Теория вероятности

Решение задач ЕГЭ

Карванен Любовь Никитична
ГБОУ СОШ №317
Санкт-Петербург

События -

бывают ***достоверными***, ***невозможными*** и ***случайными***.

Достоверным называют событие, которое в результате ***испытания*** *(осуществления определенных действий, определённого комплекса условий)* **обязательно произойдёт**. Например, в условиях земного тяготения подброшенная монета непременно упадёт вниз.

Невозможным называют событие, которое **заведомо не произойдёт** в результате испытания. Пример невозможного события: в условиях земного тяготения подброшенная монета улетит вверх.

Событие называется **случайным**, если в результате испытания оно может, **как произойти, так и не произойти.**

Любой результат испытания называется ***исходом***, который, представляет собой появление определённого события.

Например, при подбрасывании монеты возможно 2 исхода (случайных события): выпадет орёл, выпадет решка. Разумеется, что данное испытание проводится в таких условиях, что монета не может встать на ребро или, скажем, зависнуть в невесомости.

События (любые) **обозначают** большими латинскими буквами $A, B, C, D, E, F, \ldots$ либо теми же буквами с подстрочными индексами, например: $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \ldots$.

Другая важная характеристика событий – это

их ***равновозможность***.

Два или большее количество событий

называют **равновозможными**, если ни одно из них не

является более возможным, чем другие.

Например:

выпадение орла или решки при броске монеты;

выпадение 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков при броске игрального

кубика;

Совместные и несовместные события. Противоположные события. Полная группа событий

События называют ***несовместными***, если в одном и том же испытании появление одного из событий **исключает** появление других событий. Простейшим примером несовместных событий является пара ***противоположных*** событий. Событие, противоположное данному, обычно обозначается той же латинской буквой с чёрточкой вверху.

Например:

A_0 – в результате броска монеты выпадет орёл;

$\overline{A}_0$ – в результате броска монеты выпадет решка.

ВАЖНЕЙШЕЕ ПРАВИЛО!!!

Операция сложения событий означает логическую связку **ИЛИ**,

а **операция умножения событий** – логическую связку **И**.

1) **Суммой** двух событий A и B называется событие $A+B$ которое состоит в том, что наступит **или** событие A **или** событие B **или** оба события одновременно. В том случае, если события **несовместны**, последний вариант отпадает, то есть может наступить **или** событие A **или** событие B .

2) **Произведением** двух событий A и B называют событие $A \cdot B$, которое состоит в совместном появлении этих событий, иными словами, умножение $A \cdot B$ означает, что при некоторых обстоятельствах наступит **и** событие А , **и** событие В .

Задача 1

Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

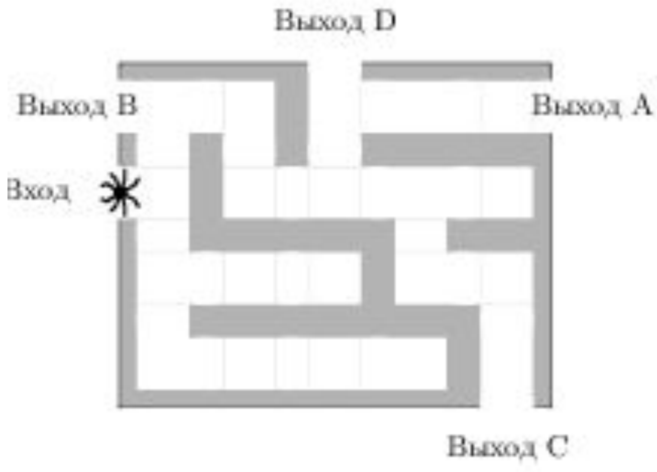
Решение.

Возможность выиграть первую и вторую партию не зависят друг от друга. **Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей:** $0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}15$.

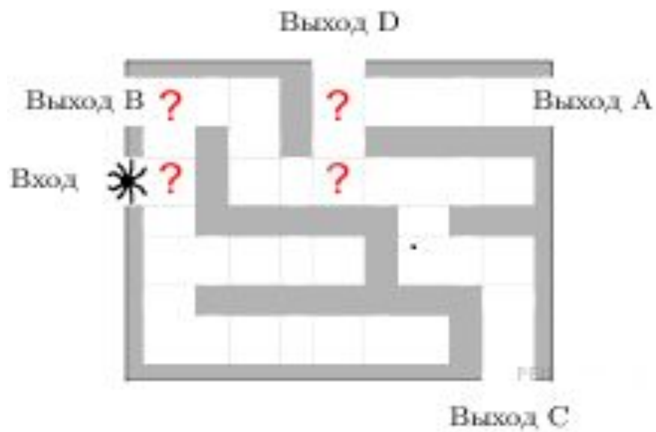
Ответ: 0,15.

Задача 2

На рисунке изображён лабиринт. Паук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и ползти назад паук не может, поэтому на каждом разветвлении паук выбирает один из путей, по которому ещё не полз. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью паук придёт к выходу



Решение.



На каждой из четырех отмеченных развилок паук с вероятностью 0,5 может выбрать или путь, ведущий к выходу D, или другой путь.

Это **независимые** события, **вероятность их произведения** (паук дойдет до выхода D) **равна произведению вероятностей этих событий**.

Поэтому вероятность прийти к выходу D равна $(0{,}5)^4 = 0{,}0625$.

Ответ: 0,0625.

Задача 3

Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,06. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

Решение.

Вероятность того, что батарейка исправна, равна 0,94. **Вероятность произведения независимых событий (обе батарейки окажутся исправными) равна произведению вероятностей этих событий:** $0,94 \cdot 0,94 = 0,8836$.

Ответ: 0,8836.

Задача 4

Какова вероятность того, что случайно выбранный телефонный номер оканчивается двумя чётными цифрами?

Решение.

Вероятность того, что на одном из требуемых мест окажется чётное число равна 0,5. Следовательно, вероятность того, что на двух местах одновременно окажутся два чётных числа равна $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$.

Ответ: 0,25.

Задача 5

Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,93. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Решение.

Пусть A = «чайник прослужит больше года, но меньше двух лет»,

B = «чайник прослужит больше двух лет»,

C = «чайник прослужит ровно два года»,

тогда $(A + B + C)$ = «чайник прослужит больше года».

События A, B и C несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Вероятность события C, состоящего в том, что чайник выйдет из строя ровно через два года — строго в тот же день, час и секунду — равна нулю. Тогда:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = P(A) + P(B),$$

откуда, используя данные из условия, получаем $0{,}93 = P(A) + 0{,}87$.
Тем самым, для искомой вероятности имеем: $P(A) = 0{,}93 - 0{,}87 = 0{,}06$.

Ответ: 0,06.

Задача 6

Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 18 пассажиров, равна 0,82. Вероятность того, что окажется меньше 10 пассажиров, равна 0,51. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 10 до 17.

Решение.

Рассмотрим события

A = «в автобусе меньше 10 пассажиров»

B = «в автобусе от 10 до 17 пассажиров».

Их сумма — событие (A + B) = «в автобусе меньше 18 пассажиров».

События A и B несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Тогда, используя данные задачи, получаем:
$0{,}82 = 0{,}51 + P(B)$, откуда $P(B) = 0{,}82 - 0{,}51 = 0{,}31$.

Ответ: 0,31.

Задача 7

Вероятность того, что на тестировании по математике учащийся П. верно решит больше 12 задач, равна 0,7. Вероятность того, что П. верно решит больше 11 задач, равна 0,79. Найдите вероятность того, что П. верно решит ровно 12 задач.

Решение.

Рассмотрим события:

А = «учащийся решит 12 задач»

В = «учащийся решит больше 12 задач».

(А + В) = «учащийся решит больше 11 задач».

События А и В несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Получаем:

$0{,}79 = P(A) + 0{,}7$

откуда $P(A) = 0{,}79 - 0{,}7 = 0{,}09$.

Ответ: 0,09.

Задача 8

В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

Решение.

Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Поэтому вероятность того, что все три продавца заняты равна

$0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}027$

Ответ: 0,027.

Задача 9

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Обслуживание автоматов происходит по вечерам после закрытия центра. Известно, что вероятность события «К вечеру в первом автомате закончится кофе» равна 0,25. Такая же вероятность события «К вечеру во втором автомате закончится кофе». Вероятность того, что кофе к вечеру закончится в обоих автоматах, равна 0,15. Найдите вероятность того, что к вечеру дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение.

Пусть события A = кофе закончится в первом автомате,

B = кофе закончится во втором автомате.

Тогда $A \cdot B$ = кофе закончится в обоих автоматах,

$(A + B)$ = кофе закончится хотя бы в одном автомате.

По условию $P(A) = P(B) = 0{,}25$; $P(A \cdot B) = 0{,}15$.

События A и B совместные, **вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на вероятность их произведения**:

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0{,}25 + 0{,}25 - 0{,}15 = 0{,}35.$

Следовательно, вероятность противоположного события, состоящего в том, что кофе останется в обоих автоматах, равна $1 - 0{,}35 = 0{,}65$.

Ответ: 0,65.

II способ

1) Вероятность того, что кофе останется в первом автомате равна $1 - 0,25 = 0,75$.

2) Вероятность того, что кофе останется во втором автомате равна $1 - 0,25 = 0,75$.

3) Вероятность того, что кофе останется в первом или втором автомате равна $1 - 0,15 = 0,85$.

Т.к. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$, имеем:

$$0,85 = 0,75 + 0,75 - x,$$

откуда $x = 0,65$.

Ответ: 0,65

Задача 10

Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, то она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,3.

Решение.

		Второй матч		
		победа $P = 0,3$	ничья $P = 0,4$	поражение $P = 0,3$
Первый матч	победа $P = 0,3$	0,09	0,12	0,09
	ничья $P = 0,4$	0,12	0,16	0,12
	поражение $P = 0,3$	0,09	0,12	0,09

Числа в ячейках получаются по принципу таблицы умножения (умножение вероятностей соответствующих результатов первого и второго матчей), так как вероятности результатов первого и второго матча не зависят друг от друга. Жирным шрифтом в таблице выделены вероятности тех результатов, при которых команда выходит в следующий круг. Искомая вероятность равна $0,09 + 0,12 + 0,12 = 0,33$.

Ответ: 0,33.

Задача 11.

В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Решение.

		Второй автомат	
		исправен, $P = 0{,}95$	неисправен, $P = 0{,}05$
Первый автомат	исправен, $P = 0{,}95$	$0{,}95 \cdot 0{,}95 = \mathbf{0{,}9025}$	$0{,}95 \cdot 0{,}05 = \mathbf{0{,}0475}$
	неисправен, $P = 0{,}05$	$0{,}05 \cdot 0{,}95 = \mathbf{0{,}0475}$	$0{,}05 \cdot 0{,}05 = 0{,}0025$

Числа в ячейках получаются по принципу таблицы умножения, так как вероятности поломки автоматов не зависят друг от друга.

Событие «хотя бы один автомат исправлен» представляет собой объединение событий, которым соответствуют выделенные ячейки. Все эти события попарно несовместны, следовательно, искомая вероятность равна $0{,}9025 + 0{,}0475 + 0{,}0475 = 0{,}9975$.

Ответ: 0,9975.

Задача 12

Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже чем 36,8 °С, равна 0,81. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура окажется 36,8 °С или выше.

Решение.

Т.К. данные события **противоположны**, поэтому искомая вероятность равна 1 − 0,81 = 0,19.

Ответ: 0,19.

Задача 13

При изготовлении подшипников диаметром 67 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше, чем на 0,01 мм, равна 0,965. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше чем 66,99 мм или больше чем 67,01 мм.

Решение.

По условию, диаметр подшипника будет лежать в пределах от 66,99 до 67,01 мм с вероятностью 0,965. Поэтому искомая вероятность противоположного события равна 1 − 0,965 = 0,035.

Ответ: 0,035.

Задача 14

Биатлонист **пять раз** стреляет по мишеням.

Вероятность **попадания** в мишень при одном выстреле равна **0,8.** Найдите вероятность того, что биатлонист **первые три раза попал** в мишени, а последние **два промахнулся**.

Результат округлите до сотых.

Решение.

Поскольку биатлонист попадает в мишени с вероятностью 0,8, он промахивается с вероятностью $1 - 0,8 = 0,2$. **События** попасть или промахнуться при каждом выстреле **независимы**.

Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей. Тем самым, вероятность события «попал, попал, попал, промахнулся, промахнулся» равна $0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,02048 \approx 0,02$

Ответ: 0,02.

Задача 15

Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Решение.

Найдем вероятность того, что перегорят обе лампы. Эти события, вероятность их произведения равно произведению вероятностей этих событий: $0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$.

Событие, состоящее в том, что не перегорит хотя бы одна лампа, противоположное. Следовательно, его вероятность равна $1 - 0{,}09 = 0{,}91$.

Ответ: 0,91.

Задача 16

При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,4, а при каждом последующем — 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?

В ответе укажите наименьшее необходимое количество выстрелов.

Решение

Вычислим вероятность уцелеть после ряда последовательных **промахов.** Т.к. вероятность уничтожения некоторой цели **при первом выстреле** равна 0,4, то вероятность промахов 1-0,4=0,6, а при каждом следующем 1-0,6=0,4

$P(1) = 0,6.$

$P(2) = P(1)\cdot 0,4 = 0,24.$

$P(3) = P(2)\cdot 0,4 = 0,096.$

$P(4) = P(3)\cdot 0,4 = 0,0384;$

$P(5) = P(4)\cdot 0,4 = 0,01536.$

$0,01536 < 0,02$, поэтому достаточно пяти выстрелов по мишени.

Ответ : 5

Задача 17

На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос по теме «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Решение.
Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: 0,2 + 0,15 = 0,35.

Ответ: 0,35.