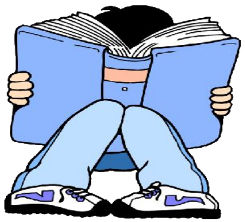
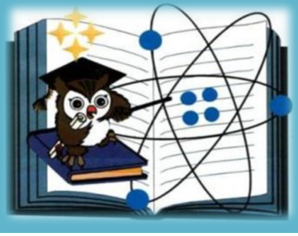
Математика в таблицах

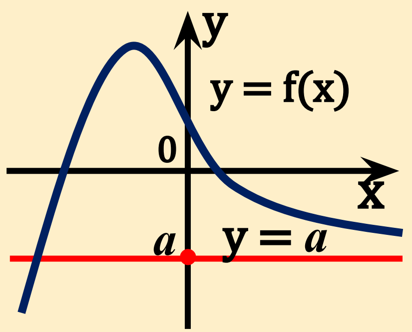


Начала математического анализа

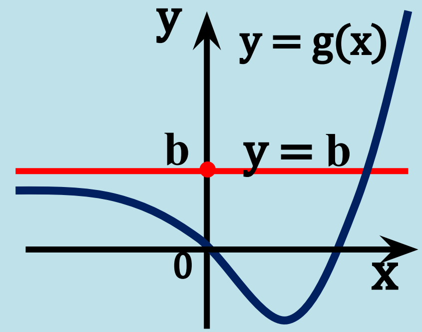


РАЗРАБОТАЛА АНДРЮХИНА М.И.
ГАПОУ КК КГТК
КРАСНОДАР 2016 Г.

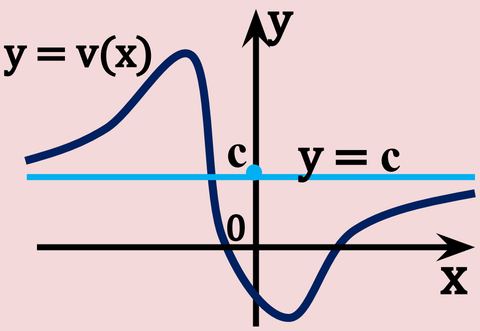
Таблица 1. Предел функции на бесконечности



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$$

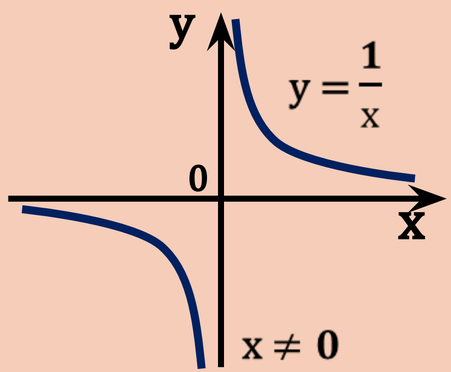


$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = b$$

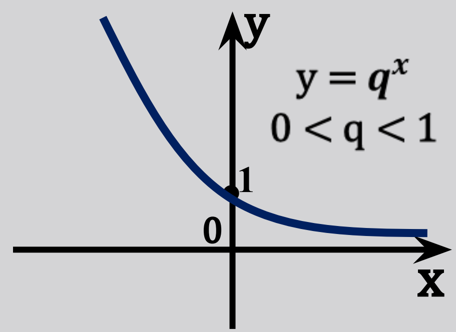


$$\lim_{x\to\pm\infty} v(x) = c$$

Пределы элементарных функций

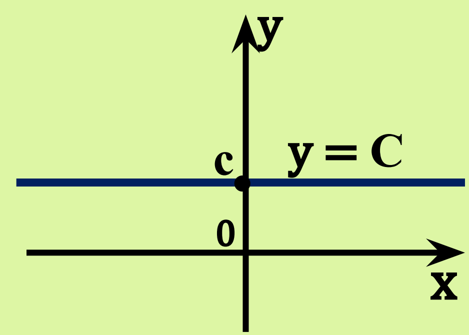


$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0}$$



$0 < q < 1$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} q^x = 0}$$



C – const

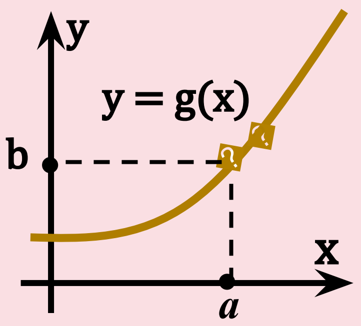
$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} C = C}$$

Таблица 1. Предел функции на бесконечности

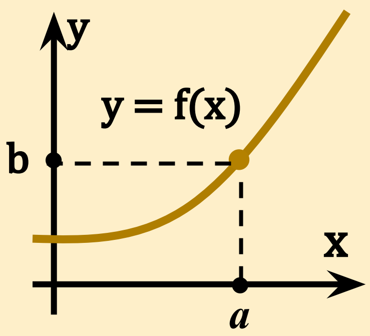
Пределы функций

СВОЙСТВА ПРЕДЕЛОВ	
1	
2	
3	
4	

Таблица 2. Предел функции в точке



$$\lim_{x \to a} g(x) = b$$
$$g(a) \neq b$$



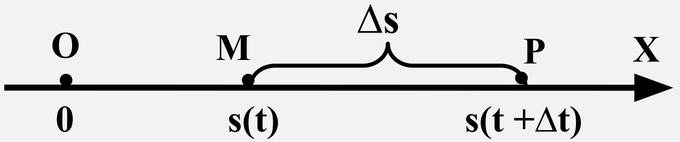
$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$
$$f(a) = b$$
$$\Downarrow$$

$y = f(x)$ – непрерывная функция

СВОЙСТВА ПРЕДЕЛОВ	
1	
2	
3	
4	

Таблица 3. Задачи, приводящие к понятию производной. Мгновенная скорость движущегося тела.

Задача. **Тело движется по закону s(t), где t − время (с), s(t) − положение тела в момент времени t. Найти скорость тела в момент времени t.**



Решение. **M − положение тела в момент времени t: OM = s(t).**
P − положение тела в момент времени (t + Δt): OP = s(t + Δt).
За Δt секунд тело переместилось из точки M в точку P:

$$MP = OP - OM = s(t + \Delta t) - s(t) = \Delta s.$$

Найдем ***средню́ю скорость*** **тела $v_{ср}$:**

$$v_{ср} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

При $\Delta t \to 0$ получим ***мгновенную скорость*** **тела в момент времени t:**

$$\boxed{v_{мгн} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.}$$

Таблица 4. Задачи, приводящие к понятию производной. Угловой коэффициент касательной.

Задача. **1) К графику функции $y = f(x)$ в точке М провести касательную.**
2) Найти угловой коэффициент касательной.

Решение. **1) Проведем секущую МР:**

$$M(x_0; y_0),\ P(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y),$$

Δx – приращение аргумента,
Δy – приращение функции.
Если $\Delta x \to 0$, то $P \to M$.
Получим *касательную* – предельное положение секущей МР при $P \to M$.

2) $k_{сек} = \operatorname{tg} \beta, \quad k_{кас} = \operatorname{tg} \alpha.$

$$k_{сек} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Если $\Delta x \to 0$, то $\beta \to \alpha$, $\operatorname{tg} \beta \to \operatorname{tg} \alpha$:

$$k_{кас} = \lim_{\Delta x \to 0} k_{сек},$$

$$\boxed{k_{кас} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.}$$

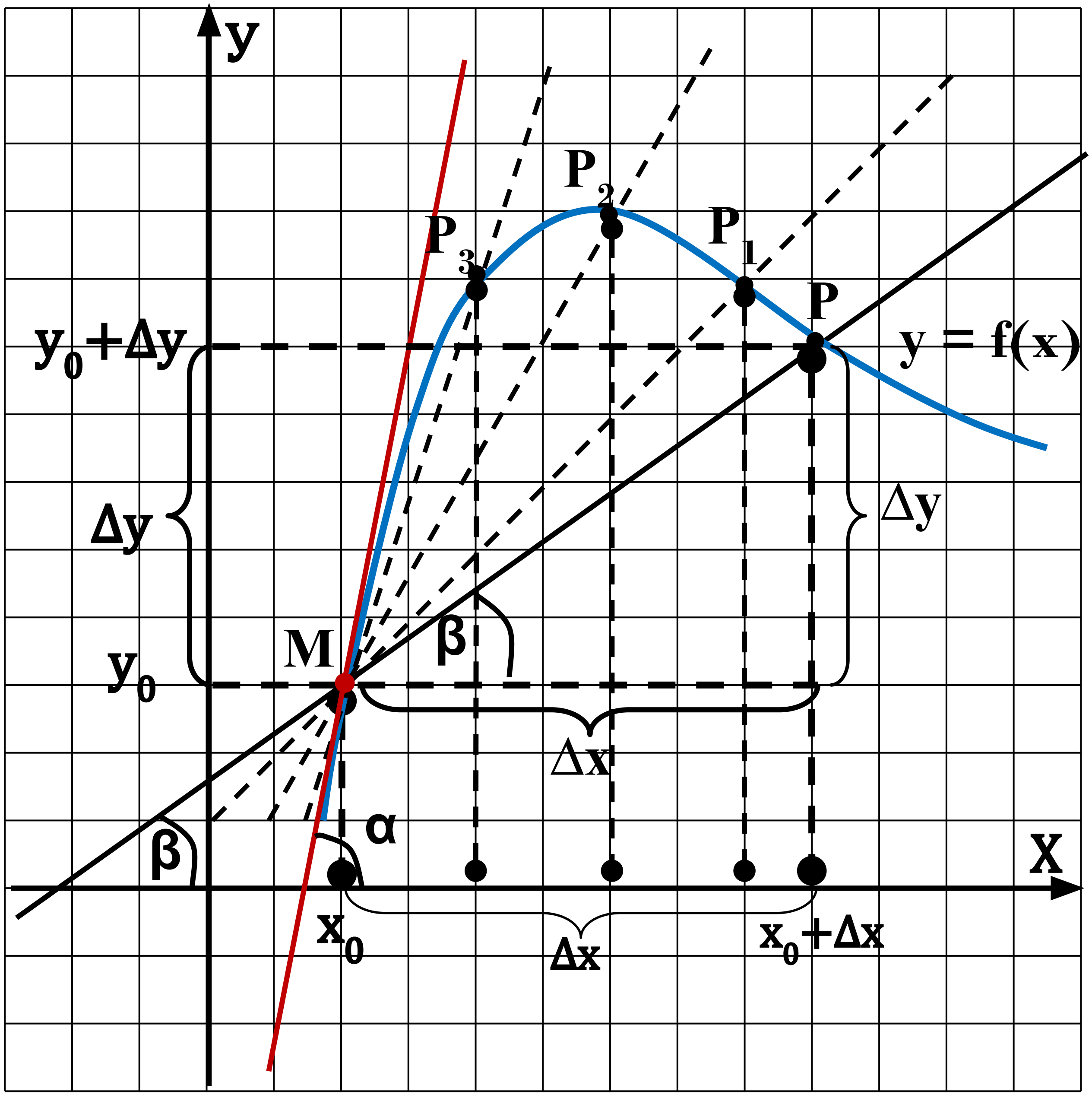

y
P
2
P
3
P
1
P
y = f(x)
y
0
+Δy
Δy
Δy
M
y
0
β
Δx
α
β
X
x
0
Δx
x
0
+Δx

Таблица 5. Определение производной

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ – средняя скорость изменения функции $y = f(x)$ на промежутке Δx.

При $\Delta x \to 0$ получим *скорость изменения функции* в точке x_0: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Определение. $f'(x_0)$ – *производная функции* $y = f(x)$ в точке x_0:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.}$$

Физический смысл производной. $s(t)$ – закон движения тела.

Мгновенная скорость тела в момент времени t_0: $v_{мгн} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$,

$$\boxed{v_{мгн} = s'(t_0)}$$

Геометрический смысл производной.

$y = kx + b$ – касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 ($k_{кас} = \operatorname{tg} \alpha$):

$$k_{кас} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

$$\boxed{k_{кас} = f'(x_0)}$$

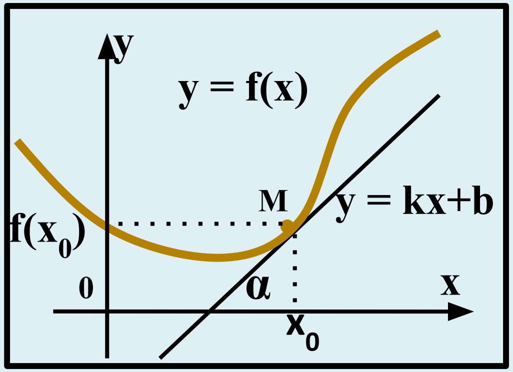


Таблица 6. Правила вычисления производных

f(x)	f ´(x)
1. C - число	0
2. x	1
3. kx	k - число
9. tg x	
10 . ctg x	

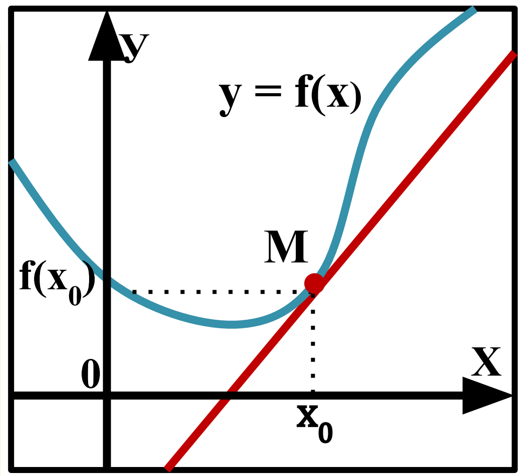
Правила вычисления производных
$(u+v)' = u' + v'$
$(ku)' = ku'$
$(uv)' = u'v + uv'$
Производная сложной функции
$(f(kx+b))' = kf'(kx+b)$
$(f(g(x)))' = f'(x)\,g'(x)$

Таблица 7. Уравнение касательной к графику функции

К графику функции y = f(x) в точке x_0 проведена касательная.

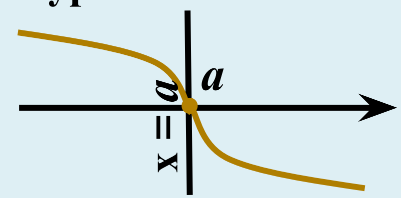
Уравнение касательной задается формулой:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (1)$$

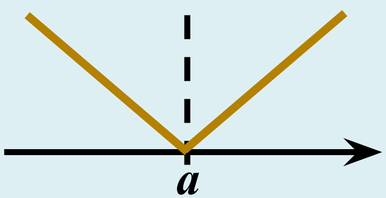


Особые случаи

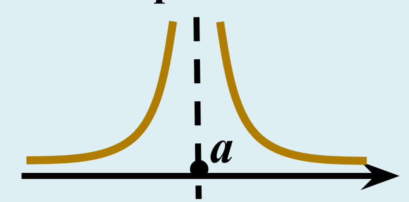
Касательная задается уравнением x = *a*



В точке x = a нельзя провести касательную



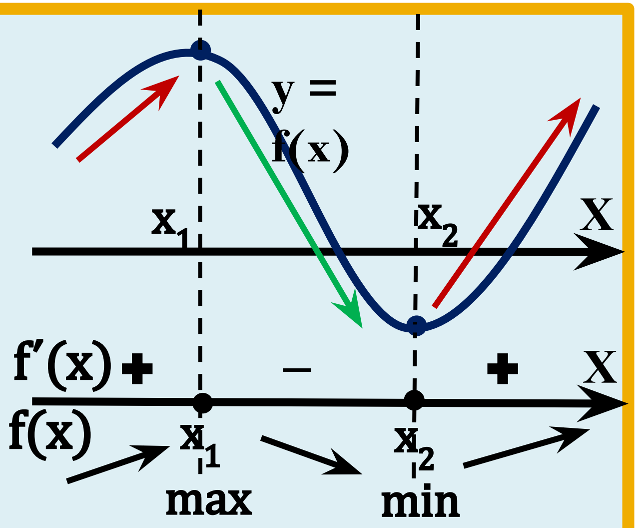
В точке x = a функция не определена



Алгоритм составления уравнения касательной к графику функции.

1. Вычислить $f(x_0)$.
2. Найти производную $f'(x)$.
3. Вычислить $f'(x_0)$.
4. Подставить полученные значения $f(x_0)$, $f'(x_0)$, x_0, в формулу (1).

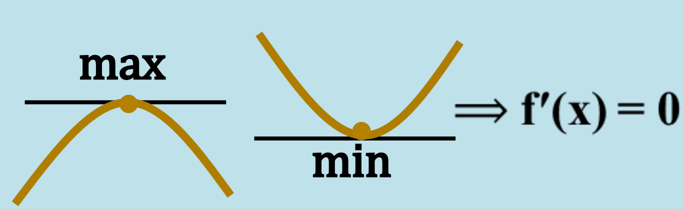
Таблица 8. Исследование функции с помощью производной

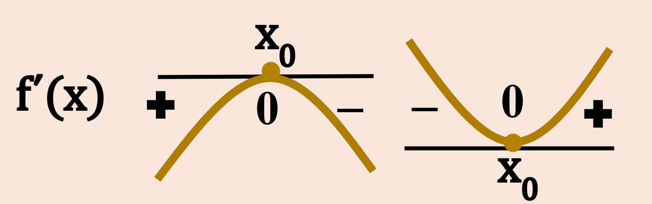


Монотонность функции

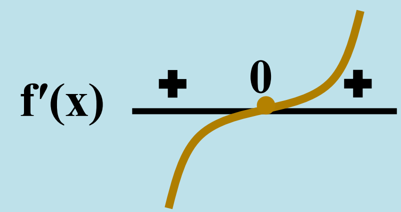
f(x)	f′(x)
f(x) ↗	f '(x) > 0
f(x) ↘	f '(x) < 0
f(x) - const	f '(x) = 0

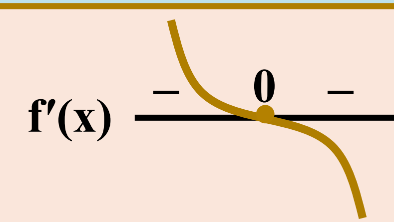
Экстремумы функции



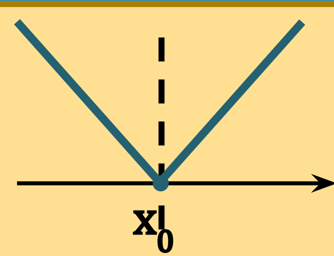


Точки перегиба

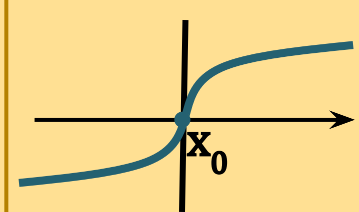




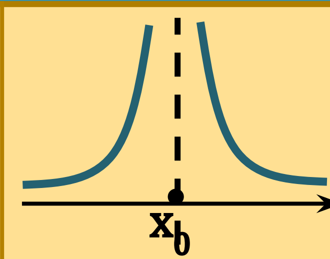
Точки, в которых производная не существует



в т. x_0 положение касательной не определено



в т. x_0 тангенс угла наклона касательной не определен



в т. x_0 функция не определена

Таблица 9. Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы.

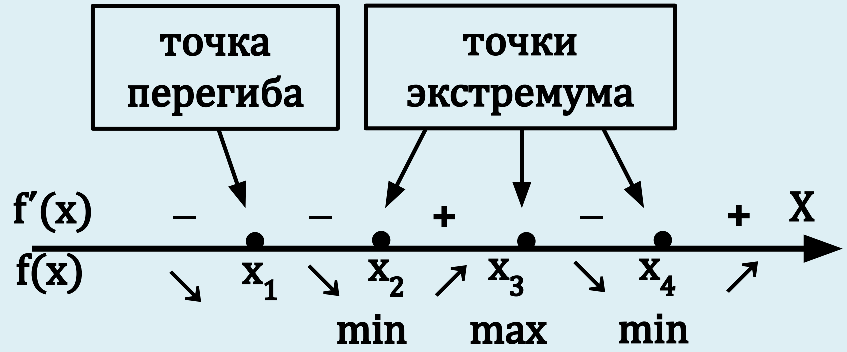
Алгоритм исследования функции	Аналитическая и геометрическая интерпретации
1. Найти производную функции	$f'(x)$.
2. Найти точки в которых производная равна нулю или не существует	$f'(x) = 0$, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ - нули производной.
3. Отметить точки на числовой прямой и определить знак производной на получившихся промежутках	
4. По знаку производной определить характер монотонности функции и точки экстремума	
5. Записать ответ	

Таблица 10. Алгоритм построения графика функции $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, где p(x) и q(x) – многочлены

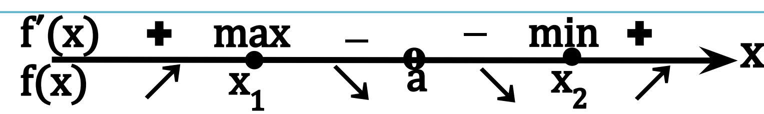
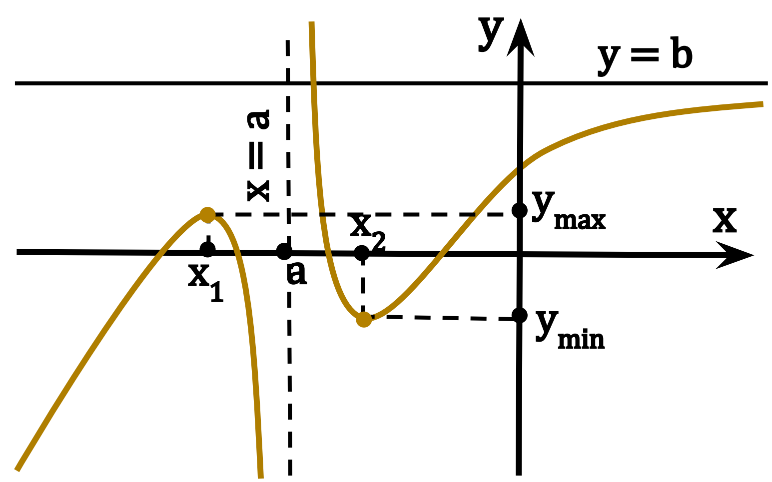
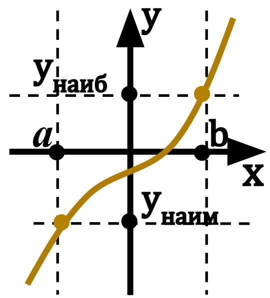
Алгоритм построения графика	Аналитическая и геометрическая интерпретации
1. Найти область определения	
2. Исследовать функцию на четность	$f(-x) = f(x)$ – функция четная, $f(-x) = -f(x)$ – функция нечетная
3. Найти асимптоты графика	
4. Исследовать функцию на монотонность и экстремумы	
5. Вычислить значения функции в точках экстремума	$y_{max} = f(x_1)$, $y_{min} = f(x_2)$
6. Построить график функции: • построить систему координат; • наметить асимптоты графика; • отметить точки экстремума; • построить эскиз графика функции	

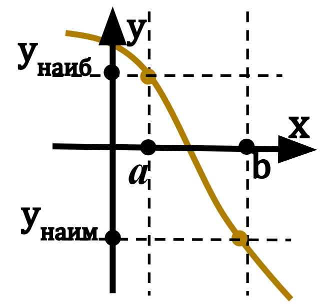
Таблица 11. Наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции на промежутке [a; b].

Если функция монотонна на отрезке [a; b], то набольшее и наименьшее значения она достигает на концах отрезка [a; b].

$f(x)\nearrow$ на $[a; b] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_{\text{наим}} = y(a) \\ y_{\text{наиб}} = y(b) \end{array}\right.$



$f(x)\searrow$ на $[a; b] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_{\text{наим}} = y(b) \\ y_{\text{наиб}} = y(a) \end{array}\right.$



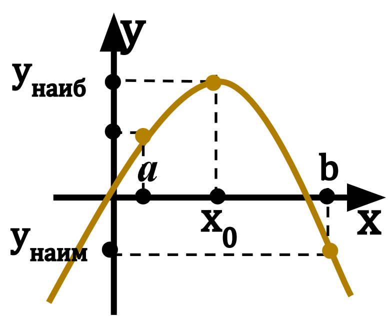
Если функция в точке $x_0 \in [a; b]$ достигает максимума (минимума), то в этой точке функция принимает набольшее (наименьшее) значение на отрезке [a; b].

$x_0 \in [a; b]$

x_0 - максимум

$\Downarrow$

$y_{\text{наиб}} = y(x_0)$



$x_0 \in [a; b]$

x_0 - минимум

$\Downarrow$

$y_{\text{наим}} = y(x_0)$

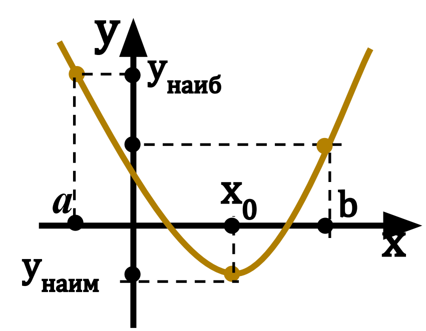


Таблица 12. Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке [a; b].

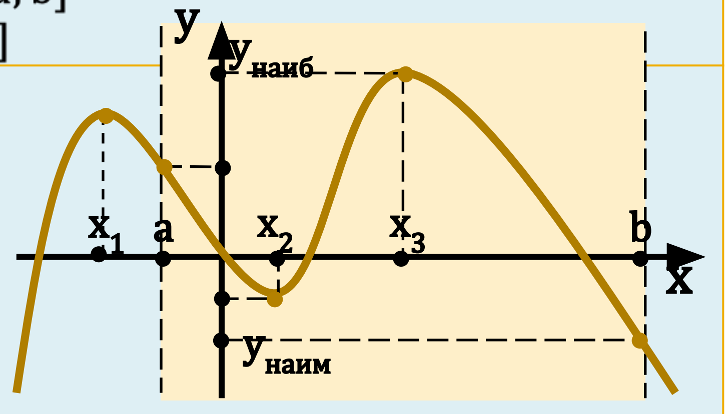
Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $y = f(x)$ на отрезке [a; b]	Аналитическая и геометрическая интерпретации
1. Найти производную функции $f(x)$	$f'(x)$
2. Найти точки экстремума функции на отрезке [a ; b]	
3. Вычислить значения функции в точках экстремума и на концах отрезка	$f(x_i), ..., f(x_j)$ $f(a), f(b)$ $x_2, x_3 \in [a; b]$ $x_1 \notin [a; b]$
4. Сравнить полученные значения и выбрать среди них наименьшее и наибольшее	

Таблица 13. Решение задач на оптимизацию

ЭТАПЫ решения задач на оптимизацию	УЧЕБНЫЕ ДЕЙСТВИЯ
1. Работа с условием задачи	Построить геометрическую модель: отобразить данные задачи на рисунке или схеме
2. Создание математической модели	Выделить оптимизируемую и независимую величины, установить область допустимых значений . Построить аналитическую модель: функцию связывающую оптимизируемую и независимую величины
3. Работа с математической моделью	Наметить алгоритм решения, исследовать функцию на экстремумы, учесть область определения и область значений функции
4. Формулировка ответа	Вернуться к постановке вопроса задачи

ТАБЛИЦА 14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ ФУНКЦИИ

Функция y = F(x) – *первообразная* для функции y = f(x):

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

ПРАВИЛА НАХОЖДЕНИЯ ПЕРВООБРАЗНЫХ

F(x) и G(x) – первообразные функций f(x) и g(x)	F(x) + G(x) – первообразная функции y = f(x) + g(x)
F(x) – первообразная функции f(x)	kF(x) – первообразная функции kf(x)
F(x) – первообразная функции f(x)	$\frac{1}{k}F(kx+b)$ – первообразная функции $f(kx+b)$
F(x) – первообразная функции f(x)	F(x) + C – первообразная функции f(x)

f(x)	F(x)
0	C
1	x
x	
	ln x
sin x	– cos x
cos x	sin x

Таблица 15. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Площадь криволинейной трапеции.

Криволинейная трапеция – **фигура, ограниченная линиями** $y = 0, x = a, x = b, y = f(x)$

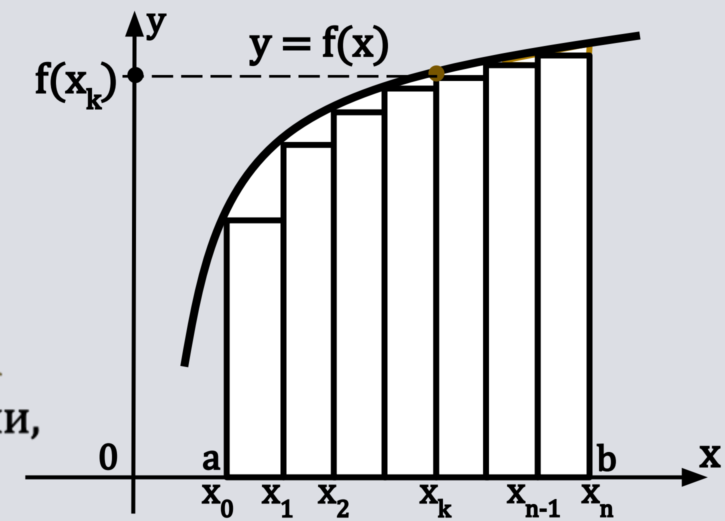


Рис. 1

Геометрический смысл определенного интеграла

Задача 1. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 0, x = a, x = b, y = f(x)$.

Решение. S – площадь криволинейной трапеции

S_n – площадь ступенчатой фигуры (рис. 1):

$$S_n = f(x_0)\Delta x_0 + \ldots + f(x_k)\Delta x_k + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1},$$

Δx_k – длина отрезка $[x_k; x_{k+1}]$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$$

Таблица 16. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Перемещение тела.

Физический смысл определенного интеграла.

Задача 2. Найти перемещение тела за промежуток времени [a; b], если скорость тела задается формулой: $v = v(t)$

Решение. 1. Тело движется равномерно $v = const$.

S – перемещение тела за время [a; b] (рис. 1):

$$S = vt = v(a - b).$$

2. Тело движется неравномерно.

S – перемещение тела за время [a; b]

S_n – площадь ступенчатой фигуры (рис. 2):

$$S_n = v(t_0)\Delta t_0 + \ldots + v(t_k)\Delta t_k + \ldots + v(t_{n-1})\Delta t_{n-1},$$

Δt_k – длина отрезка $[t_k; t_{k+1}]$

$$\boxed{S = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b v(t)\,dt}$$

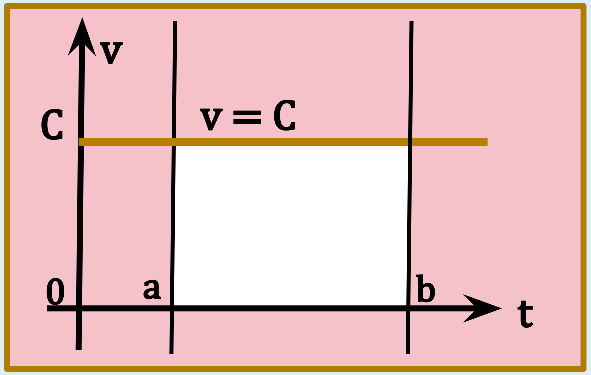


Рис. 1

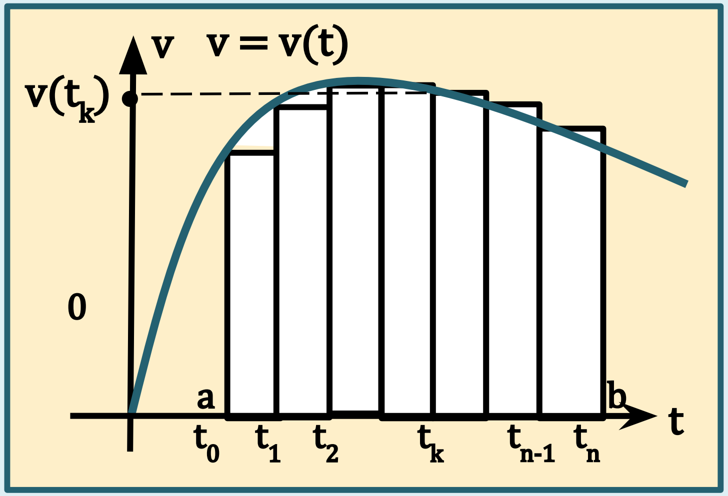


Рис. 2

Таблица 17. Формула Ньютона-Лейбница.

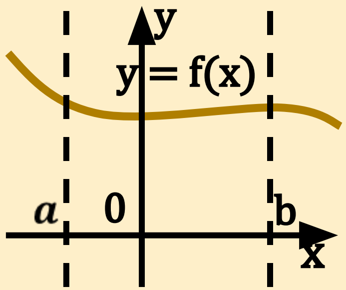
$y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$
$F(x)$ – первообразная для $f(x)$

Формула Ньютона-Лейбница:

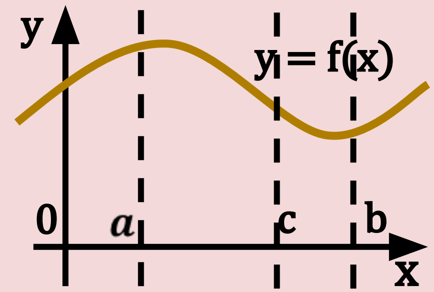
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

$f(x) \geq 0$ на $[a; b]$

$\int_a^b f(x)dx \geq 0$



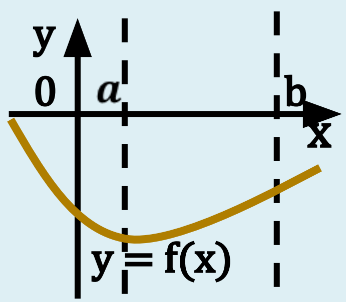
$c \in [a; b]$



$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

$f(x) < 0$ на $[a; b]$

$\int_a^b f(x)dx < 0$



Свойства определенного интеграла

Таблица 18. Вычисление площадей плоских фигур

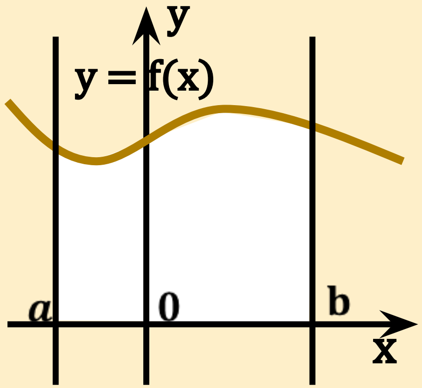
Задача 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$.

Решение. Возможны случаи:

1)

$\int_a^b f(x)dx \geq 0$

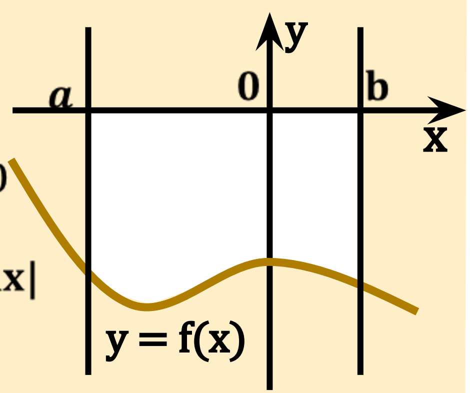
$S = \int_a^b f(x)dx$



2)

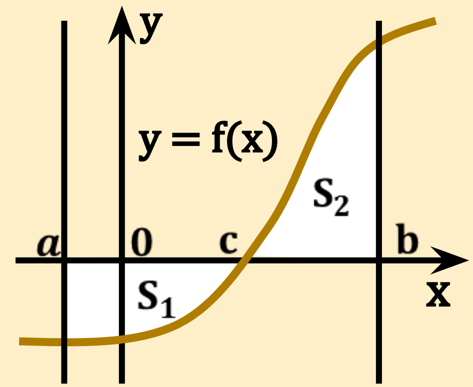
$\int_a^b f(x)dx < 0$

$S = |\int_a^b f(x)dx|$



3) $S = S_1 + S_2$

$S = |\int_a^c f(x)dx| + \int_c^b f(x)dx$



Задача 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$.

Решение.

$f(x) \geq g(x)$ на $[a; b]$

$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$