

КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО КОРНИ.

Выполнила учитель математики Федорова Тамара Васильевна

СОДЕРЖАНИЕ

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ
- НЕПОЛНЫЕ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ
- РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫДЕЛЕНИЕМ
КВАДРАТА ДВУЧЛЕНА
- ФОРМУЛА КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ
- ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНОГО
УРАВНЕНИЯ
- РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ
- ТЕОРЕМА ВИЕТА

Определение квадратного уравнения

Квадратное уравнение – уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x – переменная, a , b и c – некоторые числа, причем $a \neq 0$

НЕПОЛНЫЕ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Неполное квадратное уравнение – если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю

Неполные квадратные уравнения бывают трех видов:

1) $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$

2) $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$

3) $ax^2 = 0$

1) $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$

а) $3x(2x + 3) = 2x(x + 4,5) + 2$

$$6x^2 + 9x = 2x^2 + 9x + 2$$

$$6x^2 + 9x - 2x^2 - 9x - 2 = 0$$

$$4x^2 - 2 = 0$$

$$4x^2 = 2$$

$$x^2 = \frac{2}{4}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = -\frac{1}{2}$$

Ответ: $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = -\frac{1}{2}$

б) $4x^2 - 3 = 0$

$$4x^2 = 3$$

$$x^2 = \frac{3}{4}$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{3}{4}}; x_2 = -\sqrt{\frac{3}{4}}$$

Ответ: $x_1 = \sqrt{\frac{3}{4}}; x_2 = -\sqrt{\frac{3}{4}}$

$$2) ax^2 + bx = 0, \text{ где } b \neq 0$$

$$a) 2x^2 = 3x$$

$$2x^2 - 3x = 0$$

$$x(x - 3) = 0$$

$$x = 0$$

или

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

Ответ : $x_1 = 0; x_2 = 3$

$$б) 3 - (4x + 1)(3 - x) = x^2$$

$$3 - (12x - 4x^2 + 3 - x) - x^2 = 0$$

$$3 - (11x + 3 - 4x^2) - x^2 = 0$$

$$3 - 11x - 3 + 4x^2 - x^2 = 0$$

$$3x^2 - 11x = 0$$

$$x(3x - 11) = 0$$

$$x = 0 \text{ или } 3x - 11 = 0$$

$$3x = 11$$

$$x = \frac{11}{3}$$

$$x = 3\frac{2}{3}$$

Ответ : $x_1 = 0; x_2 = 3\frac{2}{3}$

$$3) ax^2 = 0$$

$$a) 4x^2 = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Ответ : $x = 0$

$$б) \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x = 0$$

$$x\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\right) = 0$$

$$x = 0 \text{ или } \frac{1}{3}x + \frac{1}{9} = 0$$

$$\frac{1}{3}x = -\frac{1}{9}$$

$$x = -\frac{1}{9} : \frac{1}{3}$$

$$x = -\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{1}$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

Ответ : $x_1 = 0; x_2 = \frac{1}{3}$

Решение квадратных уравнений выделением квадрата двучлена

Пример 1.

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 - 6x + 5 = x^2 - 2x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 5 = (x-3)^2 - 4$$

$$(x-3)^2 - 4 = 0 \quad (2)$$

$$(x-3)^2 = 4 \quad (3)$$

$$x-3 = -2 \text{ или } x-3 = 2$$

$$x = 1 \text{ или } x = 5$$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 5$

Пример 2.

$$x^2 + 8x - 1 = 0$$

$$x^2 + 8x - 1 = x^2 + 2x \cdot 4 + 16 - 16 - 1 = (x+4)^2 - 17$$

$$(x+4)^2 - 17 = 0$$

$$x+4 = -\sqrt{17} \text{ или } x+4 = \sqrt{17}$$

$$x = -4 - \sqrt{17} \text{ или } x = -4 + \sqrt{17}$$

Ответ: $x_1 = -4 - \sqrt{17}, x_2 = -4 + \sqrt{17}$

Пример 3.

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

$$x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = 0$$

$$x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = x^2 - 2x \cdot \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{2}{3} = \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{49}{36}$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{49}{36} = 0$$

$$x - \frac{5}{6} = -\frac{7}{6} \text{ или } x - \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$$

$$x = -\frac{1}{3} \text{ или } x = 2$$

$$\text{Ответ: } x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 2$$

Пример 4.

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 = 0$$

$$x^2 - 6x + 10 = 0$$

$$(x - 3)^2 + 1 = 0$$

$$(x - 3)^2 = -1$$

Ответ: уравнение не имеет корней

ФОРМУЛА КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

*1-ая формула
квадратного уравнения*

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Общая формула квадратного уравнения

$$ax + kx^2 + c = 0$$

2-ая формула квадратного уравнения

$$D_1 = k^2 - ac$$

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D}}{a}$$

РЕШЕНИЕ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ ПО 1-ОЙ ФОРМУЛЕ

При решении квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ по формуле (1) целесообразно поступать следующим образом:

- *Вычислить дискриминант и сравнить его с нулем*
- *Если $d > 0$ или $d = 0$, то воспользоваться формулой корней, если $d < 0$, то записать, что корней нет*

1) ЕСЛИ $D = 0$

Пример 1. $y^2 - 10y + 25 = 0$

$$D = b^2 - 4ac = 100 - 4 \cdot 1 \cdot 25 + 100 - 100 = 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{10 + \sqrt{0}}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Ответ: $x = 5$

Пример 2. $y^2 + 8y + 16 = 0$

$$D = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-8 + 0}{2 \cdot 1} = \frac{-8}{2} = -4$$

Ответ: $x = -4$

2) ЕСЛИ $D < 0$

Пример 1.

$$-\frac{5}{7}t^2 + \frac{2}{14}t - \frac{3}{7} = 0 \mid \div (-7)$$

$$5t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3 = 16 - 60 \\ = -44 < 0$$

Ответ: корней нет

Пример 2. $a + 3a^2 = -11$

$$3a^2 + a + 11 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 11 = 1 - 132 = -131$$

Ответ: нет корней.

3) Если $D > 0$

Пример 1. $-20 = 2d(5 - d)$

$$-20 = 20d - 4d^2$$

$$4d^2 - 5d - 5 = 0$$

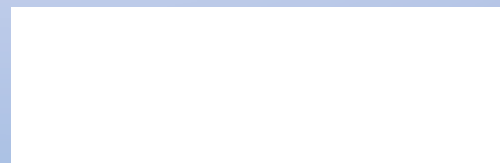
$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 25 + 20 = 45$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{20 + \sqrt{45}}{8} = \frac{20 + \sqrt{5 \cdot 9}}{8} = \frac{20 + 3\sqrt{5}}{8}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{20 - \sqrt{45}}{8} = \frac{20 - \sqrt{5 \cdot 9}}{8} = \frac{20 - 3\sqrt{5}}{8}$$

ОТВЕТ:

$$x_1 = \frac{20 + 3\sqrt{5}}{8}$$



Пример 2. $-15 = 3t(2 - t)$

$$-15 = 6t - 3t^2$$

$$3t^2 - 6t - 15 = 0 \quad | : 3$$

$$t^2 - 2t - 5 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = -2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 4 + 20 = 24$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{24}}{2 \cdot 1} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{24}}{2 \cdot 1} = \frac{2 - \sqrt{24}}{2}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{2 + \sqrt{24}}{2}, x_2 = \frac{2 - \sqrt{24}}{2}$$

РЕШЕНИЕ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ ПО 2-ОЙ ФОРМУЛЕ

- ЕСЛИ $D > 0$, ТО КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ ИМЕЕТ 2 КОРНЯ
- ЕСЛИ $D = 0$, ТО КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ ИМЕЕТ 1 КОРЕНЬ
- ЕСЛИ $D < 0$, ТО КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ НЕ ИМЕЕТ КОРНЕЙ

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ

Пример 1

$$10t = 5(t^2 - 4)$$

Решение:

$$10t = 5t^2 - 20$$

$$5t^2 - 10t - 20 = 0 \quad | : 5$$

$$t^2 - 2t - 4 = 0$$

$$D_1 = k^2 - ac = (-1)^2 - 1 \cdot (-4) = 1 + 4 = 5 \quad D > 0$$

$$x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{5}}{1} = 1 + \sqrt{5}$$

$$x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{5}}{1} = 1 - \sqrt{5}$$

Ответ:

$$x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{5}}{1} = 1 + \sqrt{5}$$

$$x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{5}}{1} = 1 - \sqrt{5}$$

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ

Пример 2:

$$x^2 - 10x - 39 =$$

⁰
Решение:

$$D_1 = k^2 - ac = (-5)^2 - 1 * (-39) = 25 + 39 = 64 \quad D > 0$$

$$x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{64}}{1} = \frac{5 + 8}{1} = 13$$

$$x_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{64}}{1} = \frac{5 - 8}{1} = -3$$

Ответ: $x_1 = 13$ $x_2 = -3$

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ:

Пример 3:

$$9y^2 + 6y + 1 = 0$$

Решени

е:

$$D_1 = k^2 - ac = 3^2 - 9 \cdot 1 = 0 \quad D = 0$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{0}}{9} = \frac{-3 + 0}{9} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

Ответ: $x_1 = -\frac{1}{3}$

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ:

Пример

4:
 $8y^2 + 4y + 0,5 = 0$

РЕШЕНИЕ:

$$D_1 = K^2 - AC = 2^2 - 8 * 0,5 = 4 - 4 = 0 \quad D = 0$$

$$x_1 = \frac{-2 + 0}{8} = \frac{-2 + 0}{8} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

Ответ: $x_1 = -\frac{1}{4}$

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ:

Пример 5:

$$x^2 - 3x + 5 = 0$$

РЕШЕНИЕ:

$$x^2 - 3x + 5 = 0 \quad | \cdot 2$$

$$x^2 - 6x + 10 = 0$$

$$D_1 = K^2 - AC = (-3)^2 - 1 \cdot 10 = 9 - 10 = -1 \quad D < 0$$

Ответ: корней нет.

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ:

Пример 6:

$$36y^2 - 12y + 1 = 0$$

РЕШЕНИЕ:

$$36Y^2 - 12Y + 1 = 0 \quad | :6$$

$$6Y^2 - 2Y + 1 = 0$$

$$D_1 = K^2 - AC = (-1)^2 - 6 * 1 = 1 - 6 = -5 \quad D < 0$$

ОТВЕТ: КОРНЕЙ НЕТ.

Решение задач с помощью квадратных уравнений

РЕШИТЕ ЗАДАЧУ

- 1) Одно из двух натуральных чисел меньше другого на 6. Найдите эти числа, если их произведение равно 27.

РЕШЕНИЕ:

Пусть x одно из двух натуральных чисел, тогда:

$$x^2 - 6x - 27 = 0$$

$$D_1 = K^2 - AC = (-3)^2 - 1 * (-27) = 9 + 27 = 36 \quad D > 0$$

$$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{36}}{1} = \frac{3 + 6}{1} = \frac{9}{1} = 9$$

$$x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{36}}{1} = \frac{3 - 6}{1} = \frac{-3}{1} = -3$$

ОТВЕТ: $x_1 = 9$

$$x_2 = -3$$

РЕШИТЕ ЗАДАЧУ

2) ОДНА ИЗ СТОРОН ПРЯМОУГОЛЬНИКА НА 2 СМ МЕНЬШЕ ДРУГОЙ, А ЕГО ДИАГОНАЛЬ РАВНА 10 СМ. НАЙДИТЕ ПЕРИМЕТР ПРЯМОУГОЛЬНИКА.

ДАНО:

ABCD – ПРЯМОУГОЛЬНИК

BD = 10 СМ

НАЙТИ:

P ПРЯМОУГОЛЬНИКА - ?

РЕШЕНИЕ:

Пусть x см первый катет, тогда $x-2$ см второй катет, по теореме Пифагора составляем квадратное уравнение:

$$1) (x-2)^2 + x^2 = 10^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + x^2 = 100$$

$$2x^2 - 4x + 4 = 100$$

$$2x^2 - 4x + 4 - 100 = 0$$

$$2x^2 - 4x - 96 = 0 \quad | :2$$

$$x^2 - 2x - 48 = 0$$

$$D_1 = K^2 - AC = 1 - 1 * (-48) = 1 + 48 = 49$$

$$x_1 = 8 \text{ (см)}$$

$$x_2 = -6 \text{ (не подходит по условию задачи)}$$

$$2) P = 2 * (x-2) + 2x$$

$$P = 2x - 4 + 2x$$

$$P = 4x - 4$$

$$P = 32 - 4$$

$$P = 28 \text{ (см)}$$

Ответ: $P = 28$

см

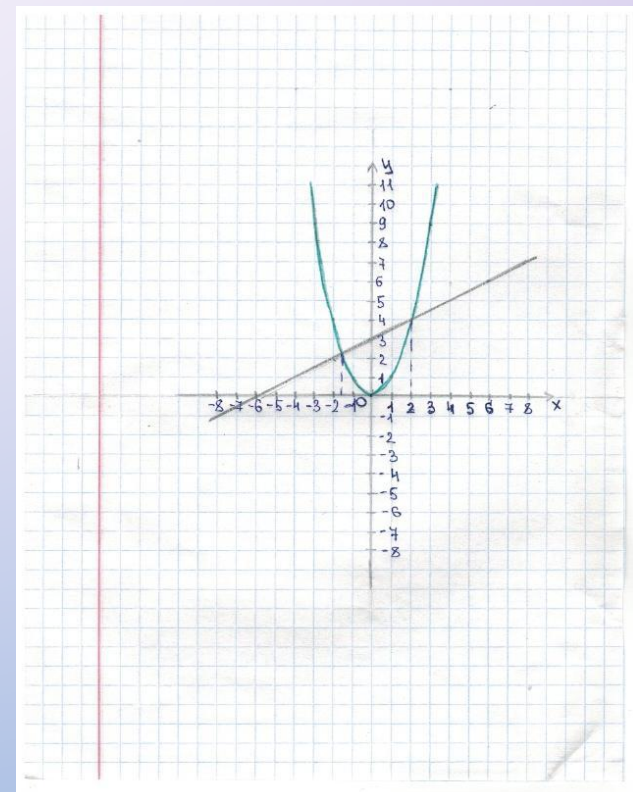
ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$x^2 = 0,5x + 3$$

$$y = x^2$$

$$y = 0,5x + 3$$

ОТВЕТ: $x_1 = -1,5$; $x_2 = 2$



Теорема Виета

Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 + x_2 = -b$$

$$x_1 \cdot x_2 = c$$

Теорема, обратная теореме Виета

Если числа m и n таковы, что их сумма равна $-p$, а произведение равно q , то эти числа являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$

Решите уравнения

$$x^2 + 3x - 18 = 0$$

$$x_1 + x_2 = -3$$

$$x_1 \cdot x_2 = -18$$

$$x_1 = -6$$

$$x_2 = 3$$

$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$x_1 \cdot x_2 = -24$$

$$x_1 = -4$$

$$x_2 = 6$$

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЯ

$$2x^2 - 24x + 40 = 0$$

$$x^2 - 12x + 20 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 12$$

$$x_1 \cdot x_2 = 20$$

$$x_1 = 10$$

$$x_2 = 2$$

$$2x^2 - 14x + 24 = 0$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 12$$

$$x_1 \cdot x_2 = 7$$

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = 3$$

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЯ

$$2y^2 - 2y + \frac{1}{2} = 0$$

$$y^2 - y + \frac{1}{4} = 0$$

$$y_1 + y_2 = 1$$

$$y_1 \cdot y_2 = \frac{1}{4}$$

$$y_1 = y_2 = \frac{1}{2}$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = -1$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЯ

$$x(x + 1) = 20$$

$$x^2 + x - 20 = 0$$

$$x_1 + x_2 = -1$$

$$x_1 \cdot x_2 = -20$$

$$x_1 = -5$$

$$x_2 = 4$$

$$x(x - 3) - 10 = 0$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$x_1 \cdot x_2 = -10$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -2$$

Один из корней данного уравнения равен 4.
Найдите второй корень и число a :

$$x^2 - ax - 8 = 0$$

$$x^2 - ax - 8 = 0$$

$$4 + x_2 = a$$

$$4x_2 = -8$$

$$4 + (-2) = 2$$

$$x_2 = -2$$

$$a = 2$$

С помощью теоремы, обратной теореме Виета, проверим, являются ли числа $x_1 = \frac{2 + \sqrt{20}}{2}$ и $x_2 = \frac{2 - \sqrt{20}}{2}$ корнями данного уравнения

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$\frac{2 + \sqrt{20}}{2} + \frac{2 - \sqrt{20}}{2}$$

$$\frac{2 + \sqrt{20} + 2 - \sqrt{20}}{2}$$

$$\frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{2 + \sqrt{20}}{2} \cdot \frac{2 - \sqrt{20}}{2}$$

$$\frac{(2 + \sqrt{20})(2 - \sqrt{20})}{4}$$

$$\frac{4 - 20}{4} = -\frac{16}{4} = -4$$

В уравнении $x^2 + px - 35 = 0$ один из корней равен 7.

Найдите другой корень и коэффициент p .

$$x_1 \cdot x_2 = -35$$

$$x_1 = 7$$

$$7 \cdot x_2 = -35$$

$$x_2 = -\frac{35}{7}$$

$$x_2 = -5$$

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$7 + (-5) = 2$$

$$p = -2$$

ОДИН ИЗ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ $x^2 - 13x + q = 0$
РАВЕН 12,5.

○ НАЙДИТЕ ДРУГОЙ КОРЕНЬ И КОЭФФИЦИЕНТ q .

$$x_1 = 12,5$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

$$x_1 + x_2 = 13$$

$$12,5 \cdot 0,5 = 6,25$$

$$12,5 + x_2 = 13$$

$$q = 6,25$$

$$x_2 = 13 - 12,5$$

$$x_2 = 0,5$$

РАЗНОСТЬ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ
 $x^2 - 12x + q = 0$ РАВНА 2. НАЙДИТЕ Q

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 12 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 12 - x_2 \\ 12 - x_2 - x_2 = 2 \end{cases}$$

$$12 - 2x_2 = 2$$

$$2x_2 = 10$$

$$x_2 = 5$$

$$x_1 = 12 - 5 = 7$$

$$q = 5 \cdot 7 = 35$$

РАЗНОСТЬ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

$x^2 + x + c = 0$ РАВНА 6. НАЙДИТЕ С

$$x_1 \cdot x_2 = c$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 - x_2 = 6 \end{cases}$$

$$x_1 = -1 - x_2$$

$$-1 - x_2 - x_2 = 6$$

$$-2x_2 = 6 + 1$$

$$x_2 = -\frac{7}{2}$$

$$x_1 = -1 + \frac{7}{2} = \frac{5}{2}$$

$$c = -\frac{7 \cdot 5}{2 \cdot 2} = -\frac{35}{4} = -8\frac{3}{4}$$

Над презентацией работали ученики 8 «А» класса



Федорова Ксения,
Румянцева Елена,
Алексеева Лиза,
Детинова Елена,
Афанасьева Марина,
Гаптулина Марсела,
Булатова Юля,
Ямбаршев Витя, Куклин
Дима, Чемеков Максим.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!