



Решение логарифмических и показательных неравенств (15 задание ЕГЭ).

$$5^{-|x-2|} \cdot \log_2(4x - x^2 - 2) = 1$$



На данном уроке рассматривается решение логарифмических и показательных неравенств.



*При решении таких неравенств необходимо учитывать **ОДЗ** и характер монотонности функции.*

Виды неравенств и методы их решения.

Простейшие неравенства.

Метод замены переменной.

Однородные показательные неравенства.

Потенцирование.

Логарифмирование.

Метод рационализации (замены множителей).

Метод оценки. Графический метод.

Решите устно неравенства



$$\log_2 x \geq 4$$

[ОТВЕТ](#)

$$\log_{\frac{1}{2}} x > -3$$

[ОТВЕТ](#)

$$\log_2 x < \frac{1}{2}$$

[ОТВЕТ](#)

$$\log_{0,1} x < -2$$

[ОТВ](#)

[ЕТ](#)

$$2^{x+1} > 4$$

[ОТВ](#)

[ЕТ](#)

$$0.4^{-x+3} < 0.16$$

[ОТВЕТ](#)

$$x \geq 16$$

[НАЗАД](#)

$$\begin{cases} x < 8 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$0 < x < 8$$

[НАЗАД](#)

$$\begin{cases} x < \sqrt{2} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$0 < x < \sqrt{2}$$

[НАЗАД](#)

$$x > 100$$

[НАЗАД](#)

$$x + 1 > 2$$

$$x > 1$$

[НАЗАД](#)

$$-x + 3 > 2$$

$$x < 1$$

[НАЗАД](#)
[ДАЛЕЕ](#)

Заменить неравенство равносильной ему системой или совокупностью



$$\log_5 x > \log_5 (3x - 4) \quad \begin{array}{l} \underline{\text{OTB}} \\ \underline{\text{ET}} \end{array}$$

$$\log_{0.6} (2x - 1) < \log_{0.6} x \quad \begin{array}{l} \underline{\text{OTB}} \\ \underline{\text{ET}} \end{array}$$

$$\log_{x^2 - 3} 729 > 3 \quad \begin{array}{l} \underline{\text{OTB}} \\ \underline{\text{ET}} \end{array}$$

$$\log_{\frac{x-1}{x-5}} 0.3x > 0 \quad \begin{array}{l} \underline{\text{OTB}} \\ \underline{\text{ET}} \end{array}$$

$$\begin{cases} x > 3x - 4 \\ x > 0 \\ 3x - 4 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 1 > x \\ 2x - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 0 < x^2 - 3 < 1 \\ 729 < (x^2 - 3)^3 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 3 > 1 \\ 729 > (x^2 - 3)^3 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 0 < \frac{x-1}{x-5} < 1 \\ 0 < 0,3x < \left(\frac{x-1}{x-5}\right)^0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-1}{x-5} > 1 \\ 0,3x > \left(\frac{x-1}{x-5}\right)^0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

[ДАЛЕ](#)
[НАЗАД](#)
[Д](#)

Метод рационализации.



Часто, при решении логарифмических неравенств, встречаются задачи с **переменным основанием** логарифма. Так, неравенство вида

$$\log_{a(x)} b(x) > \log_{a(x)} c(x)$$

является стандартным школьным неравенством. Как правило, для его решения применяется переход к равносильной совокупности систем:

$$\log_{a(x)} b(x) > \log_{a(x)} c(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 < a(x) < 1 \\ 0 < b(x) < c(x) \\ a(x) > 1 \\ b(x) > c(x) > 0 \end{cases}$$

Метод рационализации.



	Выражение F	Выражение G
1	$\log_a f - \log_a g$	$(a - 1)(f - g)$
1a	$\log_a f - 1$	$(a - 1)(f - a)$
1б	$\log_a f$	$(a - 1)(f - 1)$
2	$\log_h f - \log_h g$	$(h - 1)(f - g)$
2a	$\log_h - 1$	$(h - 1)(f - h)$
2б	$\log_h f$	$(h - 1)(f - 1)$
3	$\log_f h - \log_g h$ ($g \neq 1, f \neq 1$)	$(f - 1)(g - 1)(h - 1)(g - f)$
4	$h^f - h^g$ ($h > 0$)	$(h - 1)(f - g)$
4a	$h^f - 1$	$(h - 1)f$
5	$f^h - g^h$ ($f > 0, g > 0$)	$(f - g)h$
6	$ f - g $	$(f - g)(f + g)$

Решите неравенство.



$$\log_x 2 + 3\log_{2x} 2 - 6\log_{4x} 2 \leq 0$$

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{3}{1 + \log_2 x} - \frac{6}{2 + \log_2 x} \leq 0; \quad \log_2 x = t$$

$$\frac{2(t-2)\left(t + \frac{1}{2}\right)}{t(t+1)(t+2)} \geq 0$$

$$\begin{cases} -2 < t < -1 \\ -\frac{1}{2} \leq t < 0 \\ t \geq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} -2 < \log_2 x < -1 \\ -\frac{1}{2} \leq \log_2 x < 0 \\ \log_2 x \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x < 1 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right) \cup [4; +\infty)$

Решите неравенство.



$$\frac{266 - 5^x - 5^{3-x} - 2|7 - 5^x|}{118 - |7 - 5^x|} \leq 2$$

$$\frac{30 - 5^x - 5^{3-x}}{118 - |7 - 5^x|} \leq 0 \quad | \cdot 5^x; 5^x > 0$$

$$\frac{-5^{2x} + 30 \cdot 5^x - 125}{118 - |7 - 5^x|} \leq 0$$

Решите неравенство.



$$\frac{(5^x - 5)(5^x - 25)}{|5^x - 7| - 118} \leq 0;$$

$$\frac{16(x - 1)(x - 2)}{4(x - 3)(5^x + 11)} \leq 0$$

**Применим
метод
рационализац
ии**

Ответ: $x \in (-\infty; 1] \cup [2; 3)$.

Решите неравенство.



$$5^{-|x-2|} \cdot \log_2(4x - x^2 - 2) \geq 1$$

$$\begin{cases} 0 < 5^{-|x-2|} \leq 1 \\ \log_2(4x - x^2 - 2) \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5^{-|x-2|} \cdot \log_2(4x - x^2 - 2) \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5^{-|x-2|} \cdot \log_2(4x - x^2 - 2) \geq 1 \end{cases}$$

$$5^{-|x-2|} \cdot \log_2(4x - x^2 - 2) = 1$$

Решите неравенство.



$$5^{-|x-2|} \cdot \log_2(4x - x^2 - 2) = 1$$

$$\begin{cases} 5^{-|x-2|} = 1 \\ \log_2(4x - x^2 - 2) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x - 2| = 0 & x = 2 \\ 2 - (x - 2)^2 = 2 \end{cases}$$

Ответ: 2.

Решите неравенство.



$$\frac{\lg(3x + 2\sqrt{x} - 1)}{\lg(5x + 3\sqrt{x} - 2)^5} \geq \frac{\log_{32} 11}{\log_2 11}$$

$$\frac{\lg(3x + 2\sqrt{x} - 1)}{\lg(5x + 3\sqrt{x} - 2)} \geq 1$$

$$\log_{(5x+3\sqrt{x}-2)}(3x + 2\sqrt{x} - 1) - 1 \geq 0$$

Применим метод рационализации:

Решите неравенство.



$$\left\{ \begin{array}{l} (5x + 3\sqrt{x} - 3)(-2x - \sqrt{x} + 1) \geq 0 \\ 3x + 2\sqrt{x} - 1 > 0 \\ 5x + 3\sqrt{x} - 2 > 0 \end{array} \right.$$

$$\sqrt{x} = t; t \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \leq t < \frac{\sqrt{69} - 3}{10} \\ t > \frac{1}{3} \\ t > \frac{2}{5} \end{array} \right.$$

Решите неравенство.



$$\frac{1}{2} \leq t < \frac{\sqrt{69} - 3}{10}$$

$$\frac{1}{4} \leq x < \frac{39 - 3\sqrt{69}}{50}$$

Ответ: $\left[\frac{1}{4}; \frac{39 - 3\sqrt{69}}{50} \right)$

Домашнее задание.



$$1) 9^x + 2 \cdot 6^x - 3 \cdot 4^x > 0$$

$$2) 2 \cdot 3^{x+2} + 27 \cdot 3^{-x} \leq 87$$

$$3) \frac{-8 \log_3 x - 9}{1 - 4 \log_3 x} \geq \log_3 x$$

$$4) \log_{4-x} \frac{(x-4)^8}{x+5} \geq 8$$

$$5) \frac{3^{|x^2-2x-1|} - 9}{x} \geq 0$$

$$6) (\log_2(-\log_2 x))^2 + 2 \log_2((\log_2 x)^2) \leq 5$$

[ОТВЕТЫ](#)

$$1) (0; +\infty)$$

$$2) [-1; 2 - \log_3 2]$$

$$3) \left(0; \sqrt[4]{\frac{1}{27}} \right] \cup \left(\sqrt[4]{3}; 27 \right]$$

$$4) [-5; -4] \cup (3; 4)$$

$$5) [-1; 0) \cup \{1\} \cup [3; +\infty)$$

$$6) \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{\sqrt[32]{2}} \right]$$

Всем успехов!

Спасибо за
внимание



Список литературы.



1. **Балаян Э.Н.** Тренировочные упражнения по математике для подготовки к ЕГЭ и ОГЭ (профильный уровень) / Э.Н. Балаян. – Ростов н/Д: Феникс, 2016. – 636, [3] с.: ил. – (Большая переменная).
2. **Математика. Подготовка к ЕГЭ 2016. Профильный уровень** / Д.А. Мальцев, А.А. Мальцев, Л.И. Мальцева – Ростов н/Д: Издатель Мальцев Д. А.; Народное образование, 2016. – 188, [1] с.
3. **Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 2** Задачник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / [А.Г. Мордкович и др.]; под ред. А.Г. Мордковича. – 3-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2009. – 269 с. : ил.
4. **Материалы курса «Готовим к ЕГЭ хорошистов и отличников»** : лекции 1-4. – М. : Педагогический университет «Первое сентября», 2012. – 104 с.
5. **Сайт «РЕШУ ЕГЭ. Математика. Обучающая система Дмитрия Гущина».**
- <http://reshuege.ru/>