Метод вспомогательной окружности

МБОУ МПЛ г.Димитровград.
Учитель математики высшей категории
Копянова Гульнара Гапиевна

Суть метода заключается в том, что при решении планиметрических задач, когда требуется установить связь между данными и искомыми величинами, нередко полезно около треугольника или четырехугольника описать окружность, после чего эти связи становятся более ощутимыми или даже очевидными.

Анализ решения достаточно большого круга задач показывает, что использование вспомогательной окружности связано с характерными *признаками* фигуры, рассматриваемой в задаче.

Целесообразность применения метода зависит от этих *признаков*. А они основаны на теоремах и их следствиях, изучаемых в курсе геометрии 8, 9 классов.

- *Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.*
- *Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.*

- *Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, прямой.*
- *Угол, с вершиной внутри круга, измеряется полусуммой двух дуг, одна из которых расположена внутри этого угла, а другая – внутри угла, вертикального к данному.*
- *Угол, вершина которого расположена вне круга, а каждая из сторон пересекает окружность в двух точках, измеряется полуразностью дуг, заключенного внутри угла.*
- *Угол между касательной к окружности и хордой, проведенной через точку касания, измеряется половиной дуги, заключенной внутри этого угла.*
- *В любой треугольник можно вписать окружность и притом единственную.*
- *Около любого треугольника можно описать единственную окружность.*
- *Из всех параллелограммов только около прямоугольника и квадрата можно описать окружность, центр которой – точка пересечения диагоналей.*
- *Около трапеции можно описать окружность только тогда, когда она равнобочная.*

В процессе изучения метода вспомогательной окружности необходимо научиться выделять и использовать те признаки, наличие которых в задаче приводит к построению вспомогательной окружности и с ее помощью **устанавливать связи** между необходимыми объектами и величинами, определенными условием задачи.

Вот эти признаки.

1) Если дан правильный треугольник, то можно провести окружность с центром в любой из его вершин и радиусом, равным длине его стороны, либо описать около него окружность, которая разобьется вершинами треугольника на равные дуги по 120^0 каждая.

2) Если дан прямоугольный треугольник, то вокруг него описывается окружность, центром которой является середина гипотенузы, а радиус равен медиане, проведенной к гипотенузе этого треугольника.

3) Если удается установить, что суммы противоположных углов выпуклого четырехугольника равны, то вокруг него описывается окружность.

4) Если дан квадрат, прямоугольник или равнобедренная трапеция, то вокруг них описывается окружность.

Четыре различные точки A, B, C, D принадлежат одной окружности, если:

1) точки A и D расположены в одной полуплоскости относительно прямой BC и вы-
полняется равенство $\angle BDC = \angle BAC$;

2) точки A и D расположены в разных полуплоскостях относительно прямой BC и выполняется равенство $\angle BDC + \angle BAC = 180°$ (иначе говоря, сумма двух противопо-
ложных углов четырехугольника ABCD равна 180°);

3) точки A и D являются вершинами двух прямоугольных треугольников с общей гипотенузой BC (и центр их общей описанной окружности O есть середина гипотенузы) — хотя это утверждение, по существу, и является простым следствием двух предыдущих, выделим его отдельным пунктом, поскольку им приходится пользоваться весьма часто;

4) диагонали четырехугольника ABCD пересекаются в точке E и при этом треугольники ABE и DCE подобны;
5) две различные прямые AC и BD пересекаются в точке E, причем выполняется соотношение: $AE \cdot EC = BE \cdot ED$;
6) произведение диагоналей четырехугольника ABCD равно сумме произведений противолежащих сторон: $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$;
7) основания перпендикуляров, опущенных из точки D на прямые, содержащие стороны треугольника ABC, лежат на одной прямой.

Опорные задачи на метод вспомогательной окружности

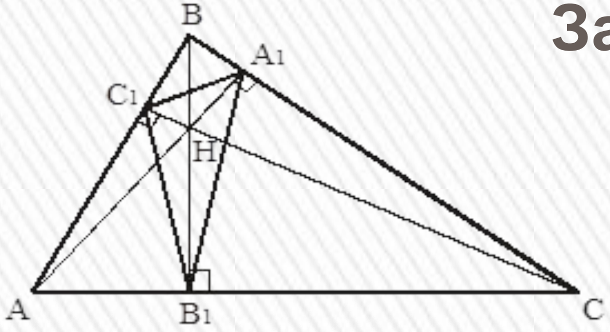


Рис. 2

Задача 1. В остроугольном треугольнике *ABC* проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Пусть *H* – точка пересечения высот. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$ и перечислите все образовавшиеся четырехугольники, около которых можно описать окружность .

Ответ. BA_1HC_1,CA_1HB_1,AC_1HB_1,AC_1A_1C, BC_1B_1C,

BA_1B_1A

Задача 2. В остроугольном треугольнике *ABC* проведены высоты AA_1 и CC_1 . Доказать, что треугольник A_1BC_1 подобен данному треугольнику *ABC* с коэффициентом подобия, равным $\cos B$.

Задача 2. В остроугольном треугольнике *ABC* проведены высоты AA_1 и CC_1 . Доказать, что треугольник A_1BC_1 подобен данному треугольнику *ABC* с коэффициентом подобия, равным $\cos B$.

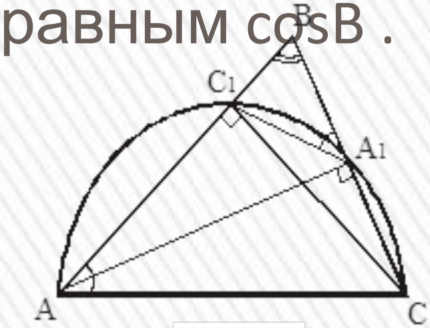


Рис. 3

Решение. На стороне *AC* треугольника *ABC* как на диаметре опишем полуокружность, которая пройдет через основания высот A_1 и C_1 (рис. 3). Так как четырехугольник AC_1A_1C вписанный, то $\angle BAC=180^0-\angle C_1A_1C$. Следовательно, $\angle BAC=\angle C_1A_1B$ и $\Delta A_1BC_1 \sim \Delta ABC$. Так как стороны A_1B и AB являются соответствующими сторонами в подобных треугольниках, то их отношение $A_1B:AB$ равно коэффициенту подобия. Но в прямоугольном треугольнике ABA_1 $A_1B:AB=\cos B$. Итак, $\Delta A_1BC_1 \sim \Delta ABC$ и $к=\cos B$.

Задача 3. Через некоторую точку плоскости проведены три прямые так, что угол между любыми двумя из них равен 60^0.Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из любой точки плоскости на эти прямые, служат вершинами равностороннего треугольника.

Задача 3. Через некоторую точку плоскости проведены три прямые так, что угол между любыми двумя из них равен 60^0.Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из любой точки плоскости на эти прямые, служат вершинами равностороннего треугольника.

Решение. Пусть три данные прямые пересекаются в точке *O*; *M* – произвольная точка плоскости; *A*, *B*, и *C* основания перпендикуляров, опущенных из точки *M* на данные прямые (рис. 4). Точки *O, M, A, B* и *C* лежат на одной окружности с диаметром *OM* (обоснуйте это). Теперь видно, что , $\angle ABC=\angle AOC$ поскольку оба они опираются на одну и туже дугу AC. Значит, $\angle ABC=60^0$. Точно так же , $\angle ACB=\angle AOB=60^0$, то есть треугольник *ABC* равносторонний

Рис. 4

Задача 4. Медиана и высота треугольника, проведенные из одной вершины внутри него, различны и образуют равные углы со сторонами, выходящими из той же вершины. Доказать, что треугольник прямоугольный.

Задача 4. Медиана и высота треугольника, проведенные из одной вершины внутри него, различны и образуют равные углы со сторонами, выходящими из той же вершины. Доказать, что треугольник прямоугольный.

Решение. Пусть высота *CH* и медиана *CM* треугольника *ABC* образует со сторонами *AC* и *BC* равные углы (рис. 5).

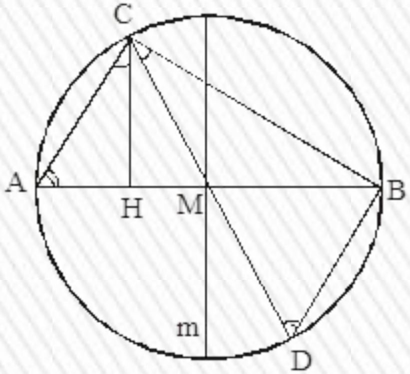


Рис. 5

Опишем около треугольника *ABC* окружность. Достаточно доказать, что *AB* – ее диаметр. Продолжим медиану *CM* до пересечения с окружностью в точке *D* и рассмотрим треугольники *ACH* и *DCB*. Так как

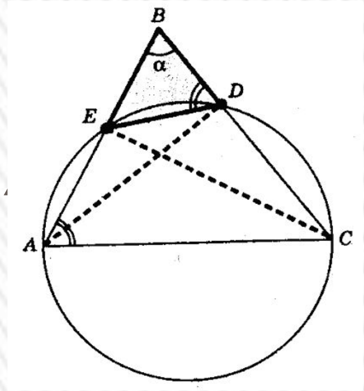
∟ACH=∟DCB по условию и ∟A=∟D как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, то ∟AHC=∟DBC=90^0. Следовательно, CD диаметр окружности. Центр окружности лежит на диаметре CD и на серединном перпендикуляре *m* к стороне *AB*. Так как по условию *CD* не является высотой, то прямые *m* и CD имеют только одну общую точку *M*, которая является центром описанной окружности. Следовательно, *AB* – диаметр окружности и ∟ACB=90^0.

Задача 5

№16 ЕГЭ. Точки D и E — основания высот непрямоугольного треугольника ABC, проведенных из вершин A и C соответственно.

Известно, что $DE/AC = k$, $BC = a$ и $AB = b$. Найдите сторону AC.

Решение.



Из точек D и E сторона AC видна под прямым углом,

значит, эти точки лежат на окружности с диаметром

Обозначим *угол* $ABC = \alpha$.

Если треугольник ABC остроугольный (рис. 1), то основания высот AD и CE лежат на сторонах треугольника. Тогда четырехугольник $AEDC$ — вписанный, поэтому $\angle BDE = 180° - \angle CDE = \angle CAE = \angle CAB$.

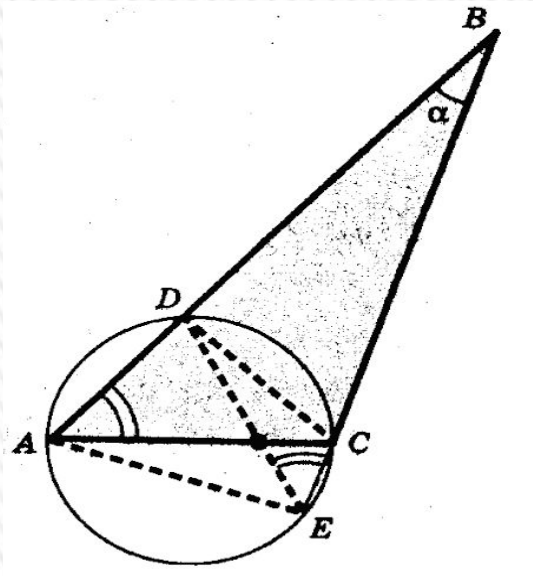
Треугольники EDB и CAB подобны (по двум углам) с коэффициентом $DE:AC = BE:BC = \cos\alpha$, т.е. $\cos\alpha = k$. Тогда по теореме косинусов

$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \cdot BC \cos \alpha = b^2 + a^2 - 2abk$.

Пусть теперь треугольник *ABC* тупоугольный и, например, ∟*ACB* тупой (рис.2).

Тогда четырехугольник *AECD* вписанный, и аналогично предыдущему получаем: $\cos \alpha = k$ и $AC^2 = b^2 + a^2 - 2abk$

Аналогичный ответ получаем в случае, когда ∟*CAB* тупой.



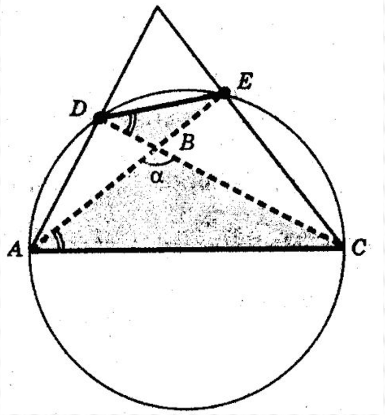
Пусть теперь $a > 90°$ (рис. 3). Тогда основания высот AD и CE лежат на продолжениях сторон BC и AB. Вписанные углы CDE и CAE опираются на одну и ту же дугу, поэтому

$\llcorner BDE = \llcorner CDE = \llcorner CAE = \llcorner CAB$.

Треугольники EDB и CAB подобны (по двум углам) с коэффициентом

$=cos(180^0 - a) = - cos\ a$ т.е. $cos\ a = - k$.

Тогда $AC^2 = a^2 + b^2 + 2abk$.



Ответ: $AC = \sqrt{a^2 + b^2 + 2abk}$.

$AC = \sqrt{a^2 + b^2 - 2abk}$.

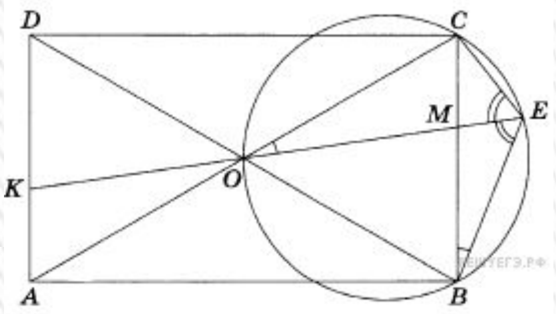
ЕГЭ.№16

Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол 30°. Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC = 120°$.

а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.

б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K. Найдите EK, если известно, что $BE = 40$ и $CE = 24$.

Решение.а) По теореме о внешнем угле треугольника $\angle BOC = \angle BAO + \angle ABO = 2 \cdot 30° = 60°$.



Поэтому

$\angle BOC + \angle BEC = 60^0 + 120^0 = 180^0$

Значит, точки *B, E, C, O* лежат на одной окружности.

Вписанные в эту окружность углы *CBE* и *COE* опираются на одну и ту же дугу, следовательно, $\angle CBE = \angle COE$.

б) По теореме косинусов $BC^2 = BE^2 + CE^2 - 2BE \cdot CE \cdot \cos 120^0$, $BC = 56$

Вписанные углы *BEO* и *CEO* опираются на равные хорды *BO* и *CO*, значит, *EO* — биссектриса угла *BEC*. Пусть *M* — точка её пересечения со стороной *BC*. По формуле для биссектрисы треугольника получаем:

$EM = (2BE \cdot CE \cdot \cos(\angle BEC/2))/(BE+CE) = 15$

По свойству биссектрисы треугольника $CM/BM = CE/BE = 24/40 = 3/5$, значит,

$CM = 3/8 \cdot BC = 21$, $BM = 35$

По теореме о произведении пересекающихся хорд $EM \cdot MO = BM \cdot CM$, откуда находим, что $MO = (BM \cdot CM)/EM = 49$

Треугольники *COM* и *AOK* равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, поэтому $OK = OM$. Следовательно, $EK = EM + 2OM = 15 + 98 = 113$.

Ответ: 113.

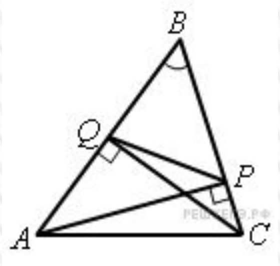
ЕГЭ №16(2015г)

В остроугольном треугольнике *ABC* проведены высоты *AP* и *CQ*.

а) Докажите, что угол *PAC* равен углу *PQC*.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *ABC*, если известно, что *PQ* = 8 и $\angle ABC = 60°$

В остроугольном треугольнике *ABC* проведены высоты *AP* и *CQ*.



а) Докажите, что угол *PAC* равен углу *PQC*.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *ABC*, если известно, что $PQ = 8$ и $\angle ABC = 60°$

Решение. а) Углы *APC* и *AQC* — прямые, значит, точки *A, Q, P* и *C* лежат на одной окружности с диаметром *AC*, и, следовательно, равны и вписанные углы *PAC* и *PQC* этой окружности, опирающиеся на дугу *PC*, что и требовалось доказать.

б) Прямоугольные треугольники *ABP* и *CBQ* имеют общий угол *ABC*, следовательно, они подобны, откуда $BQ/BP=BC/BA$ или $BQ/BC=BP/BA$, но тогда и треугольники *BAC* и *BPQ* также подобны, причем коэффициент подобия равен $BQ/BP=BC/BA=\cos B$,откуда $AC=PQ/\cos B=8/\cos 60^0=16$ Тогда радиус *R* окружности, описанной около треугольника *ABC* равен $R=AC/\sin 60^0=16/\sqrt{3}$

Ответ: $16/\sqrt{3}$

Егэ 2016 г

16 В прямоугольном треугольнике ABC точки M и N — середины гипотенузы AB и катета BC соответственно. Биссектриса угла BAC пересекает прямую MN в точке L.

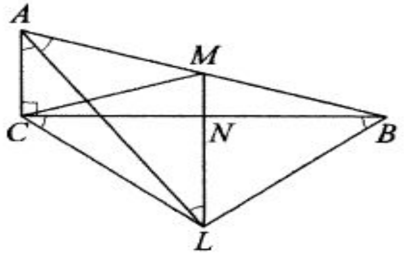
а) Докажите, что треугольники AML и BLC подобны.

б) Найдите отношение площадей этих треугольников, если $\cos\angle BAC = \frac{7}{25}$.

Решение.

а) Прямая ML параллельна прямой AC, так как содержит среднюю линию треугольника ABC (см. рисунок). Следовательно,

$$\angle ALM = \angle LAC = \angle LAM.$$



Таким образом,

$$LM = AM = BM = CM,$$

то есть точки A, B, C и L лежат на окружности с центром в точке M. Получаем:

$$\angle LBC = \angle LAC = \angle LAB = \angle LCB,$$

а значит, треугольники AML и BLC подобны по двум углам.

б) Углы ALB и ACB опираются на одну дугу, значит, $\angle ALB = 90°$. Коэффициент подобия треугольников BLC и AML равен

$$\frac{LB}{AM} = \frac{2LB}{AB} = 2\sin\angle LAB.$$

По условию

$$\cos\angle BAC = \frac{7}{25},$$

откуда

$$1 - 2\sin^2\angle BAL = \frac{7}{25};\ \sin^2\angle BAL = \frac{9}{25};\ \sin\angle BAL = \frac{3}{5}.$$

Значит, $\frac{AM}{LB} = \frac{5}{6}$ и площади треугольников AML и BLC относятся как $\frac{25}{36}$.

Ответ: б) $25:36$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Задачи .

1.Дана трапеция ABCD,диагонали AC И BD которой пересекаются под прямым углом, а продолжения боковых сторон AB и DC пересекаются в точке К под углом 30^0.Известно что ∟BAC=∟CDB,а площадь трапеции S.Найдите площадь треугольника AКD. (1,5S или 0.5S)

2.В треугольнике ABC проведены медиана BM и высота BH (A-H-C), угол ABH равен углу CBM,AB=9,BC=12

а)докажите, что AM=BM

б) найдите длину HM.   (2,1)

3.Сторона треугольника √2,углы,прилежащие к ней,равны 75^0 и 60^0. Найдите отрезок,соединяющий основания высот,проведенных из вершин этих углов. (1)

Спасибо за внимание!