Равносильность уравнений

Определение 1. Два уравнения с одной переменной $f(x) = g(x)$ и $p(x) = h(x)$ называют **равносильными**, если множества их корней совпадают.

Например, уравнения $x^2 - 4 = 0$ и $(x + 2)(2^x - 4) = 0$ равносильны, оба они имеют по два корня: 2 и −2. Равносильны и уравнения $x^2 + 1 = 0$ и $\sqrt{x} = -3$, поскольку оба они не имеют корней.

Два уравнения равносильны тогда и только тогда, когда каждое из них является следствием другого.

Этапы решения уравнения

Первый этап — *технический*. На этом этапе осуществляют преобразования по схеме (1) → (2) → (3) → (4) → ... и находят корни последнего (самого простого) уравнения указанной цепочки.

Второй этап — *анализ решения*. На этом этапе, анализируя проведённые преобразования, отвечают на вопрос, все ли они были равносильными.

Третий этап — *проверка*. Если анализ, проведённый на втором этапе, показывает, что некоторые преобразования могли привести к уравнению-следствию, то обязательна проверка всех найденных корней их подстановкой в исходное уравнение.

Теоремы о равносильности уравнений

Теорема 1. ***Если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.***

Теорема 2. ***Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечётную степень, то получится уравнение, равносильное данному.***

Теорема 3. ***Показательное уравнение*** $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ **(где** $a > 0$, $a \neq 1$**)** ***равносильно уравнению*** $f(x) = g(x)$.

Определение 3. **Областью определения уравнения $f(x) = g(x)$ или областью допустимых значений переменной (ОДЗ) называют множество тех значений переменной x, при которых одновременно имеют смысл выражения $f(x)$ и $g(x)$.**

Теорема 4. ***Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, которое:***

а) ***имеет смысл всюду в области определения (в области допустимых значений) уравнения $f(x) = g(x)$;***

б) ***нигде в этой области не обращается в 0,***

то получится уравнение $f(x)h(x) = g(x)h(x)$, равносильное данному в его ОДЗ.

Следствием теоремы 4 является ещё одно «спокойное» утверждение: *если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.*

Теорема 5. ***Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ неотрицательны в ОДЗ уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же чётную степень n получится уравнение $(f(x))^n = (g(x))^n$, равносильное данному в его ОДЗ.***

Теорема 6. ***Пусть $a > 0$ и $a \neq 1$, X — решение системы неравенств*** $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$ ***Тогда уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно на множестве X уравнению $f(x) = g(x)$.***

Перечислим наиболее часто встречающиеся *причины расширения области определения уравнения*.

1. Освобождение в процессе решения уравнения от знаменателей, содержащих переменную величину.

2. Освобождение в процессе решения уравнения от знаков корней чётной степени.

3. Освобождение в процессе решения уравнения от знаков логарифмов.

Подведём итоги. Исходное уравнение преобразуется в процессе решения в уравнение-следствие, а значит, *обязательна проверка всех найденных корней*, если:

1) произошло расширение области определения уравнения;

2) осуществлялось возведение обеих частей уравнения в одну и ту же чётную степень;

3) выполнялось умножение обеих частей уравнения на одно и то же выражение с переменной (разумеется, имеющее смысл во всей области определения уравнения).

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{2x+5} + \sqrt{5x-6} = 5.$

Решение. Первый этап — *технический*. На этом этапе, как мы отмечали выше, осуществляют преобразования заданного уравнения по схеме (1) → (2) → (3) → (4) → ... и находят корни последнего (самого простого) уравнения указанной цепочки.

Третий этап — *проверка*. Подставим поочерёдно каждое из найденных значений переменной в исходное уравнение.

Если $x = 2$, то получаем $\sqrt{2 \cdot 2 + 5} + \sqrt{5 \cdot 2 - 6} = 5$, т. е. $3 + 2 = 5$ — верное равенство.

Если $x = 44\frac{2}{9}$, то получаем $\sqrt{2 \cdot 44\frac{2}{9} + 5} + \sqrt{5 \cdot 44\frac{2}{9} - 6} = 5.$

Пример 2. Решить уравнение

$$\ln(x+4)+\ln(2x+3)=\ln(1-2x).$$

Решение. Первый этап. Воспользуемся правилом «сумма логарифмов равна логарифму произведения». Оно позволяет заменить выражение $\ln(x+4)+\ln(2x+3)$ выражением $\ln(x+4)(2x+3)$. Тогда заданное уравнение можно переписать в виде:

Третий этап. Поскольку, кроме расширения ОДЗ уравнения, никаких других неравносильных преобразований в процессе решения уравнения не было, проверку можно выполнить по ОДЗ исходного уравнения. Она задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} x+4>0, \\ 2x+3>0, \\ 1-2x>0. \end{cases}$$

Пример 4. Решить уравнение $\log_{x+4}(x^2-1)=\log_{x+4}(5-x)$.

Решение. Потенцируя, получаем:

$$x^2-1=5-x;$$

$$x^2+x-6=0;$$

$$x_1=2,\quad x_2=-3.$$

Для проверки выпишем условия, задающие ОДЗ:

$$\begin{cases} x+4>0, \\ x+4\neq 1, \\ x^2-1>0, \\ 5-x>0. \end{cases}$$

Значение $x=2$ удовлетворяет всем условиям этой системы, а значение $x=-3$ не удовлетворяет второму условию; следовательно, $x=-3$ — посторонний корень.

Ответ: 2.

О потере корней

Укажем две *причины потери корней при решении уравнений*:

1) деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение $h(x)$ (кроме тех случаев, когда точно известно, что всюду в области определения уравнения выполняется условие $h(x) \neq 0$);

2) сужение ОДЗ в процессе решения уравнения.

$\sqrt{7x + 3} = x;$

$\log_2 (x - 1) - \log_2 x = 0;$

$\sqrt{3x - 5} = \sqrt{9 - 7x};$ б) $\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{1 - x^2} = 4.$

$\lg (x^2 - 9) + \lg (4 - x^2) = 1;$

$\lg (x^2 - 3x) - \lg (2x - x^2) = 0{,}5.$

$\log_3 (x^2 - 10x + 40) = \log_3 (4x - 8);$

$\log_{0,8} (9x - 4x^2) = \log_{0,8} (x^3 + 4x^2);$

Решите уравнение:

.11. а) $\sqrt{7x - 6} = x$;

б) $x + 3 = \sqrt{2x + 9}$;

в) $\sqrt{6x - 11} = x - 1$;

г) $-x - 5 = \sqrt{7x + 23}$.

.12. а) $\sqrt{x^4 - 3x - 1} = x^2 - 1$;

б) $\sqrt{x^4 - 3x - 1} = 1 - x^2$;

в) $\sqrt{x^4 + x - 9} = 1 - x^2$;

г) $\sqrt{x^4 + x - 9} = x^2 - 1$.

.13. а) $\sqrt{x^4 - 5x^2 - 2{,}5x} = 5 - x^2$;

б) $\sqrt{x^4 - 5x^2 - 2{,}5x} = x^2 - 5$;

в) $\sqrt{x^4 - 3x^2 - 1{,}5x} = x^2 - 3$;

г) $\sqrt{x^4 - 3x^2 - 1{,}5x} = 3 - x^2$.