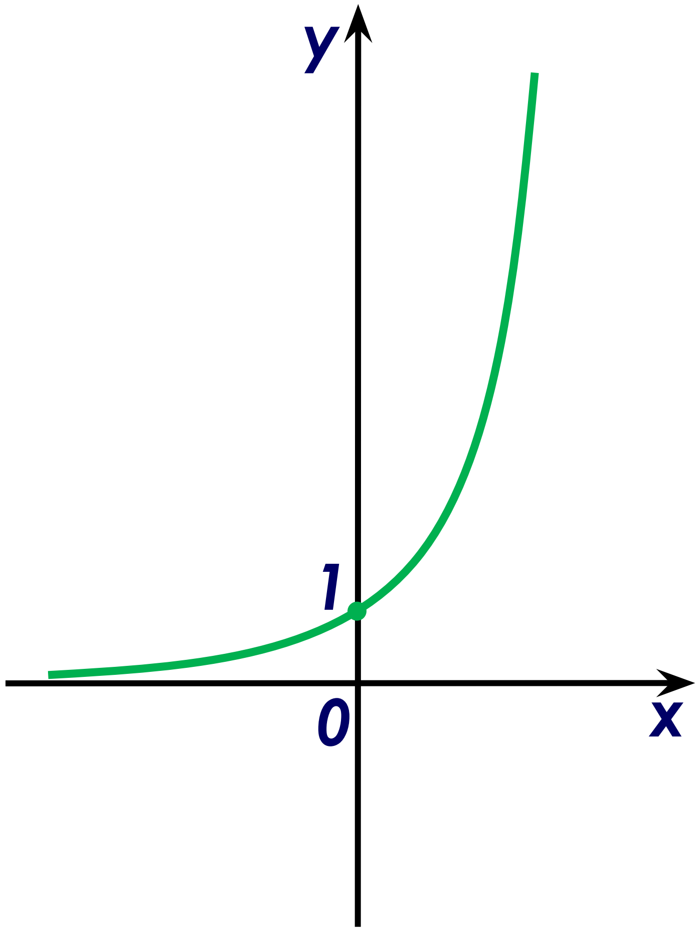
Свойства показательной функции $y = a^x$, $a \neq 1$, $a > 0$

1. $D(y) = (-\infty; +\infty)$,
   $E(y) = (0; +\infty)$.
2. а) Нулей не имеет;
   б) точка пересечения с осью ординат $(0; 1)$,
   т. к. $y(0) = a^0 = 1$.
3. а) При $a > 1$ функция возрастает на R;
   б) при $0 < a < 1$ функция убывает на R.
4. Ни четная функция, ни нечетная.
5. Не ограничена сверху, ограничена снизу.
6. Не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.
7. Непрерывна. Выпукла вниз.
8. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
   $a^n : a^m = a^{n-m}$
   $(a^n)^m = a^{nm}$
   $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
   $(a : b)^n = a^n : b^n$

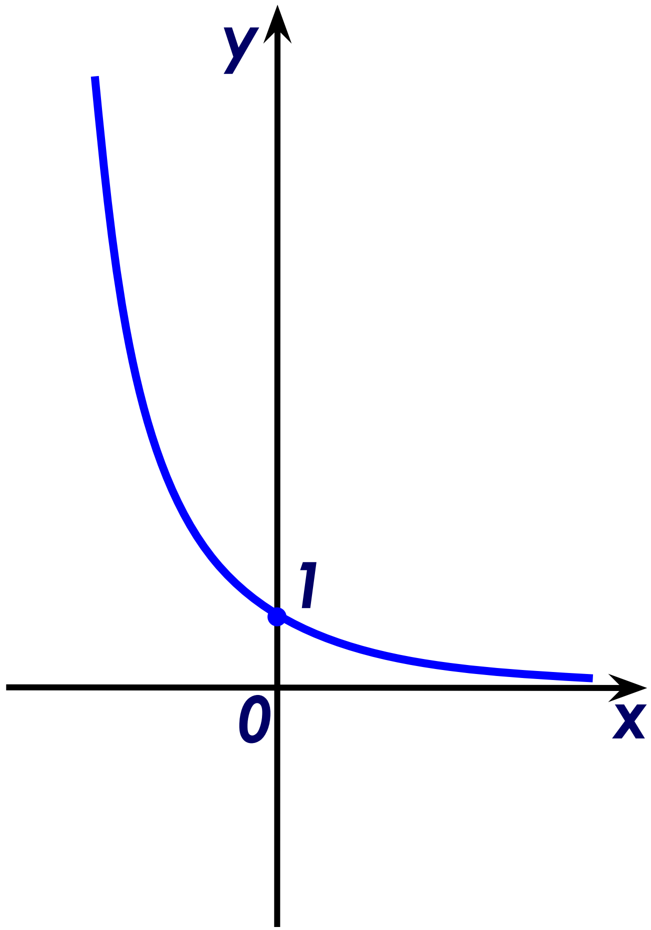
График показательной функции

$y = a^x,\ a \neq 1,\ a > 0$

$y = a^x,\ a > 1$



$y = a^x,\ 0 < a < 1$



Свойства сравнения выражений вида a^x, $a \neq 1$, $a > 0$

1. Если $0 < a < 1$ или $a > 1$, то равенство $a^r = a^s$ справедливо тогда и только тогда, когда $r = s$.

2. Если $0 < a < 1$, то
   а) неравенство $a^x > 1$ справедливо $\Leftrightarrow x < 0$;
   б) неравенство $a^x < 1$ справедливо $\Leftrightarrow x > 0$.

3. Если $a > 1$, то
   а) неравенство $a^x > 1$ справедливо $\Leftrightarrow x > 0$;
   б) неравенство $a^x < 1$ справедливо $\Leftrightarrow x < 0$.

4. Если $a > 1$, то
   а) неравенство $a^{f(x)} > a^{h(x)}$ справедливо $\Leftrightarrow f(x) > h(x)$;
   б) неравенство $a^{f(x)} < a^{h(x)}$ справедливо $\Leftrightarrow f(x) < h(x)$.

5. Если $0 < a < 1$, то
   а) неравенство $a^{f(x)} > a^{h(x)}$ справедливо $\Leftrightarrow f(x) < h(x)$;
   б) неравенство $a^{f(x)} < a^{h(x)}$ справедливо $\Leftrightarrow f(x) > h(x)$.

Показательные уравнения

Уравнения вида $a^{f(x)} = a^{h(x)}$, где $a \neq 1,\ a > 0$ называют показательными уравнениями

$$\boxed{a^{f(x)} = a^{h(x)}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{f(x) = h(x)}$$

Методы решения показательных уравнений:

1. *Функционально-графический метод.*
2. *Метод уравнивания показателей.*
3. *Метод введения новой переменной.*

Показательные уравнения. Примеры

Пример 1

$$2^{2x-4}=64$$

$$2^{2x-4}=2^6$$

$$2x-4=6$$

$$x=5$$

$Ответ\ :\ 5$

Пример 2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5}=\left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$$

$$2x-3,5=0,5$$

$$x=2$$

$Ответ\ :\ 2$

Пример 3

$$5^{x^2-3x}=5^{3x-8}$$

$$x^2-3x=3x-8$$

$$x^2-6x+8=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=2, \\ x_2=4 \end{array}\right.$$

$Ответ\ :\ 2;\ 4$

Показательные уравнения. Примеры

Пример 4

$$\frac{0{,}2^{x-0{,}5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0{,}04^{x-2}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-0{,}5} : 5^{0{,}5} = 5 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{x-2}$$

$$5^{0{,}5-x-0{,}5} = 5 \cdot \left(5^{-2}\right)^{x-2}$$

$$5^{-x} = 5^{1-2x+4}$$

$$5^{-x} = 5^{5-2x}$$

$$-x = 5 - 2x$$

$$x = 5$$

$Ответ\ :\ 5$

Пример 5

$$4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$$

$$\left(2^2\right)^x + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$$

$$\left(2^x\right)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$$

Пусть $2^x = t$, *где* $t > 0$ *тогда*

$$t^2 + 2t - 24 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = -6, \\ t_2 = 4 \end{array}\right.$$

$t_1 = -6$ *не уд-ет условию* $t > 0$

Вернемся к исходной переменной

$$2^x = 4$$

$$x = 2$$

$Ответ\ :\ 2$

Показательные уравнения. Примеры

Пример 6

$$2^{2\left(x+\sqrt{x^2-2}\right)}-\frac{5}{2}\cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}}=6$$

$Пусть\quad 2^{x+\sqrt{x^2-2}}=t,\ \ t>0$

$$t^2-\frac{5}{2}t-6=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1=-\frac{3}{2}, \\ t_2=4 \end{array}\right.$$

$t_1=-\frac{3}{2}$ не уд-ет условию $t>0$

Вернемся к исходнойпеременной

$$2^{x+\sqrt{x^2-2}}=4$$

$$2^{x+\sqrt{x^2-2}}=2^2$$

ОДЗ:

$$x^2-2\geq 0$$

$$x^2\geq 2$$

$$|x|\geq\sqrt{2}$$

$$x\in(-\infty;-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2}:+\infty)$$

$$x+\sqrt{x^2-2}=2$$

$$\sqrt{x^2-2}=2-x$$

$$x^2-2=4-4x+x^2$$

$$4x=6$$

$$x=1{,}5$$

Ответ : 1,5.

Показательные уравнения. Примеры

Пример 7

$$\sqrt[x]{64}-\sqrt[x]{2^{3x+3}}+12=0$$

$$2^{\frac{6}{x}}-2^{\frac{3x+3}{x}}+12=0$$

$$2^{\frac{6}{x}}-2^{3+\frac{3}{x}}+12=0$$

$$2^{\frac{6}{x}}-8\cdot 2^{\frac{3}{x}}+12=0$$

Пусть $2^{\frac{3}{x}}=t,\ t>0$

$$t^2-8t+12=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1=2, \\ t_2=6; \end{array}\right.$$

Вернемся к исходнойпеременной

$2^{\frac{3}{x}}=2$ *или* $2^{\frac{3}{x}}=6$

$\frac{3}{x}=1$ $\qquad$ $\frac{3}{x}=\log_2 6$

$x=3$ $\qquad$ $x=\frac{3}{\log_2 6}$

Ответ : $3;\ \frac{3}{\log_2 6}.$

Показательные уравнения. Примеры

Пример 8

$$9 \cdot 27^{x-\frac{2}{3}} - \frac{2}{81} \cdot 9^{x+2} = 9$$

$$9 \cdot \frac{27^x}{27^{\frac{2}{3}}} - \frac{2}{81} \cdot 9^x \cdot 9^2 = 9$$

$$9 \cdot \frac{27^x}{9} - 2 \cdot 9^x = 9$$

$$27^x - 2 \cdot 9^x - 9 = 0$$

Пусть $3^x = t$, *где* $t > 0$, *тогда*

$$t^3 - 2t^2 - 9 = 0$$

$$t^3 - 3t^2 + t^2 - 9 = 0$$

$$t^2(t-3) + (t-3)(t+3) = 0$$

$$(t-3)(t^2 + t + 3) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t^2 + t + 3 = 0 - \text{нет корней} \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной

$$3^x = 3$$

$$x = 1$$

Ответ : 1.

Показательные уравнения. Примеры

Пример 9 (однородное уравнение)

$$5^{2x+1}-13\cdot 15^{x}+54\cdot 9^{x-1}=0$$

$$5\cdot 5^{2x}-13\cdot 15^{x}+54\cdot \frac{9^{x}}{9}=0$$

$$5\cdot 5^{2x}-13\cdot 15^{x}+6\cdot 9^{x}=0$$

Разделим на 9^{x}, *тогда*

$$\frac{5\cdot 5^{2x}}{9^{x}}-\frac{13\cdot 15^{x}}{9^{x}}+\frac{6\cdot 9^{x}}{9^{x}}=0$$

$$5\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{2x}-13\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{x}+6=0$$

Пусть $\left(\frac{5}{3}\right)^{x}=t$, *где* $t>0$, *тогда*

$$5t^{2}-13t+6=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1=\dfrac{3}{5}, \\ t_2=2 \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{x}=\frac{3}{5} \quad \text{или} \quad \left(\frac{5}{3}\right)^{x}=2$$

$$x=-1 \qquad\qquad x=\log_{\frac{5}{3}}2$$

Ответ: $-1;\ \log_{\frac{5}{3}}2.$

Показательные уравнения. Примеры

Пример 10 (составление отношения)

$$4^x - 3^{x-1} = 4^{x-1} + 3^x$$

$$4^x - 4^{x-1} = 3^x + 3^{x-1}$$

$$4^{x-1}(4-1) = 3^{x-1}(3+1)$$

$$4^{x-1} \cdot 3 = 3^{x-1} \cdot 4 \quad \Big| : \left(3^{x-1} \cdot 3\right), \ \text{т.к.} \ 3^{x-1} \cdot 3 > 0$$

$$\frac{4^{x-1} \cdot 3}{3^{x-1} \cdot 3} = \frac{3^{x-1} \cdot 4}{3^{x-1} \cdot 3}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{x-1} = \frac{4}{3}$$

$$x - 1 = 1$$

$$x = 2$$

Ответ : 2.

Показательные уравнения. Примеры

Пример 11 (скрытая замена переменной)

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=4$$

$Заметим\ ,что\ \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}=\sqrt{4-3}=1$

$Пусть\ \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=t,\ где\ t>0,\ тогда\ \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=\dfrac{1}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x}=\dfrac{1}{t}$

$уравнение\ примет\ вид:$

$$t+\frac{1}{t}=4,\qquad \Big|\times t$$

$$t^2-4t+1=0,\ \ D=16-4=12$$

$$t_1=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$$

$$t_2=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$$

Показательные уравнения. Примеры

Пример 11 (скрытая замена переменной)

Вернемся к исходной переменной:

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2-\sqrt{3}$$

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$$

$$\frac{x}{2} = -1$$

$$x = -2$$

или

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2+\sqrt{3}$$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = 2+\sqrt{3}$$

$$\frac{x}{2} = 1$$

$$x = 2$$

Ответ : $-2;\ 2.$

Показательные неравенства

Неравенства вида $a^{f(x)} > a^{h(x)}$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют **показательными неравенствами**

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

$a > 1$ | $0 < a < 1$

$f(x) > g(x)$ | $f(x) < g(x)$

или

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)(f(x)-g(x)) > 0$$

Показательные неравенства. Примеры

Пример 1

$$2^{2x-4} > 64$$

$$2^{2x-4} > 2^6$$

$$\text{т.к. функция } y = 2^t \text{ монотонно}$$

$$\text{возрастает на } R, \text{ то}$$

$$2x - 4 > 6$$

$$x > 5$$

$$\text{Ответ: } (5; +\infty)$$

Пример 2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$$

$$\text{т.к. функция } y = \left(\frac{1}{3}\right)^t$$

$$\text{монотонно убывает на } R, \text{ то}$$

$$2x - 3,5 > 0,5$$

$$x > 2$$

$$\text{Ответ: } (2; +\infty)$$

Показательные неравенства. Примеры

Пример 3

$$0{,}5^{x^2-3x} \le 0{,}5^{3x-8}$$

$т.к.\ функция\ y=(0{,}5)^t$

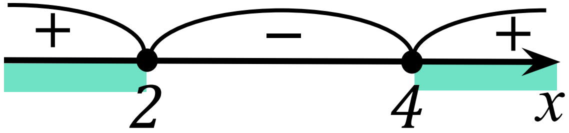
$монотонно\ убывает\ на\ R,\ то$

$$x^2-3x \ge 3x-8$$

$$x^2-6x+8 \ge 0$$

$$н.ф.:\ x^2-6x+8=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=2, \\ x_2=4 \end{array}\right.$$



$$x \in (-\infty;\ 2] \cup [4;\ +\infty)$$

$$Ответ:\ (-\infty;\ 2] \cup [4;\ +\infty)$$

Показательные неравенства. Примеры

Пример 4

$$8^x + 18^x > 2 \cdot 27^x$$

$$2^{3x} + 2^x \cdot 3^{2x} > 2 \cdot 3^{3x} \quad \Big| : \left(3^{3x}\right), \ т.к. \ 3^{3x} > 0$$

$$\frac{2^{3x}}{3^{3x}} + \frac{2^x \cdot 3^{2x}}{3^{3x}} > \frac{2 \cdot 3^{3x}}{3^{3x}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x} > 2$$

$$Пусть \ \left(\frac{2}{3}\right)^{x} = t, \ где \ t > 0$$

$$t^3 + t - 2 > 0$$

$$t^3 + t - 2 = t^3 + t - 1 - 1 = t^3 - 1 + t - 1 = (t-1)\left(t^2 + t + 2\right)$$

$$т.к. \ t^2 + t + 2 > 0 \ для \ любых \ t, \ то \ \ t - 1 > 0$$

$$t > 1$$

Показательные неравенства. Примеры

Пример 4

Вернемся к исходной переменной:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x > 1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^0,$$

т.к. $a = \frac{2}{3} < 1$, то ф-ция $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ убывает на R

$$x < 0$$

Ответ: $(-\infty;\ 0)$.

Используемые материалы

1. Алгебра и начала анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для общеобразоват. учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. 2-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2008
2. *http://www.physics.org/* -
3. *http://www.mathematics.ru/courses/algebra/design/index.htm* -
4. *http://www.megabook.ru/index.asp* - Большая энциклопедия Кирилла и Мефодия