639. Показать, что при $n \to \infty$ последовательность $7/3$, $10/5$, $13/7$, $\ldots (3n+4)/(2n+1)$, $\ldots$ имеет пределом число $3/2$.

△ Здесь $x_n - 3/2 = (3n+4)/(2n+1) - 3/2 = 5/[2(2n+1)]$. Определим, при каком значении n выполняется неравенство $5/[2(2n+1)] < \varepsilon$; так как $2(2n+1) > 5/\varepsilon$, то $n > 5/(4\varepsilon) - 1/2$. Итак, если $n > 5/(4\varepsilon) - 1/2$, то $|x_n - 3/2| < \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x = 3/2$.

Полагая $\varepsilon = 0{,}1$, заключаем, что неравенство $|x_n - 3/2| < 0{,}1$ выполняется при $n > 12$ (например, при $n = 13$), Аналогично, неравенство $|x_n - 3/2| < 0{,}01$ выполняется при $n > 124{,}5$ (например, при $n = 125$), а неравенство $|x_n - 3/2| < 0{,}001$ — при $n > 1249{,}5$ (например, при $n = 1250$). ▲

Найти следующие пределы:

640. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x+2}{2x+3}$.

△ Так как $x\longrightarrow 4$, то числитель дроби стремится к числу $5\cdot 4+2=22$, а знаменатель — к числу $2\cdot 4+3=11$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x+2}{2x+3}=\dfrac{22}{11}=2$. ▲

641. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+5}{2x+7}$.

△ Числитель и знаменатель дроби неограниченно возрастают при $x\longrightarrow\infty$. В таком случае говорят, что имеет место неопределенность вида ∞/∞. Разделив на x числитель и знаменатель дроби, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{2x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+5/x}{2+7/x}=\frac{3}{2},$$

так как при $x\longrightarrow\infty$ каждая из дробей $5/x$ и $7/x$ стремится к нулю. ▲

642. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$.

△ Здесь числитель и знаменатель дроби при $x\longrightarrow 3$ стремятся к нулю (неопределенность вида $0/0$). Имеем

$$\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}=\frac{x+3}{x};$$

если $x\neq 3$, то $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{x}$. Но при $x\longrightarrow 3$ дробь $\dfrac{x+3}{x}$ стремится к числу $\dfrac{3+3}{3}=2$. Итак, $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}=2$. ▲

643. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$.

△ Здесь имеет место неопределенность вида $0/0$. Разложим на множители числитель и знаменатель дроби:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0}{2}=0.\ ▲$$

644. $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$.

△ Это — также неопределенность вида 0/0. Имеем

$$\lim_{x\to 10} \frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x} = \lim_{x\to 10} \frac{(x-10)(x^2+10x+100)}{x(x-10)^2} = \lim_{x\to 10} \frac{x^2+10x+100}{x(x-10)}.$$

△ Если $x \to a-0$, то $1/(x-a) \to -\infty$ и $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = 0$. Если же $x \to a+0$, то $1/(x-a) \to +\infty$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty$. ▲

655. Показать, что при $n \to \infty$ последовательность $1/2$, $5/3$, $9/4$, ..., $(4n-3)/(n+1)$, ... имеет предел, равный 4.

656. Показать, что при $n \to \infty$ последовательность 1, $1/3$, $1/5$,... ..., $1/(2n-1)$, ... является бесконечно малой.

Найти следующие пределы:

657. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$. **658.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$.

659. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$. **660.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

661. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(a+2h)-2\sin(a+h)+\sin a}{h^2}$. **662.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} mx}{\sin nx}$.

663. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} x_0}{x-x_0}$. **664.** $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}$.

665. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\cos x}{\pi-2x}$. **666.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^4+3x^2+5x-6}{x^3+3x^2+7x-1}$.

● Положить $\pi/2-x=\alpha$.

667. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x^3+4x+5)(x^2+x+1)}{(x+2)(x^4+2x^3+7x^2+x-1)}$. 668. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}$.

669. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$. 670. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$.

671. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$. 672. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7x+2x-x^2}}{x^2-2x}$.

673. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$. 674. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

675. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+mx)}{x}$. 676. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{2^x+3}{2^x-3}$.

677. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+cx+d}\right)$.

678. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

679. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$. 680. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-5^x}{1-e^x}$.

681. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8^x-7^x}{6^x-5^x}$. 682. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\ln(1+x)}$.

683. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^x-1}{x}$. 684. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$.

● Положить $x=t^4$.

689. $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$. **690.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-1}{x^4-1}$.

691. Найти $\lim\limits_{t\to\infty} t\,(\sqrt[t]{a}-1)$ (где $t>0$).

● Положить $x=1/t$, где $x\to 0$.

692. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}$. **693.** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$.

694. $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$. **695.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^x-4^x}{x^2+x}$.

● Привести дроби к общему знаменателю.

696. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x-1}{x\ln x}$. **697.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-3x)}{x}$.

● Учесть, что $x^x=e^{x\ln x}$.

698. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+5x^3+7}{2x^5+3x^4+1}$. **699.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+2)-\ln 2}{x}$.

700. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+8}{x-2}\right)^{x}$. **701.** $\lim\limits_{\alpha\to 0} (2-\cos\alpha)^{\operatorname{cosec}^2\alpha}$.

702. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^{x+c}$. **703.** $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{1/(x-2)}$.

1) $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ — предел функции $f(x)$ в точке x_0;

2) $l = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ — правый предел функции $f(x)$ в точке x_0;

3) $l = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ — левый предел функции $f(x)$ в точке x_0;

4) $l = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ — предел функции $f(x)$ при $x \to \infty$;

5) $l = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ — предел функции $f(x)$ при $x \to \pm\infty$;

СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \to a$.

1. Если $\lim\limits_{x\to a}(\alpha/\beta)=0$, то говорят, что α является *бесконечно малой высшего порядка* по сравнению с β. В этом случае пишут $\alpha=o(\beta)$.

2. Если $\lim\limits_{x\to a}(\alpha/\beta)=m$, где m — число, отличное от нуля, то говорят, что α и β — *бесконечно малые одного и того же порядка*. В частности, если $\lim\limits_{x\to a}(\alpha/\beta)=1$, то бесконечно малые α и β называются *эквивалентными*. Запись $\alpha\sim\beta$ означает, что α и β — эквивалентные бесконечно малые.

Если $\alpha/\beta\to\infty$, то это означает, что $\lim(\beta/\alpha)=0$. Таким образом, β является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с α, т. е. $\beta=o(\alpha)$.

3. Если α^k и β — бесконечно малые одного и того же порядка, причем $k>0$, то говорят, что бесконечно малая β имеет *порядок* k по сравнению с α.

Отметим некоторые свойства бесконечно малых:

1°. *Произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с сомножителями*, т. е. если $\gamma=\alpha\beta$, то $\gamma=o(\alpha)$ и $\gamma=o(\beta)$.

2°. *Бесконечно малые α и β эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность $\alpha-\beta=\gamma$ является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с α* и β, т. е. если $\gamma=o(\alpha)$, $\gamma=o(\beta)$, то $\alpha\sim\beta$.

3°. *Если отношение двух бесконечно малых имеет предел, то этот предел не изменится при замене каждой из бесконечно малых эквивалентной ей бесконечно малой*, т. е. если $\lim\limits_{x\to a}(\alpha/\beta)=m$, $\alpha\sim\alpha_1$, $\beta\sim\beta_1$, то $\lim\limits_{x\to a}(\alpha_1/\beta_1)=m$.

Полезно иметь в виду эквивалентность следующих бесконечно малых: если $x\to 0$, то

$$\sin x\sim x,\ \operatorname{tg} x\sim x,\ \arcsin x\sim x,\ \operatorname{arctg} x\sim x,\ \ln(1+x)\sim x.$$

704. Пусть t — бесконечно малая. Сравнить бесконечно малые $\alpha = 5t^2 + 2t^5$ и $\beta = 3t^2 + 2t^3$.

△ Имеем $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{5t^2+2t^5}{3t^2+2t^3} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{5+2t^3}{3+2t} = \frac{5}{3}$. Так как предел отношения α и β есть число, отличное от нуля, то α и β — бесконечно малые одного и того же порядка. ▲

705. Сравнить бесконечно малые $\alpha = t\sin^2 t$ и $\beta = 2t\sin t$ при $t\to 0$.

△ Здесь $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t\sin^2 t}{2t\sin t} = \frac{1}{2} \lim\limits_{t\to 0} \sin t = 0$, т. е. $\alpha = o(\beta)$. ▲

706. Сравнить бесконечно малые $\alpha = t\ln(1+t)$, $\beta = t\sin t$ при $t \to 0$.

△ Находим

$$\lim_{t\to 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{t\to 0} \frac{t\ln(1+t)}{t\sin t} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{\sin t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\ln(1+t)}{t}}{\frac{\sin t}{t}} = 1,$$

т. е. $\alpha \sim \beta$. ▲

707. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x\sin x)}{\operatorname{tg} x^2}$.

△ Заменим числитель и знаменатель дроби эквивалентными бесконечными малыми: $\ln(1+3x\sin x)\sim 3x\sin x$, $\operatorname{tg} x^2\sim x^2$. Тогда получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x\sin x)}{\operatorname{tg} x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\sin x}{x^2}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=3. \ ▲$$

708. Определить порядок бесконечно малой $y=xe^x$ по сравнению с бесконечно малой x.

709. Определить порядок бесконечно малой $y=\sqrt{1+x\sin x}-1$ по сравнению с бесконечно малой x.

710. Определить порядок бесконечно малой $y=\sqrt{\sin 2x}$ по сравнению с x при $x\to 0$.

711. Сравнить бесконечно малые $\alpha=t^2\sin^2 t$ и $\beta=t\operatorname{tg} t$, если $t\to 0$.

712. Сравнить бесконечно малые $\alpha=(1+x)^m-1$ и $\beta=mx$, если $x\to 0$ и m — рациональное положительное число.

713. Сравнить бесконечно малые $\alpha=a^x-1$ и $\beta=x\ln a$, если $x\to 0$.

Найти следующие пределы:

714. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{\operatorname{tg} 3x}$. **715.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$.

● Заменить числитель и знаменатель эквивалентными бесконечно малыми.

716. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1-4x)}$. **717.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(1+x-3x^2+2x^3)}{\ln(1+3x-4x^2+x^3)}$.

718. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}$. **719.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(e^{x-1}-1)}{\ln x}$.

● Представить $\cos x$ в виде $1-(1-\cos x)$.

720. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{(1+x)\sqrt[3]{(1+x)^2}-1}$. **721.** $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{(5^\alpha-1)(4^\alpha-1)}{(3^\alpha-1)(6^\alpha-1)}$.

722. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x}-2}{\sqrt[4]{16+5x}-2}$.

● Разделить на 2 числитель и знаменатель.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если: 1) эта функция определена в некоторой окрестности точки a; 2) существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$; 3) этот предел равен значению функции в точке a, т. е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Обозначая $x-a=\Delta x$ (приращение аргумента) и $f(x)-f(a)=\Delta y$ (приращение функции), условие непрерывности можно записать так: $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y=0$, т. е. *функция $f(x)$ непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.*

Если функция непрерывна в каждой точке некоторой области (интервала, сегмента и т. п.), то она называется *непрерывной в этой области.*

Точка a, принадлежащая области определения функции или являющаяся граничной для этой области, называется *точкой разрыва*, если в этой точке нарушается условие непрерывности функции.

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=f(a-0)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)$, причем не все три числа $f(a)$, $f(a-0)$, $f(a+0)$ равны между собой, то a называется *точкой разрыва* I *рода.*

Точки разрыва I рода подразделяются, в свою очередь, на *точки устранимого разрыва* (когда $f(a-0)=f(a+0)\neq f(a)$, т. е. когда левый и правый пределы функции в точке a равны между собой, но не равны значению функции в этой точке) и на *точки скачка* (когда $f(a-0)\neq f(a+0)$, т. е. когда левый и правый пределы функции в точке a различны); в последнем случае разность $f(a+0)-f(a-0)$ называется *скачком* функции в точке a. Точки разрыва, не являющиеся точками разрыва I рода, называются *точками разрыва* II *рода*. В точках разрыва II рода не существует хотя бы один из односторонних пределов.

Сумма и произведение конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная. Частное от деления двух непрерывных функций есть функция непрерывная во всех точках, где делитель не равен нулю.

723. Показать, что при $x=4$ функция $y=\dfrac{x}{x-4}$ имеет разрыв.

△ Находим $\lim\limits_{x\to 4-0}\dfrac{x}{x-4}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 4+0}\dfrac{x}{x-4}=+\infty$. Таким образом, функция при $x\longrightarrow 4$ не имеет ни левого, ни правого конечного предела. Следовательно, $x=4$ является точкой разрыва II рода (рис. 26). ▲

724. Показать, что при $x=4$ функция $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-4}$ имеет разрыв.

△ Если $x \longrightarrow 4-0$, то $1/(x-4) \longrightarrow -\infty$ и $\lim\limits_{x\to 4-0} y=-\pi/2$. Если же $x \longrightarrow 4+0$, то $1/(x-4) \longrightarrow +\infty$ и $\lim\limits_{x\to 4+0} y=\pi/2$. Итак, при $x \longrightarrow 4$ функция имеет как левый, так и правый конечный предел, причем эти пределы различны. Следовательно, $x=4$ является точкой разрыва I рода — точкой скачка. Скачок функции в этой точке равен $\pi/2-(-\pi/2)=\pi$ (рис. 27). ▲

725. Показать, что при $x=5$ функция $y=\dfrac{x^2-25}{x-5}$ имеет разрыв.

△ В точке $x=5$ функция не определена, так как, выполнив подстановку, получаем неопределенность 0/0. В других точках дробь можно сократить на $x-5$, так как $x-5\neq 0$. Следовательно, $y=x+5$ при $x\neq 5$. Легко видеть, что $\lim\limits_{x\to 5-0} y=\lim\limits_{x\to 5+0} y=10$.

Таким образом, при $x=5$ функция имеет устранимый разрыв. Он будет устранен, если условиться, что $y=10$ при $x=5$.

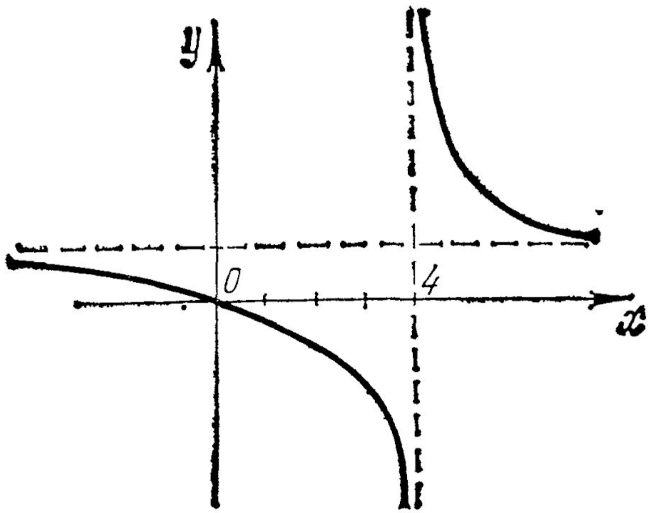


Рис. 26

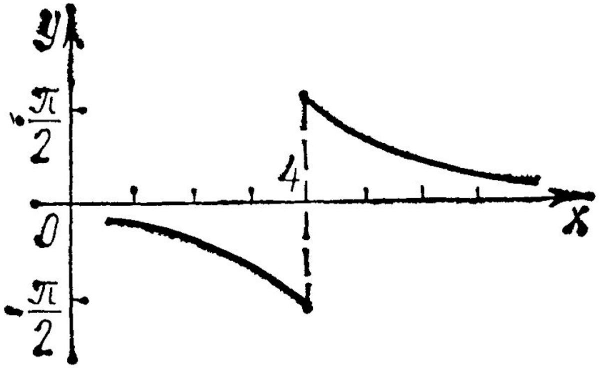


Рис. 27

Итак, можно считать, что функция $y=(x^2-25)/(x-5)$ непрерывна при всех значениях x, если считать, что равенство $(x^2-25)/(x-5)=x+5$ справедливо при всех значениях x, не исключая и $x=5$. В этом случае график функции есть прямая $y=x+5$. ▲

726. Найти точки разрыва функции $y=\dfrac{2^{1/(x-2)}-1}{2^{1/(x-2)}+1}$.

727. Найти точки разрыва функции $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-5)}$.

728. Каков характер разрыва функции $y=\dfrac{1}{1-e^{1-x}}$ в точке $x=1$?

729. Каков характер разрыва функции $y=\dfrac{\sin x}{x}$ в точке $x=0$?

730. Найти точки разрыва функции $y=\dfrac{\operatorname{tg} x \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-3}}{x(x-5)}$.

731. Найти точки разрыва функции $y=\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

732. Найти точки разрыва функции $y=\dfrac{x+1}{x^3+6x^2+11x+6}$.

733. Найти точки разрыва функции $y=\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

734. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-6)}$ на отрезке: 1) $[2, 5]$; 2) $[4, 10]$; 3) $[0, 7]$.

735. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{1}{x^4-26x^2+25}$ на отрезке: 1) $[6, 10]$; 2) $[-2, 2]$; 3) $[-6, 6]$.

Производная и дифференциал

1. Дифференцирование явных функций. Пусть x_1 и x_2 — значения аргумента, а $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ — соответствующие значения функции $y = f(x)$. Разность $\Delta x = x_2 - x_1$ называется *приращением аргумента*, а разность $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$ — *приращением функции* на отрезке $[x_1, x_2]$.

Производной от функции $y = f(x)$ по аргументу x называется конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ или } f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$\left(\text{производная обозначается также } \frac{dy}{dx}\right)$.

Геометрически производная представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x, т. е. $y' = \operatorname{tg} \alpha$.

Производная есть *скорость изменения* функции в точке x.

Отыскание производной называется *дифференцированием* функции.

Формулы дифференцирования основных функций

I. $(x^m)' = mx^{m-1}$.

II. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

III. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.

IV. $(e^x)' = e^x$.

V. $(a^x)' = a^x \ln a$.

VI. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

VII. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

VIII. $(\sin x)' = \cos x$.

IX. $(\cos x)' = -\sin x$.

X. $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$.

XI. $(\operatorname{ctg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x$.

XII. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

XIII. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

XIV. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

XV. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

XVI. $(\operatorname{sh} x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{ch} x$.

XVII. $(\operatorname{ch} x)' = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{sh} x$.

XVIII. $(\operatorname{th} x)' = \left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

XIX. $(\operatorname{cth} x)' = \left(\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Основные правила дифференцирования

Пусть C — постоянная, $u = u(x)$, $v = v(x)$ — функции, имеющие производные. Тогда:

1) $C' = 0$; 2) $x' = 1$; 3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$; 4) $(Cu)' = Cu'$;

5) $(uv)' = u'v + uv'$; 6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;

7) если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u(x)$ имеют производные, то

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

(правило дифференцирования сложной функции).

736. Исходя из определения производной (не пользуясь формулами дифференцирования), найти производную функции $y=2x^3+5x^2-7x-4$.

△ Дадим x приращение Δx, тогда y получит приращение Δy:

$$y+\Delta y=2(x+\Delta x)^3+5(x+\Delta x)^2-7(x+\Delta x)-4.$$

Найдем приращение функции:

$$\Delta y=[2(x+\Delta x)^3+5(x+\Delta x)^2-7(x+\Delta x)-4]-(2x^3+5x^2-7x-4)=$$
$$=6x^2\,\Delta x+6x\,\Delta x^2+2\Delta x^3+10x\,\Delta x+5\Delta x^2-7\Delta x.$$

Находим отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=6x^2+6x\,\Delta x+2\,\Delta x^2+10x+5\,\Delta x-7.$$

Найдем предел этого отношения при $\Delta x\longrightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(6x^2+6x\,\Delta x+2\Delta x^2+10x+5\Delta x-7)=6x^2+10x-7.$$

Следовательно, по определению производной $y'=6x^2+10x-7$. ▲

737. Исходя из определения производной, найти производную функции $y=\sqrt{x}$.

△ Находим приращение функции: $\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$. Отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Таким образом,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Итак, $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. ▲

738. Исходя из определения производной, найти производную функции $y = -\operatorname{ctg} x - x$.

△ Находим

$$\Delta y = -\operatorname{ctg}(x+\Delta x) - (x+\Delta x) + \operatorname{ctg} x + x = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}(x+\Delta x) - \Delta x.$$

Используя формулу $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$, получим

$$\Delta y = \frac{\sin(x+\Delta x - x)}{\sin x \sin(x+\Delta x)} - \Delta x = \frac{\sin \Delta x}{\sin x \sin(x+\Delta x)} - \Delta x,$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\sin \Delta x}{\Delta x}}{\sin x \sin(x+\Delta x)} - 1$$

и, следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\sin \Delta x}{\Delta x}}{\sin x \sin(x+\Delta x)} - 1 = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

Итак, $y' = \dfrac{1}{\sin^2 x} - 1 = \operatorname{ctg}^2 x$. ▲

Исходя из определения производной, найти производные функций:

739. $y=\frac{1}{x^2}$. **740.** $y=\sqrt[3]{x^2}$. **741.** $y=5\sin x+3\cos x$.

742. $y=5(\operatorname{tg} x-x)$. **743.** $y=\frac{1}{e^x+1}$. **744.** $y=2^{x^2}$.

Применяя формулы и правила дифференцирования, найти производные следующих функций:

745. $y=2x^3-5x^2+7x+4.$

$\triangle$ $y'=(2x^3)'-(5x^2)'+(7x)'+(4)'=2(x^3)'-5(x^2)'+7x'+4'=$
$$=2\cdot 3x^2-5\cdot 2x+7\cdot 1+0=6x^2-10x+7. \blacktriangle$$

746. $y=x^2e^x.$

$\triangle$ $y'=x^2(e^x)'+e^x\cdot(x^2)'=x^2e^x+2xe^x=xe^x(x+2). \blacktriangle$

747. $y=x^3\operatorname{arctg} x.$

$\triangle$ $y'=x^3(\operatorname{arctg} x)'+\operatorname{arctg} x\cdot(x^3)'=x^3\dfrac{1}{1+x^2}+3x^2\operatorname{arctg} x=$
$$=\frac{x^3}{1+x^2}+3x^2\operatorname{arctg} x. \blacktriangle$$

748. $y=x\sqrt{x}(3\ln x-2).$

$\triangle$ Перепишем заданную функцию в виде $y=x^{3/2}(3\ln x-2)$. Тогда $y'=$ $=x^{3/2}\cdot\dfrac{3}{x}+\dfrac{3}{2}x^{1/2}(3\ln\cdot x-2)=3x^{1/2}+\dfrac{9}{2}x^{1/2}\ln x-3x^{1/2}=\dfrac{9}{2}\sqrt{x}\ln x. \blacktriangle$

749. $y=\dfrac{\arcsin x}{x}$.

$$\triangle\ y'=\frac{x\cdot(\arcsin x)'-\arcsin x\cdot(x)'}{x^2}=$$

$$=\frac{x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\arcsin x}{x^2}=\frac{x-\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}.\ \blacktriangle$$

750. $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$.

$$\triangle\ y'=\frac{(\sin x+\cos x)(\cos x+\sin x)-(\sin x-\cos x)(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{2}{(\sin x+\cos x)^2}.\ \blacktriangle$$

751. $y=(2x^3+5)^4$.

$\triangle$ Обозначим $2x^3+5=u$, тогда $y=u^4$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$y'=(u^4)'_u\cdot(2x^3+5)'_x=4u^3(6x^2)=24x^2(2x^3+5)^3.\ \blacktriangle$$

752. $y = \operatorname{tg}^6 x.$

$\triangle$ $y' = 6 \operatorname{tg}^5 x \cdot (\operatorname{tg} x)' = 6 \operatorname{tg}^5 x \sec^2 x.$ $\blacktriangle$

753. $y = \cos^2 x.$

$\triangle$ $y' = 2 \cos x (\cos x)' = -2 \cos x \sin x = -\sin 2x.$ $\blacktriangle$

754. $y = \sin(2x+3).$

$\triangle$ $y' = \cos(2x+3) \cdot (2x+3)' = 2\cos(2x+3).$ $\blacktriangle$

755. $y = \operatorname{tg} \ln x.$

$\triangle$ $y' = \sec^2 \ln x \cdot (\ln x)' = \frac{1}{x} \cdot \sec^2 \ln x.$ $\blacktriangle$

756. $y = \sin^3 \frac{x}{3}.$

$\triangle$ $y' = 3 \sin^2 \frac{x}{3} \cdot \left(\sin \frac{x}{3}\right)' = 3 \sin^2 \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} \left(\frac{x}{3}\right)' = \sin^2 \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3}.$ $\blacktriangle$

757. $y = \ln(x^2+5).$

$\triangle$ $y' = \frac{1}{x^2+5} \cdot (x^2+5)' = \frac{2x}{x^2+5}.$ $\blacktriangle$

758. $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$.

$$\triangle\ y' = \frac{1}{\operatorname{tg}(x/2)} \cdot (\operatorname{tg}(x/2))' = \frac{1}{\operatorname{tg}(x/2)} \cdot \sec^2(x/2) \cdot (x/2)' =$$

$$= \frac{1}{2\operatorname{tg}(x/2)\cos^2(x/2)} = \frac{1}{2\sin(x/2)\cos(x/2)} = \frac{1}{\sin x}. \ \blacktriangle$$

759. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

$$\triangle\ y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}. \ \blacktriangle$$

760. $y = \ln\left(\sqrt{2\sin x+1} + \sqrt{2\sin x-1}\right)$.

$$\triangle\ y' = \frac{1}{\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1}}\left(\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1}}\left(\frac{2\cos x}{2\sqrt{2\sin x+1}} + \frac{2\cos x}{2\sqrt{2\sin x-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1}} \cdot \frac{\cos x\left(\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1}\right)}{\sqrt{4\sin^2 x-1}} =$$

$$= \frac{\cos x}{\sqrt{4\sin^2 x-1}}. \ \blacktriangle$$

762. $y=\arcsin\dfrac{2x^2}{1+x^4}$, $|x|<1$.

$$\triangle\ y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right)^2}}\cdot\left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right)^2}}\times$$

$$\times\frac{(1+x^4)\cdot 4x-2x^2\cdot 4x^3}{(1+x^4)^2}=\frac{1}{\sqrt{1-2x^4+x^8}}\cdot\frac{4x(1-x^4)}{1+x^4}=\frac{4x}{1+x^4}.\ \blacktriangle$$

763. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\ln x}{3}$.

$$\triangle\ y'=\frac{1}{1+(\ln^2 x)/9}\cdot\frac{1}{3x}=\frac{3}{x(9+\ln^2 x)}.\ \blacktriangle$$

764. $y=e^x\cdot\operatorname{arctg}e^x-\ln\sqrt{1+e^{2x}}$.

$\triangle$ Записав данную функцию в виде

$$y=e^x\operatorname{arctg}e^x-\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}),$$

получим

$$y'=e^x\cdot\frac{1}{1+e^{2x}}\cdot e^x+e^x\operatorname{arctg}e^x-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+e^{2x}}\,e^{2x}\cdot 2=$$

$$=\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}+e^x\operatorname{arctg}e^x-\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}=e^x\operatorname{arctg}e^x.\ \blacktriangle$$

765. $y=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}+\ln\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$.

△ Преобразуем данную функцию:

$$y=\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\ln(1+\sin x)-\ln\cos x.$$

Тогда

$$y'=\frac{\cos^2 x\cos x-\sin x\cdot 2\cos x(-\sin x)}{\cos^4 x}+\frac{1}{1+\sin x}\cos x-\frac{1}{\cos x}(-\sin x),$$

или

$$y'=\frac{\cos^2 x+2\sin^2 x}{\cos^3 x}+\frac{\cos x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos^2 x+2\sin^2 x}{\cos^3 x}+\frac{1-\sin x}{\cos x}+$$
$$+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos^2 x+2\sin^2 x}{\cos^3 x}+\frac{1}{\cos x}=\frac{2}{\cos^3 x}=2\sec^3 x.\ ▲$$

766. $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\sqrt{x}+\ln\cos\sqrt{x}$.

△ $$y'=\operatorname{tg}\sqrt{x}\sec^2\sqrt{x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\cos\sqrt{x}}(-\sin\sqrt{x})\,\frac{1}{2\sqrt{x}}=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{tg}\sqrt{x}(\sec^2\sqrt{x}-1)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{tg}^3\sqrt{x}.\ ▲$$

767. $y=5\operatorname{sh}^3\frac{x}{15}+3\operatorname{sh}^5\frac{x}{15}$.

△ Находим

$$y'=15\operatorname{sh}^2\frac{x}{15}\operatorname{ch}\frac{x}{15}\cdot\frac{1}{15}+15\operatorname{sh}^4\frac{x}{15}\operatorname{ch}\frac{x}{15}\cdot\frac{1}{15}=\operatorname{sh}^2\frac{x}{15}\operatorname{ch}\frac{x}{15}\left(1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{15}\right),$$

откуда, используя соотношение $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$, окончательно получаем $y'=$ $=\operatorname{sh}^2\frac{x}{15}\operatorname{ch}^3\frac{x}{15}$. ▲

768. $y=x^{x^2}$.

△ Здесь основание и показатель степени зависят от x. Логарифмируя, получим $\ln y=x^2\ln x$. Продифференцируем обе части последнего равенства по x. Так как y является функцией от x, то $\ln y$ есть сложная функция x и $(\ln y)'=$ $=\frac{1}{y}\cdot y'$. Следовательно,

$$\frac{y'}{y}=x^2\cdot\frac{1}{x}+2x\ln x,\quad \frac{y'}{y}=x(1+2\ln x),$$

т. е.

$$y'=xy(1+2\ln x)=xx^{x^2}(1+2\ln x)=x^{x^2+1}(1+2\ln x). \ ▲$$

769. $y=(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

△ Имеем $\ln y=\operatorname{tg} x\cdot\ln\sin x$, откуда

$$\frac{y'}{y}=\operatorname{tg} x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x+\sec^2 x\ln\sin x=1+\sec^2 x\ln\sin x;$$

$$y'=y(1+\sec^2 x\ln\sin x)=(\sin x)^{\operatorname{tg} x}(1+\sec^2 x\ln\sin x). \ ▲$$

770. $y=\dfrac{(2x-1)^3\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}$.

△ Здесь заданную функцию также следует предварительно прологарифмировать:

$$\ln y=3\ln(2x-1)+\frac{1}{2}\ln(3x+2)-2\ln(5x+4)-\frac{1}{3}\ln(1-x);$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{3}{2x-1}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3x+2}-2\cdot\frac{5}{5x+4}+\frac{1}{3(1-x)};$$

$$y'=\frac{(2x-1)^3\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}\left[\frac{6}{2x-1}+\frac{3}{2(3x+2)}-\frac{10}{5x+4}+\frac{1}{3(1-x)}\right].\ ▲$$

Найти производные функций:

771. $y=\dfrac{7}{x^3}$. **772.** $y=\dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x}$.

773. $y=\dfrac{2}{7}x^3\sqrt{x}-\dfrac{4}{11}x^5\sqrt{x}+\dfrac{2}{15}x^7\sqrt{x}$.

774. $y=(x^2+2x+2)e^{-x}$. **775.** $y=3x^3\ln x-x^3$.

776. $y=\dfrac{2^{3x}}{3^{2x}}$. **777.** $y=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x$.

778. $y=\ln(2x^3+3x^2)$. **779.** $y=\sqrt{1-3x^2}$.

780. $y=x\arccos\dfrac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}$.

781. $y=\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$.

782. $y=\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2$. **783.** $y=\cos^3(x/3)$.

784. $y=\ln\operatorname{tg}\frac{2x+1}{4}$. **785.** $y=\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$.

786. $y=\operatorname{tg}2x+\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 2x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 2x$.

787. $y=\frac{1}{3}\sin^3\sqrt{x}-\frac{2}{5}\sin^5\sqrt{x}+\frac{1}{7}\sin^7\sqrt{x}$.

788. $y=\ln\left(3x^2+\sqrt{9x^4+1}\right)$. **789.** $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$.

790. $y=\ln\frac{\sqrt{4\operatorname{tg}x+1}-2\sqrt{\operatorname{tg}x}}{\sqrt{4\operatorname{tg}x+1}+2\sqrt{\operatorname{tg}x}}$. **791.** $y=-\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}-2\ln\sin\frac{x}{2}$.

792. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{4x^2-1}$. **793.** $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

794. $y=\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$. **795.** $y=\arcsin\frac{2x^3}{1+x^6}$, если $|x|<1$.

796. $y=\arccos\frac{9-x^2}{9+x^2}$. **797.** $y=e^{-x}-\sin e^{-x}\cos e^{-x}$.

2. Дифференцирование неявных функций. Пусть уравнение $F(x, y)=0$ определяет y как неявную функцию от x. В дальнейшем будем считать эту функцию дифференцируемой.

Продифференцировав по x обе части уравнения $F(x, y)=0$, получим уравнение первой степени относительно y'. Из этого уравнения легко находится y', т. е. производная неявной функции для всех значений x и y, при которых множитель при y' в уравнении не обращается в нуль.

896. Найти производную y'_x из уравнения $x^2+y^2=4$.

△ Так как y является функцией от x, то будем рассматривать y^2 как сложную функцию от x. Следовательно, $(y^2)'=2yy'$. Продифференцировав по x обе части данного уравнения, получим $2x+2yy'=0$, т. е. $y'=-x/y$. ▲

897. Найти производную y'_x из уравнения $x^3+\ln y-x^2e^y=0$.

△ Дифференцируя по x обе части уравнения, получаем

$$3x^2+\frac{y'}{y}-x^2e^yy'-2xe^y=0, \text{ т. е. } y'=\frac{(2xe^y-3x^2)\,y}{1-x^2ye^y}. \ ▲$$

Найти производную y'_x от неявных функций:

898. $x^3 + y^3 - 3xy = 0.$

899. $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$

900. $x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4 - 5x^2 + 15y^2 - 100 = 0.$

901. $x^y - y^x = 0.$ **902.** $x \sin y + y \sin x = 0.$

903. $e^x + e^y - 2^{xy} - 1 = 0.$

904. $\sin(y - x^2) - \ln(y - x^2) + 2\sqrt{y - x^2} - 3 = 0.$

905. $\frac{y}{x} + e^{y/x} - \sqrt[3]{\frac{y}{x}} = 0.$ **906.** $x^{y^2} + y^2 \ln x - 4 = 0.$

907. $x^2 \sin y + y^3 \cos x - 2x - 3y + 1 = 0.$

3. Дифференцирование функций, заданных параметрически. Если функция аргумента x задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}, \text{ или } \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

908. Найти $y'=\frac{dy}{dx}$, если $x=t^3+3t+1$, $y=3t^5+5t^3+1$.

△ Найдем $\frac{dx}{dt}=3t^2+3$, $\frac{dy}{dt}=15t^4+15t^2$. Следовательно, $\frac{dy}{dx}=\frac{15t^4+15t^2}{3t^2+3}=$ $=5t^2$. ▲

909. Найти $y'=\frac{dy}{dx}$, если $x=a\cos t$, $y=a\sin t$.

910. Найти $y'=\frac{dy}{dx}$, если $x=e^{-t}\sin t$, $y=e^t\cos t$.

911. Найти $\rho'=\frac{d\rho}{d\theta}$, если $\rho=\left(\frac{2}{3}\sqrt{\alpha}+1\right)\alpha$, $\theta=\sqrt{\alpha}\,e^{\sqrt{\alpha}}$.

912. Найти $y'=\frac{dy}{dx}$, если $x=\operatorname{ch} t$, $y=\operatorname{sh} t$.

4. Приложения производной к задачам геометрии и механики. Если кривая задана уравнением $y=f(x)$, то $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол, образованный с положительным направлением оси Ox касательной к кривой в точке с абсциссой x_0.

Уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ имеет вид

$$y-y_0=y_0'(x-x_0),$$

где y_0' есть значение производной y' при $x=x_0$.

Нормалью к кривой называется прямая, перпендикулярная касательной и проходящая через точку касания.

Уравнение нормали имеет вид

$$y-y_0=-\frac{1}{y_0'}(x-x_0).$$

Углом между двумя кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ в точке их пересечения $M_0(x_0;\ y_0)$ называется угол между касательными к этим кривым в точке M_0. Этот угол находится по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{f_2'(x_0)-f_1'(x_0)}{1+f_1'(x_0)\,f_2'(x_0)}.$$

Если при прямолинейном движении точки задан закон движения $s=s(t)$, то скорость движения в момент t_0 есть производная пути по времени: $v=s'(t_0)$.

913. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к кривой $y=(2/3)x^5-(1/9)x^3$, проведенная в точке с абсциссой $x=1$?

△ Находим производную $y'=(10/3)x^4-(1/3)x^2$; при $x=1$ имеем $y'=3$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha=3$, откуда $\alpha=\operatorname{arctg} 3 \approx 71°34'$. ▲

914. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к параболе $y=x^2-3x+5$, проведенная в точке $M(2;\ 3)$? Написать уравнение этой касательной.

915. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $x^2+2xy^2+3y^4=6$ в точке $M(1;\ -1)$.

△ Из уравнения кривой найдем производную:

$$2x+2y^2+4xyy'+12y^3y'=0, \text{ т. е. } y'=-\frac{x+y^2}{2xy+6y^3}.$$

Следовательно, $y_0'=-\dfrac{1+(-1)^2}{2\cdot 1(-1)+6(-1)^3}=\dfrac{1}{4}$.

Уравнение касательной

$$y+1=\frac{1}{4}(x-1), \text{ или } x-4y-5=0.$$

Уравнение нормали

$$y+1=-4(x-1), \text{ или } 4x+y-3=0. \ ▲$$

916. Найти угол между параболами $y=8-x^2$ и $y=x^2$.

△ Решив совместно уравнения парабол, находим точки их пересечения $A(2;\ 4)$ и $B(-2;\ 4)$. Продифференцируем уравнения парабол: $y'=-2x$, $y'=2x$. Найдем угловые коэффициенты касательных к параболам в точке A (т. е. значения производных при $x=2$): $k_1=-4$, $k_2=4$. Следовательно, $\operatorname{tg}\varphi_1=\dfrac{4+4}{1-16}=-\dfrac{8}{15}$, $\varphi_1=\operatorname{arctg}(-8/15)$. Так же определяется угол между кривыми в точке B: $\varphi_2=$ $=\operatorname{arctg}(8/15)$. ▲

917. Найти уравнение нормали к параболе $y^2=2px$ в точке $M(x_0;\ y_0)$.

918. Составить уравнение касательной к гиперболе $x^2/9-y^2/8=1$, проведенной в точке $M(-9;\ -8)$.

919. Составить уравнения касательной и нормали к астроиде $x=\sqrt{2}\cos^3 t$, $y=\sqrt{2}\sin^3 t$, проведенных в точке, для которой $t=\pi/4$.

920. Составить уравнения касательной и нормали к циклоиде $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, проведенных в точке, для которой $t=\pi/2$.

921. Составить уравнения касательной и нормали к полукубической параболе $x=t^2$, $y=t^3$, проведенных в точке, для которой $t=2$.

6. Производные высших порядков. *Производной второго порядка* (*второй производной*) функции $y=f(x)$ называется производная от ее производной. Вторая производная обозначается так: y'', или $\frac{d^2y}{dx^2}$, или $f''(x)$.

Если $s=f(t)$ — закон прямолинейного движения точки, то вторая производная пути по времени $\frac{d^2s}{dt^2}$ есть *ускорение* этого *движения*.

Аналогично *производная третьего порядка* функции $y=f(x)$ есть производная от производной второго порядка: $y'''=(y'')'$.

Вообще, *производной n-го порядка* от функции $y=f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка: $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$. Обозначается n-я производная так: $y^{(n)}$ или $\frac{d^ny}{dx^n}$, или $f^{(n)}(x)$.

Производные высших порядков (вторая, третья и т. д.) вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Если функция задана параметрически: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то производные y'_x, y'''_{xx}, ..., вычисляются по формулам

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t},\quad y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t},\quad y'''_{xxx}=\frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}\quad \text{и т. д.}$$

Производную второго порядка можно вычислить также по формуле

$$y''_{xx}=\frac{y''_{tt}\,x'_t-x''_{tt}\,y'_t}{(x'_t)^3}.$$

945. $y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 0{,}5x + 7$. Найти y', y'', y''', ...

△ $y' = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 2x - 0{,}5,$

$y'' = 20x^3 + 24x^2 - 18x - 2,$

$y''' = 60x^2 + 48x - 18,$

$y^{\text{IV}} = 120x + 48,\ y^{\text{V}} = 120,\ y^{\text{VI}} = y^{\text{VII}} = \ldots = 0.$ ▲

946. $y = \ln x$. Найти $y^{(n)}$.

△ $y' = \dfrac{1}{x} = x^{-1},$

$y'' = -1 \cdot x^{-2},$

$y''' = 1 \cdot 2x^{-3},$

$y^{\text{IV}} = -1 \cdot 2 \cdot 3x^{-4},$

. . . .

$$y^{(n)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\,(-1)^{n-1} \cdot x^{-n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}.$$ ▲

947. $x = 2^x$. Найти $y^{(n)}$.

△ $y' = 2^x \ln 2,$

$y'' = 2^x \ln^2 2,$

$y''' = 2^x \ln^3 2,$

. . . .

$y^{(n)} = 2^x \ln^n 2.$

948. $y=\sin x$. Найти $y^{(n)}$.

$$\triangle\ y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''=-\sin x=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'''=-\cos x=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).\ \blacktriangle$$

949. Найти $y'=\dfrac{dy}{dx}$, $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

$$\triangle\ y'=\frac{dy}{dx}=\frac{(a\sin^3 t)'_t}{(a\cos^3 t)'_t}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-\operatorname{tg} t,$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(-\operatorname{tg} t)'_t}{(a\cos^3 t)'_t}=\frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t}=\frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}.\ \blacktriangle$$

Найти производные второго порядка:

950. $y=-\dfrac{22}{x+5}$. **951.** $y=\dfrac{1}{4}x^2(2\ln x-3)$.

952. $y=\dfrac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2}+\dfrac{2}{3}\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x$.

954. $y = x \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) - \sqrt{x^2 + a^2}$.

955. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$ **956.** $\begin{cases} x = \arccos \sqrt{t}, \\ y = \sqrt{t - t^2}. \end{cases}$

957. Показать, что функция $y = \sin \ln x + \cos \ln x$ удовлетворяет уравнению $x^2 y'' + xy' + y = 0$.

958. Показать, что функция $y = x + \sin 2x$ удовлетворяет уравнению $y'' + 4y = 4x$.

959. При прямолинейном движении точки зависимость пути от времени задана уравнением $s = \sqrt{t}$. Найти ускорение точки в конце 4-й секунды.

Найти производные третьего порядка:

960. $y = \dfrac{x}{6(x+1)}$. **961.** $y = \dfrac{1}{2} \ln^2 x$.

962. $y = (2x + 3)^3 \sqrt{2x + 3}$. **963.** $y = \operatorname{sh}^2 x$.

● Учесть, что $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.

Найти производные n-го порядка:

964. $y = x^n \sqrt{x}$. **965.** $y = \dfrac{1}{2x+1}$. **966.** $y = 5 - 3\cos^2 x$.

967. $y = 2^x + 2^{-x}$. **968.** $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$. **969.** $y = e^{kx}$.

8. Дифференциалы первого и высших порядков. *Дифференциалом* (*первого порядка*) функции $y = f(x)$ называется главная часть ее приращения, линейная относительно приращения аргумента. Дифференциалом аргумента называется приращение аргумента: $dx = \Delta x$.

Дифференциал функции равен произведению ее производной на дифференциал аргумента:

$$dy = y' dx.$$

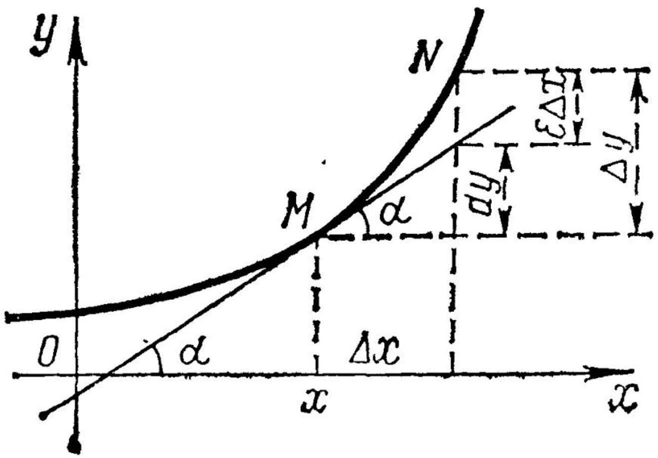


Рис. 28

Геометрически дифференциал представляет собой приращение ординаты касательной к графику функции в точке $M(x; y)$ (рис. 28).

Основные свойства дифференциала

1^0. $dC = 0$, где $C = \text{const}$.

2^0. $d(Cu) = C\,du$.

3^0. $d(u \pm v) = du \pm dv$.

4^0. $d(uv) = u\,dv + v\,du$.

5^0. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2} \quad (v \neq 0)$.

6^0. $df(u) = f'(u)\,du$.

Если приращение Δx аргумента мало по абсолютной величине, то $\Delta y \approx dy$ и

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x.$$

Таким образом, дифференциал функции может применяться для приближенных вычислений.

Дифференциалом второго порядка функции $y=f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка: $d^2y = d(dy)$.

Аналогично определяется дифференциал третьего порядка: $d^3y = d(d^2y)$.

Вообще, $d^ny = d(d^{n-1}y)$.

Если $y=f(x)$ и x — независимая переменная, то дифференциалы высших порядков вычисляются по формулам

$$d^2y = y''(dx)^2,\ d^3y = y'''(dx)^3,\ \ldots,\ d^ny = y^{(n)}(dx)^n.$$

975. Найти дифференциал функции $y = \operatorname{arctg} x$.

△ $dy = (\operatorname{arctg} x)' \cdot dx = \dfrac{dx}{1+x^2}$. ▲

976. Найти дифференциал функции $s = e^{t^3}$.

△ $ds = e^{t^3} \cdot 3t^2\,dt$. ▲

977. Найти дифференциалы первого, второго и третьего порядков функции $y = (2x-3)^3$.

△ $dy = 3(2x-3)^2 \cdot 2dx = 6(2x-3)^2\,dx$,
$d^2y = 12(2x-3) \cdot 2dx^2 = 24(2x-3)\,dx^2$,
$d^3y = 24 \cdot 2dx^3 = 48\,dx^3$. ▲

978. Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $v = e^{2t}$.

△ $dv = 2e^{2t}\,dt$, $d^2v = 4e^{2t} \cdot dt^2$. ▲

979. Сравнить приращение и дифференциал функции $y=2x^3+5x^2$.

$\triangle$ Находим

$\Delta y=2\,(x+\Delta x)^3+5\,(x+\Delta x)^2-2x^3-5x^2=(6x^2+10x)\,\Delta x+(6x+5)\,\Delta x^2+2\Delta x^3,$
$dy=(6x^2+10x)\,dx.$

Разность между приращением Δy и дифференциалом dy есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с Δx, равная $(6x+5)\,\Delta x^2+2\Delta x^3$. $\blacktriangle$

980. Вычислить приближенное значение $\arcsin 0{,}51$.

$\triangle$ Рассмотрим функцию $y=\arcsin x$. Полагая $x=0{,}5$, $\Delta x=0{,}01$ и применяя формулу $\arcsin(x+\Delta x)\approx\arcsin x+(\arcsin x)'\,\Delta x$, получаем

$$\arcsin 0{,}51\approx\arcsin 0{,}5+\frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}}\cdot 0{,}01=\frac{\pi}{6}+0{,}011=0{,}513.\ \blacktriangle$$

981. Вычислить приближенное значение площади круга, радиус которого равен 3,02 м.

$\triangle$ Воспользуемся формулой $S=\pi R^2$. Полагая $R=3$, $\Delta R=0{,}02$, имеем

$$\Delta S\approx dS=2\pi R\cdot\Delta R=2\pi\cdot 3\cdot 0{,}02=0{,}12\pi.$$

Следовательно, приближенное значение площади круга составляет $9\pi+0{,}12\pi=$ $=9{,}12\pi\approx 28{,}66$ (м^2). $\blacktriangle$

Найти дифференциалы функций:

982. $y=\frac{x}{2}\sqrt{49-x^2}+\frac{49}{2}\arcsin\frac{x}{7}$. **983.** $x=\frac{1}{12}\ln\frac{x-6}{x+6}$.

984. $y=2\ln \operatorname{ch}(x/2)$. **985.** $y=\operatorname{arctg} e^{2x}$

986. Найти dy, d^2y, d^3y, если $y=x(\ln x-1)$.

987. Найти d^2y, если $y=\ln(x+\sqrt{x^2+4})$.

988. Сравнить приращение и дифференциал функции $y=1/x$.

989. Вычислить Δy и dy для функции $y=x^2-2x$ при $x=3$ и $\Delta x=0{,}01$.

990. Найти приближенное значение объема шара радиуса 2,01 м.

991. Найти приближенное значение x из уравнения $13\sin x-15\cos x=0$.

Найти приближенное значение:

992. $\operatorname{arctg} 1{,}05$. **993.** $\operatorname{tg} 46°$.

994. $\ln \operatorname{tg} 47°15'$. **995.** $\sqrt[4]{15{,}8}$.

Алгоритм **исследования функции и построения ее графика**

1. Находим **области определения** **(D(f))** функции .

2. Если область определения функции симметрична относительно нуля (то есть для любого значения из D(f) значение также принадлежит области определения, то **проверяем функцию на четность.**

Если $f(-x)=f(x)$, то функция **четная**. Для нас важно, что **график четной функции симметричен относительно оси OY.**

Если $f(-x)=-f(x)$, то функция **нечетная**. График **нечетной функции симметричен относительно начала координат.**

Если функция является четной или нечетной, то мы можем построить часть ее графика для, а затем соответствующим образом отразить ее.

3. Находим точки пересечения графика с осями координат.

Находим нули функции - это точки пересечения графика функции с осью абсцисс (OX).

Для этого мы решаем уравнение f(x) = 0 .

Корни этого уравнения являются ***абсциссами точек пересечения графика функции с осью ОХ.***

Находим точку пересечения графика функции с осью ординат (OY). Для этого ищем значение функции при x = 0.

4. Находим промежутки знакопостоянства функции, то есть промежутки, на которых функция сохраняет знак. Это нам потребуется для контроля правильности построения графика.

Чтобы найти промежутки знакопостоянства функции , нам нужно решить неравенства $f\left(x\right)>0$ и $f\left(x\right)<0$.

5. Находим асимптоты графика функции.

- Как найти асимптоты https://ege-ok.ru/2013/11/12/asimptotyi-grafika-funktsii/

6. Если функция периодическая, то **находим период функции**.

7. Исследуем функцию с помощью производной: **находим промежутки возрастания и убывания функции, а также точки максимума и минимума.**

Для этого мы следуем привычному алгоритму.

а) Находим производную f(x)

б) Приравниваем производную к нулю и находим корни уравнения $f'(x) = 0$ - это стационарные точки.

в) Находим промежутки знакопостоянства производной. Промежутки, на которых **производная положительна**, являются промежутками **возрастания** функции.

Промежутки, на которых **производная отрицательна**, являются промежутками **убывания** функции.

Точки, в которых производная меняет знак с плюса на минус, являются точками максимума.

Точки, в которых производная меняет знак с минуса на плюс, являются точками минимума.

- **8.** Последний этап- **точки перегиба и промежутки выпуклости и вогнутости.**
- Подробнее о том, ***как находить точки перегиба и промежутки выпуклости и вогнутости*** читайте https://ege-ok.ru/2013/11/15/tochki-peregiba-i-promezhutki-vyipuklosti-i-vognutosti-grafika-funktsii/ .

Итак, давайте, для примера, исследуем функцию $y=\frac{x^3}{x^2-3}$ и построим ее график.

1. Найдем D(y).

$x^2-3\neq 0$

$x\neq\pm\sqrt{3}$

Сразу отметим, что при $x=\pm\sqrt{3}$ знаменатель дроби равен нулю, следовательно, прямые $x=\sqrt{3}$ и $x=-\sqrt{3}$ являются вертикальными асимптотами графика функции $y=\frac{x^3}{x^2-3}$.

2. Исследуем функцию на четность. Область определения функции симметрична относительна нуля (мы выкололи две симметричные точки: $x=\sqrt{3}$ и $x=-\sqrt{3}$)

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-3}=\frac{-x^3}{x^2-3}=-f(x)$$

Получили, что $f(-x)=-f(x)$, следовательно, функция $y=\frac{x^3}{x^2-3}$ - **нечетная**, и график функции **симметричен относительно начала координат.**

3. Найдем точки пересечения с осями координат.

а) Точки пересечения с осью OX (y=0)

$$\frac{x^3}{x^2-3}=0$$

$$x=0$$

б) Точка пересечения с осью OY (x=0)

$$y=\frac{0}{0-3}=0$$

График нашей функции проходит через начало координат.

4. Найдем промежутки знакопостоянства.

Решим неравенство $\frac{x^3}{x^2-3}>0$

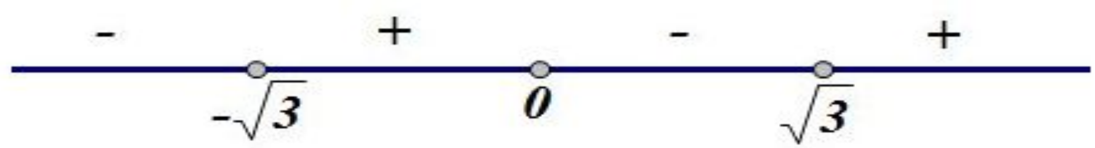
Воспользуемся методом интервалов.

Найдем корни числителя и знаменателя, нанесем их на числовую ось и расставим знаки:

Корень числителя: $x=0$

Корни знаменателя: $x=\sqrt{3}$; $x=-\sqrt{3}$

Расставим знаки:



Итак, $f(x)>0$ при $x\in\left(-\sqrt{3};0\right)$ и $x\in\left(\sqrt{3};\infty\right)$

$f(x)<0$ при $x\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$ и $x\in\left(0;\sqrt{3}\right)$

5. Найдем асимптоты графика функции $y=\frac{x^3}{x^2-3}$.

Вертикальные асимптоты мы уже нашли в п.1, это прямые $x=\sqrt{3}$ и $x=-\sqrt{3}$.

Уравнение горизонтальной асимптоты функции $y=\frac{x^3}{x^2-3}$ имеет вид $y=b$, где

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2-3}.$$

Степень числителя дроби $\frac{x^3}{x^2-3}$ на единицу больше степени знаменателя, поэтому $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2-3}$ не существует, и график функции $y=\frac{x^3}{x^2-3}$ не имеет горизонтальной асимптоты.

Попробуем найти наклонную асимптоту.

Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y=kx+b$.

Коэффициенты k и b вычисляются следующим образом:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

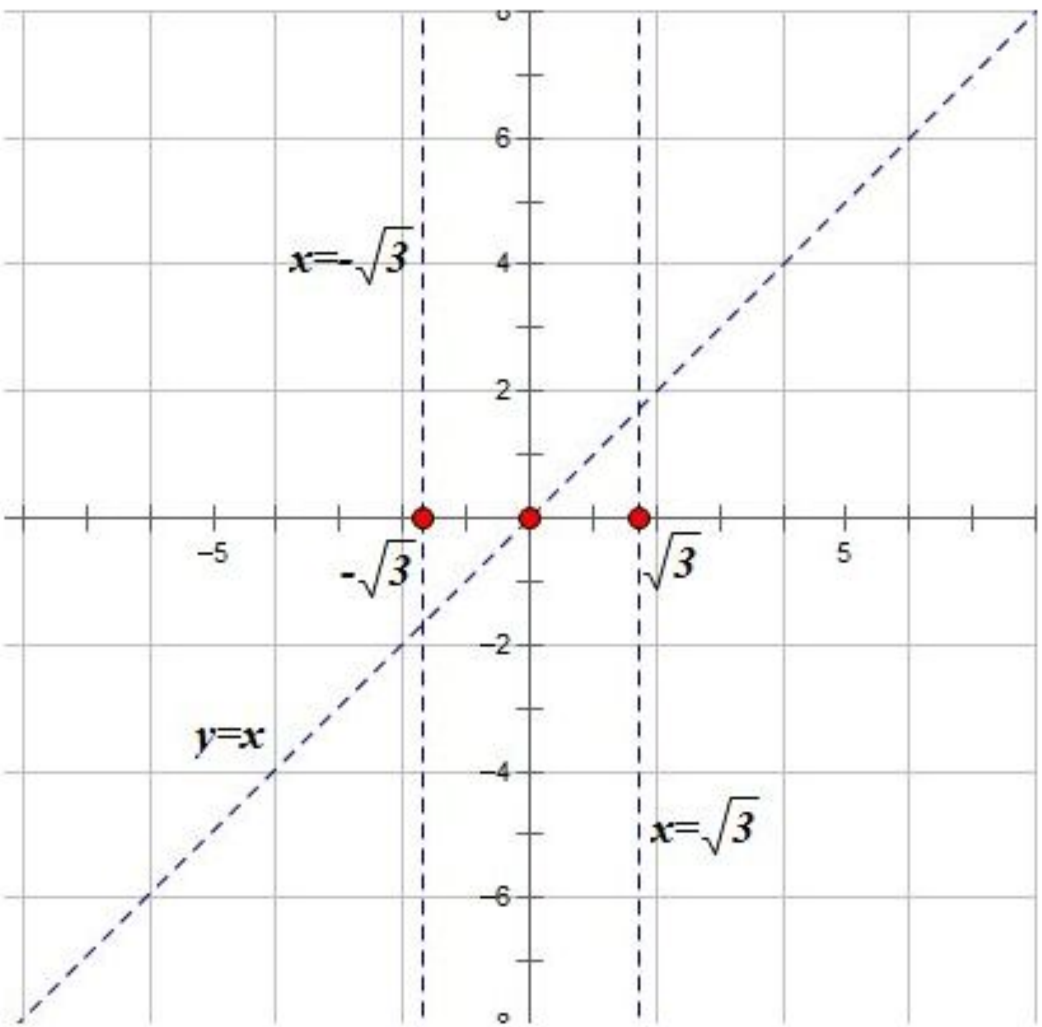
$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)$$

В нашем случае $k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x\left(x^2-3\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3-3x}=1$.

$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-3}-x\right)=\frac{x^3-x^3+3x}{x^2-3}=\frac{3x}{x^2-3}=0$ (Степень знаменателя на единицу больше степени числителя).

То есть уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y=x$.

Нанесем асимптоты на координатную плоскость:



6. Найдем промежутки возрастания-убывания функции $y=\dfrac{x^3}{x^2-3}$ и экстремумы.

а) Найдем производную функции $y=\dfrac{x^3}{x^2-3}$

$$y'=\left(\frac{x^3}{x^2-3}\right)'=\frac{3x^2\left(x^2-3\right)-x^3\left(2x\right)}{\left(x^2-3\right)^2}=\frac{3x^4-9x^2-2x^4}{\left(x^2-3\right)^2}=\frac{x^4-9x^2}{\left(x^2-3\right)^2}$$

б) Приравняем производную к нулю:

$$x^4-9x^2=0$$

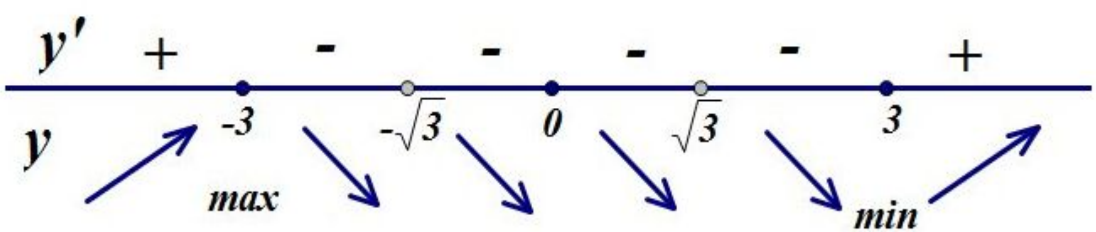
$$x^2\left(x^2-9\right)=0$$

$x=0$ (корень четной кратности); $x=-3$; $x=3$

Корни знаменателя - $x=\pm\sqrt{3}$ - также корни четной кратности.

В корнях четной кратности производная знак не меняет.

в) Нанесем нули производной и корни ее знаменателя на числовую ось, расставим знаки и найдем точки экстремума и промежутки возрастания и убывания.



Итак, мы нашли промежутки возрастания и убывания.

Найдем значение функции в точках экстремума:

$x_{\max}=-3$

$$y_{\max}=y(-3)=\frac{(-3)^3}{(-3)^2-3}=\frac{-27}{6}=-4{,}5$$

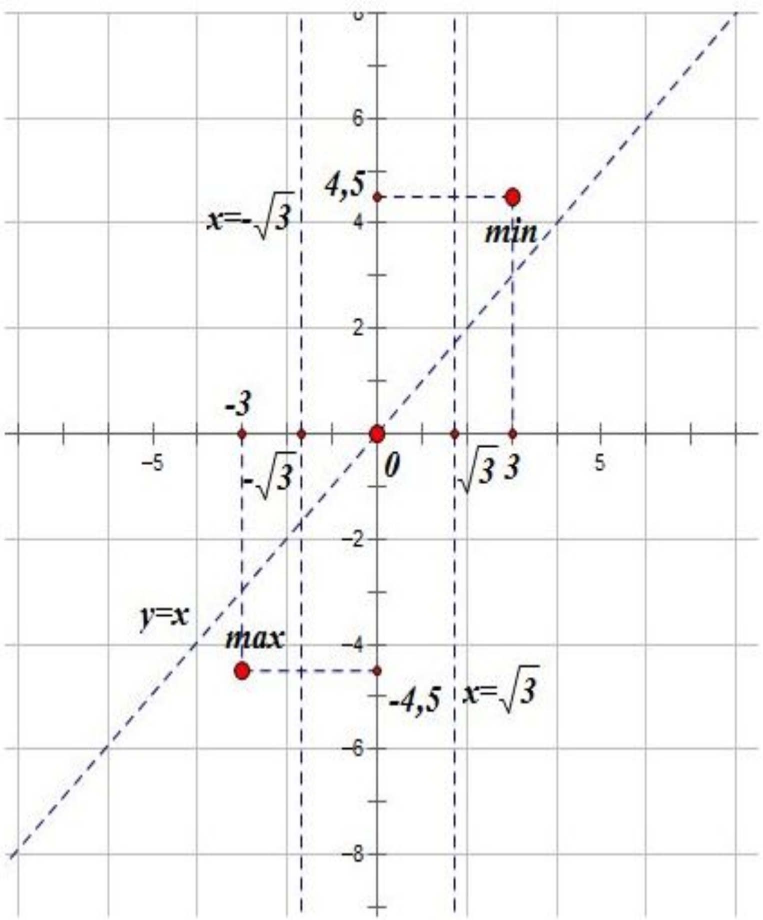
$x_{\min}=3$

$$y_{\min}=y(3)=\frac{(3)^3}{(3)^2-3}=\frac{27}{6}=4{,}5$$

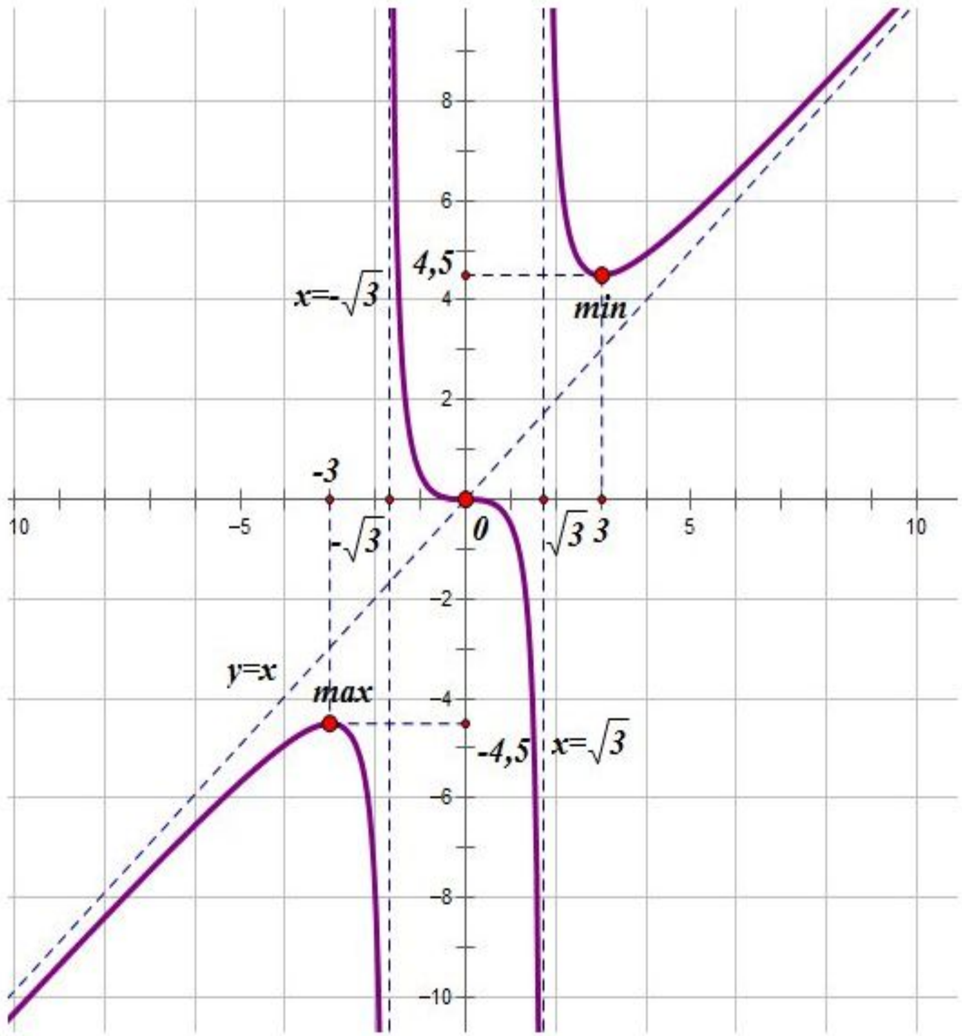
Заметим, что, поскольку функция $\frac{x^3}{x^2-3}$ нечетная, и мы нашли, что $y(-3)=-4{,}5$, мы могли бы сразу написать, что $y(3)=4{,}5$

Итак, отметим в нашей координатной плоскости точки минимума и максимума функции и точку пересечения графика функции с осями координат.

На рисунке ниже большими красными кружками обозначены точки, через которые проходит график функции.



Теперь учтем промежутки возрастания-убывания и промежутки знакопостоянства функции (п. 4) и построим ее график. ***Помним, что график функции не пересекает абсциссы, он лишь приближается к ним!***



После построения графика необходимо еще раз просмотреть все пункты исследования функции и проверить, соответствует ли полученный график всем пунктам.

Если наблюдается какое-то несоответствие, то необходимо повторить исследование и найти причину нестыковки графика и поведения функции.

Задание к зачету

-
  - Провести исследование функции и построить ее график

$$y = \frac{2x^2}{x-3}$$