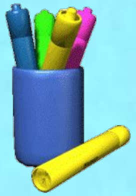
Решение логарифмических и показательных неравенств (15 задание ЕГЭ).



$$5^{-|x-2|} \cdot \log_2(4x - x^2 - 2) = 1$$

На данном уроке рассматривается решение логарифмических и показательных неравенств.

При решении таких неравенств необходимо учитывать ОДЗ и характер монотонности функции.

Виды неравенств и методы их решения.

Простейшие неравенства.
Метод замены переменной.
Однородные показательные неравенства.
Потенцирование.
Логарифмирование.
Метод рационализации (замены множителей).
Метод оценки. Графический метод.

Решите устно неравенства

$\log_2 x \geq 4$ ОТВЕТ

$\log_{\frac{1}{2}} x > -3$ ОТВЕТ

$\log_2 x < \frac{1}{2}$ ОТВЕТ

$\log_{0,1} x < -2$ ОТВЕТ

$2^{x+1} > 4$ ОТВЕТ

$0.4^{-x+3} < 0.16$ ОТВЕТ

$$x \geq 16$$

НАЗАД

$$\begin{cases} x < 8 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{0 < \boldsymbol{x} < 8}$$

НАЗАД

$$\begin{cases} x < \sqrt{2} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{0} < \boldsymbol{x} < \sqrt{\mathbf{2}}$$

НАЗАД

$$x > 100$$

НАЗАД

$$x + 1 > 2$$

$$\boldsymbol{x > 1}$$

НАЗАД

$$-x + 3 > 2$$

$$\boldsymbol{x < 1}$$

НАЗАД

ДАЛЕЕ

Заменить неравенство равносильной ему системой или совокупностью

$$\log_5 x > \log_5(3x-4)$$

ОТВЕТ

$$\log_{0.6}(2x-1) < \log_{0.6} x$$

ОТВЕТ

$$\log_{x^2-3} 729 > 3$$

ОТВЕТ

$$\log_{\frac{x-1}{x-5}} 0.3x > 0$$

ОТВЕТ

$$\begin{cases} x > 3x - 4 \\ x > 0 \\ 3x - 4 > 0 \end{cases}$$

НАЗАД

$$\begin{cases} 2x - 1 > x \\ 2x - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

НАЗАД

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 < x^2 - 3 < 1 \\ 729 < (x^2-3)^3\end{cases} \\ \begin{cases}x^2 - 3 > 1 \\ 729 > (x^2-3)^3\end{cases}\end{array}\right.$$

НАЗАД

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} 0 < \dfrac{x-1}{x-5} < 1 \\ 0 < 0{,}3x < \left(\dfrac{x-1}{x-5}\right)^0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x-1}{x-5} > 1 \\ 0{,}3x > \left(\dfrac{x-1}{x-5}\right)^0 \end{cases}\end{array}\right.$$

ДАЛЕЕ

НАЗАД

Метод рационализации.

Часто, при решении логарифмических неравенств, встречаются задачи с переменным основанием логарифма. Так, неравенство вида

$$\log_{a(x)} b(x) > \log_{a(x)} c(x)$$

является стандартным школьным неравенством. Как правило, для его решения применяется переход к равносильной совокупности систем:

$$\log_{a(x)} b(x) > \log_{a(x)} c(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a(x) < 1 \\ 0 < b(x) < c(x) \end{cases} \\ \begin{cases} a(x) > 1 \\ b(x) > c(x) > 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Метод рационализации.

-

	Выражение F	Выражение G
1 1а 1б	$log_a f - log_a g$ $log_a f - 1$ $log_a f$	$(a-1)(f-g)$ $(a-1)(f-a)$ $(a-1)(f-1)$
2 2а 2б	$log_h f - log_h g$ $log_h - 1$ $log_h f$	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)(f-h)$ $(h-1)(f-1)$
3	$log_f h - log_g h$ $(g \neq 1, f \neq 1)$	$(f-1)(g-1)(h-1)(g-f)$
4 4а	$h^f - h^g\ (h > 0)$ $h^f - 1$	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)f$
5	$f^h - g^h$ $(f > 0, g > 0)$	$(f-g)h$
6	$\|f\| - \|g\|$	$(f-g)(f+g)$

Решите неравенство.

$$\log_x 2 + 3\log_{2x} 2 - 6\log_{4x} 2 \le 0$$

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{3}{1 + \log_2 x} - \frac{6}{2 + \log_2 x} \le 0; \quad \log_2 x = t$$

$$\frac{2(t-2)\left(t + \frac{1}{2}\right)}{t(t+1)(t+2)} \ge 0$$

$$\left[\begin{array}{l} -2 < t < -1 \\ -\frac{1}{2} \le t < 0 \\ t \ge 2 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} -2 < \log_2 x < -1 \\ -\frac{1}{2} \le \log_2 x < 0 \\ \log_2 x \ge 2 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \le x < 1 \\ x \ge 4 \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right) \cup [4; +\infty)$

Решите неравенство.

$$\frac{266-5^{x}-5^{3-x}-2|7-5^{x}|}{118-|7-5^{x}|}\le 2$$

$$\frac{30-5^{x}-5^{3-x}}{118-|7-5^{x}|}\le 0 \qquad |\cdot 5^{x};\, 5^{x}>0$$

$$\frac{-5^{2x}+30\cdot 5^{x}-125}{118-|7-5^{x}|}\le 0$$

Решите неравенство.

$$\frac{(5^x - 5)(5^x - 25)}{|5^x - 7| - 118} \le 0;$$

**Применим
метод
рационализац
ии**

$$\frac{16(x-1)(x-2)}{4(x-3)(5^x + 11)} \le 0$$

Ответ: $x \in (-\infty; 1] \cup [2; 3)$.

Решите неравенство.

$$5^{-|x-2|} \cdot \log_2(4x - x^2 - 2) \geq 1$$

$$\begin{cases} 0 < 5^{-|x-2|} \leq 1 \\ \log_2(4x - x^2 - 2) \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5^{-|x-2|} \cdot \log_2(4x - x^2 - 2) \leq 1 \\ 5^{-|x-2|} \cdot \log_2(4x - x^2 - 2) \geq 1 \end{cases}$$

$$5^{-|x-2|} \cdot \log_2(4x - x^2 - 2) = 1$$

Решите неравенство.

$$5^{-|x-2|} \cdot \log_2(4x - x^2 - 2) = 1$$

$$\begin{cases} 5^{-|x-2|} = 1 \\ \log_2(4x - x^2 - 2) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x - 2| = 0 \\ 2 - (x - 2)^2 = 2 \end{cases} \qquad x = 2$$

Ответ: **2**.

Решите неравенство.

$$\frac{\lg(3x + 2\sqrt{x} - 1)}{\lg(5x + 3\sqrt{x} - 2)^5} \geq \frac{\log_{32} 11}{\log_2 11}$$

$$\frac{\lg(3x + 2\sqrt{x} - 1)}{\lg(5x + 3\sqrt{x} - 2)} \geq 1$$

$$\log_{(5x+3\sqrt{x}-2)}(3x + 2\sqrt{x} - 1) - 1 \geq 0$$

Применим метод рационализации:

Решите неравенство.

$$\begin{cases} (5x+3\sqrt{x}-3)(-2x-\sqrt{x}+1) \geq 0 \\ 3x+2\sqrt{x}-1>0 \\ 5x+3\sqrt{x}-2>0 \end{cases}$$

$$\sqrt{x}=t;\, t \geq 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} \leq t < \dfrac{\sqrt{69}-3}{10} \\ t > \dfrac{1}{3} \\ t > \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

Решите неравенство.

$$\frac{1}{2} \le t < \frac{\sqrt{69}-3}{10}$$

$$\frac{1}{4} \le x < \frac{39-3\sqrt{69}}{50}$$

Ответ: $\left[\frac{1}{4};\ \frac{39-3\sqrt{69}}{50}\right)$

Домашнее задание.

1) $9^x + 2 \cdot 6^x - 3 \cdot 4^x > 0$

2) $2 \cdot 3^{x+2} + 27 \cdot 3^{-x} \leq 87$

3) $\dfrac{-8\log_3 x - 9}{1 - 4\log_3 x} \geq \log_3 x$

4) $\log_{4-x} \dfrac{(x-4)^8}{x+5} \geq 8$

5) $\dfrac{3^{|x^2-2x-1|} - 9}{x} \geq 0$

6) $(\log_2(-\log_2 x))^2 + 2\log_2\left((\log_2 x)^2\right) \leq 5$

ОТВЕТЫ

1) $(0;\ +\infty)$

2) $[-1; 2-\log_3 2]$

3) $\left(0; \sqrt[4]{\dfrac{1}{27}}\right] \cup \left(\sqrt[4]{3}; 27\right]$

4) $[-5; -4] \cup (3; 4)$

5) $[-1; 0) \cup \{1\} \cup [3;\ +\infty)$

6) $\left[\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{\sqrt[32]{2}}\right]$

Всем успехов!

Спасибо за внимание

Список литературы.

1. **Балаян Э.Н.** Тренировочные упражнения по математике для подготовки к ЕГЭ и ОГЭ (профильный уровень) / Э.Н. Балаян. – Ростов н/Д: Феникс, 2016. – 636, [3] с.: ил. – (Большая перемена).
2. **Математика. Подготовка к ЕГЭ 2016. Профильный уровень** / Д.А. Мальцев, А.А. Мальцев, Л.И. Мальцева – Ростов н/Д: Издатель Мальцев Д. А.; Народное образование, 2016. – 188, [1] с.
3. **Алгебра и начала математического анализа. 11 класс.** В 2 ч. Ч. 2 Задачник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / [А.Г. Мордкович и др.]; под ред. А.Г. Мордковича. – 3-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2009. – 269 с. : ил.
4. **Материалы курса «Готовим к ЕГЭ хорошистов и отличников»** : лекции 1-4. – М. : Педагогический университет «Первое сентября», 2012. – 104 с.
5. **Сайт «РЕШУ ЕГЭ. Математика. Обучающая система Дмитрия Гущина».** - http://reshuege.ru/