КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО КОРНИ.

Выполнила учитель математики Федорова Тамара Васильевна

Содержание

- Определение квадратного уравнения
- Неполные квадратные уравнения
- Решение квадратных уравнений выделением квадрата двучлена
- Формула корней квадратного уравнения
- Графический способ решения квадратного уравнения
- Решение задач с помощью квадратных уравнений
- Теорема Виета

Определение квадратного уравнения

Квадратное уравнение – уравнение вида
$ax^2 + bx + c = 0$, *где* x *– переменная,*
a, b *и* c *– некоторые числа, причем* $a \neq 0$

НЕПОЛНЫЕ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Неполное квадратное уравнение – если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю

Неполные квадратные уравнения бывают трех видов:

1) $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$

$2ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$

3) ax^2) = 0

1) $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$

а) $3x(2x+3) = 2x(x+4{,}5) + 2$

$$6x^2 + 9\text{x} = 2x^2 + 9\text{x} + 2$$

$$6x^2 + 9\text{x} - 2x^2 - 9\text{x} - 2 = 0$$

$$4x^2 - 2 = 0$$

$$4x^2 = 2$$

$$x^2 = \frac{2}{4}$$

$$x_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = -\frac{1}{2}$$

Ответ: $x_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = -\frac{1}{2}$

б) $4x^2 - 3 = 0$

$$4x^2 = 3$$

$$x^2 = \frac{3}{4}$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{3}{4}};\ x_2 = -\sqrt{\frac{3}{4}}$$

Ответ: $x_1 = \sqrt{\frac{3}{4}};\ x_2 = -\sqrt{\frac{3}{4}}$

2) $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$

а) $2x^2 = 3x$

$2x^2 - 3x = 0$

$x(x-3) = 0$

$x = 0$

$или$

$x - 3 = 0$

$x = 3$

$Ответ: x_1 = 0; x_2 = 3$

б) $3 - (4x+1)(3-x) = x^2$

$3 - (12x - 4x^2 + 3 - x) - x^2 = 0$

$3 - (11x + 3 - 4x^2) - x^2 = 0$

$3 - 11x - 3 + 4x^2 - x^2 = 0$

$3x^2 - 11x = 0$

$x(3x - 11) = 0$

$x = 0 или 3x - 11 = 0$

$3x = 11$

$x = \frac{11}{3}$

$x = 3\frac{2}{3}$

$Ответ: x_1 = 0; x_2 = 3\frac{2}{3}$

3) $ax^2 = 0$

а) $4x^2 = 0$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

$$Ответ: x = 0$$

б) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x = 0$

$$x(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}) = 0$$

$$x = 0 \text{или} \frac{1}{3}x + \frac{1}{9} = 0$$

$$\frac{1}{3}x = -\frac{1}{9}$$

$$x = -\frac{1}{9} : \frac{1}{3}$$

$$x = -\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{1}$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

$$Ответ: x_1 = 0; x_2 = \frac{1}{3}$$

Решение квадратных уравнений выделением квадрата двучлена

Пример 1.

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \qquad (1)$$

$$x^2 - 6x + 5 = x^2 - 2x*3 + 3^2 - 3^2 + 5 = (x - 3)^2 - 4$$

$$(x - 3)^2 - 4 = 0 \qquad (2)$$

$$(x - 3)^2 = 4 \qquad (3)$$

$$x - 3 = -2 \text{ или } x - 3 = 2$$

$$x = 1 \text{ или } x = 5$$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 5$

Пример 2. $x^2 + 8x - 1 = 0$

$$x^2 + 8x - 1 = x^2 + 2x*4 + 16 - 16 - 1 = (x + 4)^2 - 17$$

$$(x + 4)^2 - 17 = 0$$

$x + 4 = -\sqrt{17}$ или $x + 4 = \sqrt{17}$

$x = -4 - \sqrt{17}$ или $x = -4 + \sqrt{17}$

Ответ: $x_1 = -4 - \sqrt{17}$, $x_2 = -4 + \sqrt{17}$

Пример 3.

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

$$x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = 0$$

$$x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = x^2 - 2x * \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{2}{3} = (x - \frac{5}{6})^2 - \frac{49}{36}$$

$$(x - \frac{5}{6})^2 - \frac{49}{36} = 0$$

$$x - \frac{5}{6} = -\frac{7}{6} \text{ или } x - \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$$

$$x = -\frac{1}{3} \text{ или } x = 2$$

Ответ: $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 2$

Пример 4.

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 = 0$$

$$x^2 - 6x + 10 = 0$$

$$(x-3)^2 + 1 = 0$$

$$(x-3)^2 = -1$$

Ответ: уравнение не имеет корней

ФОРМУЛА КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Общая формула квадратного уравнения

$$\mathbf{ax+kx^2+c = 0}$$

1-ая формула квадратного уравнения

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

2-ая формула квадратного уравнения

$$D_1 = k^2\text{-}ac$$

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D}}{a}$$

РЕШЕНИЕ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ ПО 1-ОЙ ФОРМУЛЕ

При решении квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ по формуле (1) целесообразно поступать следующим образом:

- *Вычислить дискриминант и сравнить его с нулем*
- *Если $d > 0$ или $d = 0$, то воспользоваться формулой корней, если $d < 0$, то записать, что корней нет*

1) ЕСЛИ D = 0

Пример 1. $y^2 - 10y + 25 = 0$

$$D = b^2 - 4ac = 100 - 4 \cdot 1 \cdot 25 + 100 - 100 = 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{10 + \sqrt{0}}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Ответ: $x = 5$

Пример 2. $y^2 + 8y + 16 = 0$

$$D = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-8 + 0}{2 \cdot 1} = \frac{-8}{2} = -4$$

Ответ: x = - 4

2)ЕСЛИ D < 0

Пример 1.

$$-\frac{5}{7}t^2 + \frac{2}{14}t - \frac{3}{7} = 0 \mid \div (-7)$$

$$5t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3 = 16 - 60 = -44 < 0$$

Ответ: корней нет

Пример 2. $a + 3a^2 = -11$

$$3a^2 + a + 11 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 11 = 1 - 132 = -131$$

Ответ: нет корней.

3)Если$D > 0$

Пример 1. $-20 = 2d(5 - d)$

$$-20 = 20d - 4d^2$$

$$4d^2 - 5d - 5 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 25 + 20 = 45$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{20 + \sqrt{45}}{8} = \frac{20 + \sqrt{5 \cdot 9}}{8} = \frac{20 + 3\sqrt{5}}{8}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{20 - \sqrt{45}}{8} = \frac{20 - \sqrt{5 \cdot 9}}{8} = \frac{20 - 3\sqrt{5}}{8}$$

ОТВЕТ: $x_1 = \frac{20 + 3\sqrt{5}}{8}$

Пример 2. $-15 = 3t(2-t)$

$$-15 = 6t - 3t^2$$

$$3t^2 - 6t - 15 = 0 \mid :3$$

$$t^2 - 2t - 5 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = -2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 4 + 20 = 24$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{24}}{2 \cdot 1} = 2$$

$$x^2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{24}}{2 \cdot 1} = \frac{2 - \sqrt{24}}{2}$$

$$\text{Ответ}: x_1 = \frac{2 + \sqrt{24}}{2}, x_2 = \frac{2 - \sqrt{24}}{2}$$

РЕШЕНИЕ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ ПО 2-ОЙ ФОРМУЛЕ

- ЕСЛИ D>0, ТО КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ ИМЕЕТ 2 КОРНЯ
- ЕСЛИ D=0, ТО КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ ИМЕЕТ 1 КОРЕНЬ
- ЕСЛИ D<0, ТО КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ НЕ ИМЕЕТ КОРНЕЙ

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ

Пример 1

$10t = 5(t^2-4)$

Решение:

$10t = 5t^2-20$

$5t^2-10t-20 = 0 \quad |:5$

$t^2-2t-4 = 0$

$D_1 = k^2-ac = (-1)^2- 1*(-4) = 1+4 = 5 \quad D>0$

$$x_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{5}}{1} = 1+\sqrt{5}$$

$$x_2 = \frac{-(-1)-\sqrt{5}}{1} = 1-\sqrt{5}$$

Ответ:

$$x_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{5}}{1} = 1+\sqrt{5}$$

$$x_2 = \frac{-(-1)-\sqrt{5}}{1} = 1-\sqrt{5}$$

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ

Пример 2:

X^2-10x-39 = 0

Решение:

$D_1 = k^2 - ac = (-5)^2 - 1*(-39) = 25+39 = 64$ $D>0$

$$x_1 = \frac{-(-5)+\sqrt{64}}{1} = \frac{5+8}{1} = 13$$

$$x_2 = \frac{-(-5)-\sqrt{64}}{1} = \frac{5-8}{1} = -3$$

Ответ: $x_1 = 13$ $x_2 = -3$

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ:

Пример 3:

$9y^2+6y+1 = 0$

Решение:

$D_1 = k^2 - ac = 3^2 - 9*1 = 0 \quad D = 0$

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{0}}{9} = \frac{-3+0}{9} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

Ответ: $x_1 = -\frac{1}{3}$

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ:

Пример 4: $8y^2+4y+0{,}5 = 0$

РЕШЕНИЕ:

$D_1 = K^2 - AC = 2^2 - 8*0{,}5 = 4-4 = 0$ $D = 0$

$$x_1 = \frac{-2+0}{8} = \frac{-2+0}{8} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

Ответ: $x_1 = -\frac{1}{4}$

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ:

Пример 5:
x^2-3x+5 = 0

РЕШЕНИЕ:

X^2-3X+5 = 0 |•2

X^2-6X+10 = 0

$D_1 = K^2 - AC = (-3)^2 - 1*10 = 9-10 = -1$ $D<0$

Ответ: корней нет.

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ:

Пример 6:
$36y^2-12y+1 = 0$

РЕШЕНИЕ:

$36Y^2-12Y+1 = 0 \quad |:6$

$6Y^2-2Y+1 = 0$

$D_1 = K^2-AC = (-1)^2-6*1 = 1-6 = -5 \qquad D<0$

ОТВЕТ: КОРНЕЙ НЕТ.

Решение задач с помощью квадратных уравнений

РЕШИТЕ ЗАДАЧУ

1) Одно из двух натуральных чисел меньше другого на 6. Найдите эти числа, если их произведение равно 27.

РЕШЕНИЕ:

Пусть *x* одно из двух натуральных чисел, тогда:

$X^2-6X-27 = 0$

$D_1 = K^2-AC = (-3)^2-1*(-27) = 9+27 = 36 \quad D>0$

$X_1 = \frac{-(-3)+\sqrt{36}}{1} = \frac{3+6}{1} = \frac{9}{1} = 9$

$X_2 = \frac{-(-3)-\sqrt{36}}{1} = \frac{3-6}{1} = \frac{-3}{1} = -3$

ОТВЕТ: $X_1 = 9$

$X_2 = -3$

РЕШИТЕ ЗАДАЧУ

2) ОДНА ИХ СТОРОН ПРЯМОУГОЛЬНИКА НА 2 СМ МЕНЬШЕ ДРУГОЙ, А ЕГО ДИАГОНАЛЬ РАВНА 10 СМ. НАЙДИТЕ ПЕРИМЕТР ПРЯМОУГОЛЬНИКА.

ДАНО:

ABCD – ПРЯМОУГОЛЬНИК
BD = 10 СМ

НАЙТИ:
P ПРЯМОУГОЛЬНИКА - ?

РЕШЕНИЕ:

- Пусть *x* см первый катет, тогда *x-2* см второй катет, по теореме Пифагора составляем квадратное уравнение:

1) $(X-2)^2+X^2 = 10^2$

$X^2-4X+4+X^2 = 100$

$2X^2-4X+4 = 100$

$2X^2-4X+4-100 = 0$

$2X^2-4X-96 = 0 \quad |:2$

$X^2-2X-48 = 0$

$D_1 = K^2-AC = 1-1*(-48) = 1+48 = 49$

$X_1 = 8$ (см)

$X_2 = -6$ (не подходит по условию задачи)

2) $P = 2*(X-2)+2X$

$P = 2X-4+2X$

$P = 4X-4$

$P = 32-4$

$P = 28$ (см)

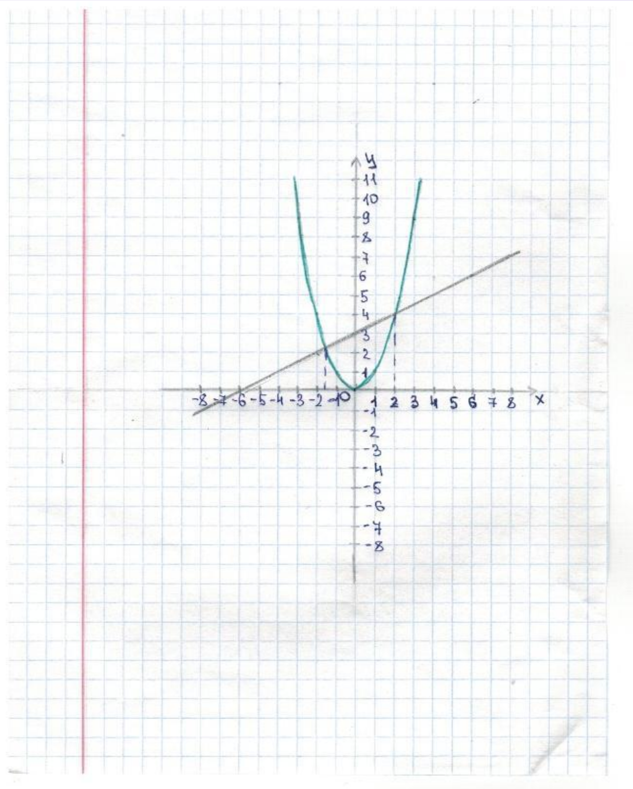
Ответ: P = 28 см

ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$x^2 = 0{,}5x + 3$$

$$y = x^2$$

$$y = 0{,}5x + 3$$



ОТВЕТ: $x_1 = -1{,}5$; $x_2 = 2$

Теорема Виета

Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 + x_2 = -b$$

$$x_1 \cdot x_2 = c$$

Теорема, обратная теореме Виета

Если числа m и n таковы, что их сумма равна $-p$, а произведение равно q, то эти числа являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$

Решите уравнения

$$x^2 + 3x - 18 = 0$$
$$x_1 + x_2 = -3$$
$$x_1 \cdot x_2 = -18$$
$$x_1 = -6$$
$$x_2 = 3$$

$$x^2 - 2x - 24 = 0$$
$$x_1 + x_2 = 2$$
$$x_1 \cdot x_2 = -24$$
$$x_1 = -4$$
$$x_2 = 6$$

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЯ

$$2x^2 - 24x + 40 = 0$$
$$x^2 - 12x + 20 = 0$$
$$x_1 + x_2 = 12$$
$$x_1 \cdot x_2 = 20$$
$$x_1 = 10$$
$$x_2 = 2$$

$$2x^2 - 14x + 24 = 0$$
$$x^2 - 7x + 12 = 0$$
$$x_1 + x_2 = 12$$
$$x_1 \cdot x_2 = 7$$
$$x_1 = 4$$
$$x_2 = 3$$

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЯ

$$2y^2 - 2y + \frac{1}{2} = 0$$

$$y^2 - y + \frac{1}{4} = 0$$

$$y_1 + y_2 = 1$$

$$y_1 \cdot y_2 = \frac{1}{4}$$

$$y_1 = y_2 = \frac{1}{2}$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = -1$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЯ

$$x(x+1)=20$$
$$x^2+x-20=0$$
$$x_1+x_2=-1$$
$$x_1\cdot x_2=-20$$
$$x_1=-5$$
$$x_2=4$$

$$x(x-3)-10=0$$
$$x^2-3x-10=0$$
$$x_1+x_2=3$$
$$x_1\cdot x_2=-10$$
$$x_1=5$$
$$x_2=-2$$

Один из корней данного уравнения равен 4. Найдите второй корень и число а :

$$x^2 - ax - 8 = 0$$

$$x^2 - ax - 8 = 0$$

$$4 + x_2 = a$$

$$4x_2 = -8$$

$$4 + (-2) = 2$$

$$x_2 = -2$$

$$a = 2$$

С помощью теоремы, обратной теореме Виета, проверим, являются ли числа $x_1 = \frac{2+\sqrt{20}}{2}$ и $x_2 = \frac{2-\sqrt{20}}{2}$ корнями данного уравнения

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$\frac{2+\sqrt{20}}{2} + \frac{2-\sqrt{20}}{2}$$

$$\frac{2+\sqrt{20}+2-\sqrt{20}}{2}$$

$$\frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{2+\sqrt{20}}{2} \cdot \frac{2-\sqrt{20}}{2}$$

$$\frac{(2+\sqrt{20})(2-\sqrt{20})}{4}$$

$$\frac{4-20}{4} = -\frac{16}{4} = -4$$

В уравнении $x^2 + px - 35 = 0$ один из корней равен 7. Найдите другой корень и коэффициент p.

$$x_1 \cdot x_2 = -35$$
$$x_1 = 7$$
$$7 \cdot x_2 = -35$$
$$x_2 = -\frac{35}{7}$$
$$x_2 = -5$$

$$x_1 + x_2 = -p$$
$$7 + (-5) = 2$$
$$p = -2$$

ОДИН ИЗ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ $x^2 - 13x + q = 0$ РАВЕН 12,5. НАЙДИТЕ ДРУГОЙ КОРЕНЬ И КОЭФФИЦИЕНТ *Q*.

$$x_1 = 12{,}5$$

$$x_1 + x_2 = 13$$

$$12{,}5 + x_2 = 13$$

$$x_2 = 13 - 12{,}5$$

$$x_2 = 0{,}5$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

$$12{,}5 \cdot 0{,}5 = 6{,}25$$

$$q = 6{,}25$$

РАЗНОСТЬ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ $x^2 - 12x + q = 0$ РАВНА 2. НАЙДИТЕ Q

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 12 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 12 - x_2 \\ 12 - x_2 - x_2 = 2 \end{cases}$$

$$12 - 2x_2 = 2$$

$$2x_2 = 10$$

$$x_2 = 5$$

$$x_1 = 12 - 5 = 7$$

$$q = 5 \cdot 7 = 35$$

Разность корней квадратного уравнения $x^2 + x + c = 0$ равна 6. Найдите с

$$x_1 \cdot x_2 = c$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 - x_2 = 6 \end{cases}$$

$$x_1 = -1 - x_2$$

$$-1 - x_2 - x_2 = 6$$

$$-2x_2 = 6 + 1$$

$$x_2 = -\frac{7}{2}$$

$$x_1 = -1 + \frac{7}{2} = \frac{5}{2}$$

$$c = -\frac{7 \cdot 5}{2 \cdot 2} = -\frac{35}{4} = -8\frac{3}{4}$$

Над презентацией работали ученики 8 «А» класса

Федорова Ксения, Румянцева Елена, Алексеева Лиза, Детинова Елена, Афанасьева Марина, Гаптулина Марсела, Булатова Юля, Ямбаршев Витя, Куклин Дима, Чемеков Максим.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!