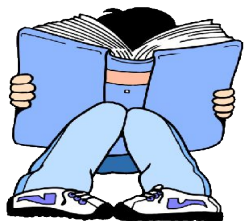
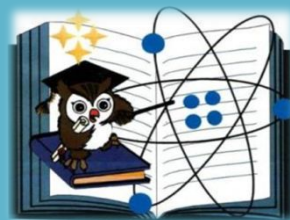


Математика в таблицах

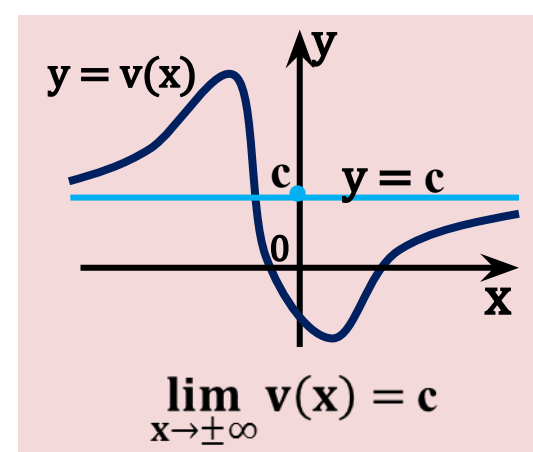
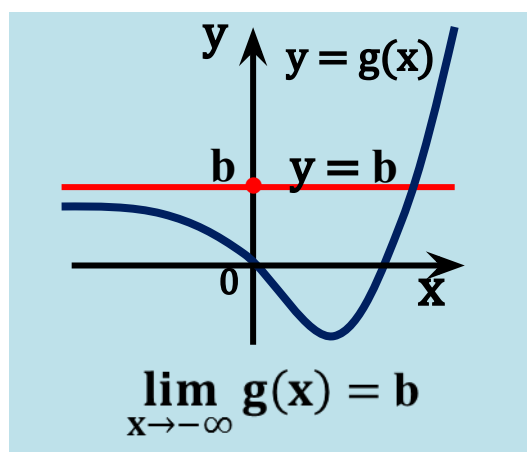
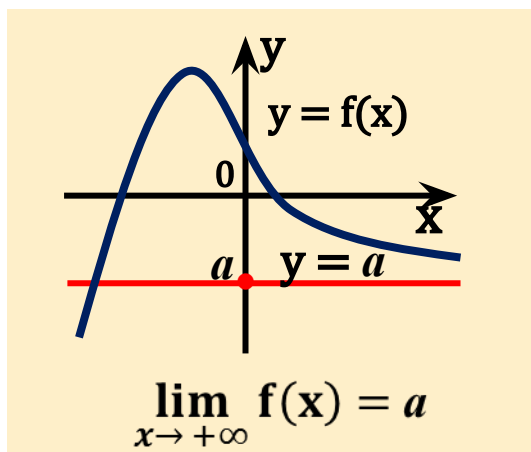


Начала математического анализа



РАЗРАБОТАЛА АНДРЮХИНА М.И.
ГАПОУ КК КГТК
КРАСНОДАР 2016 Г.

Таблица 1. Предел функции на бесконечности



Пределы элементарных функций

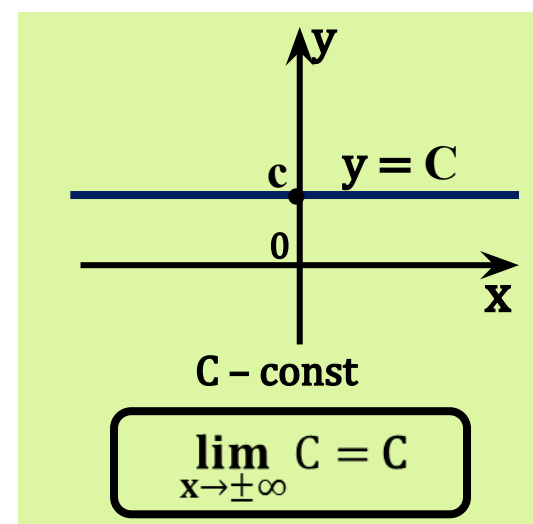
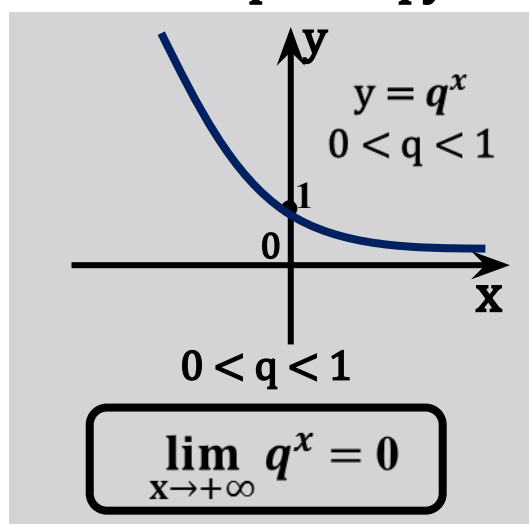
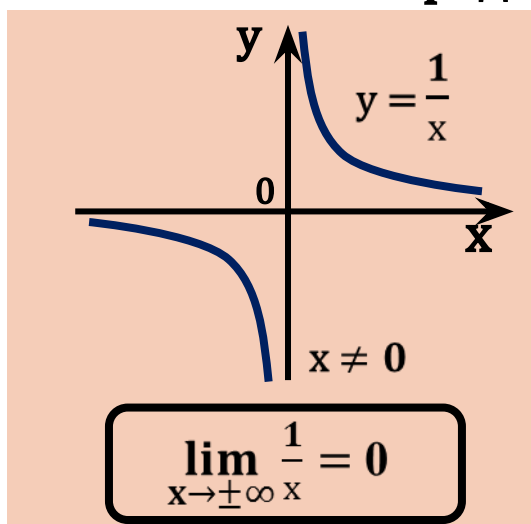


Таблица 1. Предел функции на бесконечности

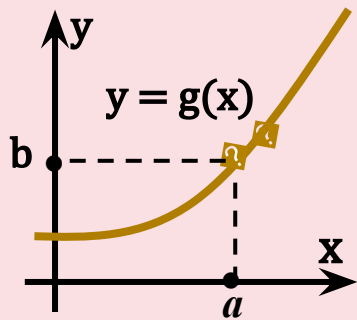
Пределы функций

Пределы функций

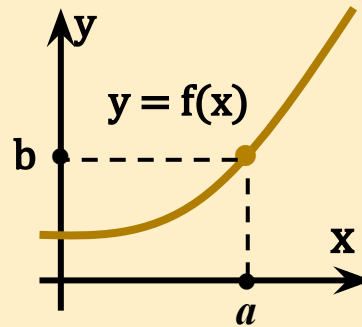
СВОЙСТВА ПРЕДЕЛОВ

СВОЙСТВА ПРЕДЕЛОВ	
1	
2	
3	
4	

Таблица 2. Предел функции в точке



$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$$
$$g(a) \neq b$$



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$
$$f(a) = b$$



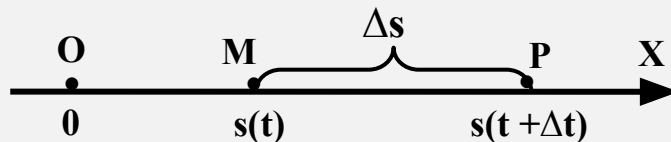
$y = f(x)$ –
непрерывная
функция

СВОЙСТВА ПРЕДЕЛОВ

1	
2	
3	
4	

Таблица 3. Задачи, приводящие к понятию производной. Мгновенная скорость движущегося тела.

Задача. Тело движется по закону $s(t)$, где t – время (с), $s(t)$ – положение тела в момент времени t . Найти скорость тела в момент времени t .



Решение. M – положение тела в момент времени t : $OM = s(t)$.

P – положение тела в момент времени $(t + \Delta t)$: $OP = s(t + \Delta t)$.

За Δt секунд тело переместилось из точки M в точку P:

$$MP = OP - OM = s(t + \Delta t) - s(t) = \Delta s.$$

Найдем *среднюю скорость* тела $v_{\text{ср}}$:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ получим *мгновенную скорость* тела в момент времени t :

$$v_{\text{МГН}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Таблица 4. Задачи, приводящие к понятию производной. Угловой коэффициент касательной.

Задача. 1) К графику функции $y = f(x)$ в точке M провести касательную.
2) Найти угловой коэффициент касательной.

Решение. 1) Проведем секущую MP :

$$M(x_0; y_0), P(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y),$$

Δx – приращение аргумента,

Δy – приращение функции.

Если $\Delta x \rightarrow 0$, то $P \rightarrow M$.

Получим **касательную** – предельное положение секущей MP при $P \rightarrow M$.

2) $k_{\text{сек}} = \text{tg } \beta, \quad k_{\text{кас}} = \text{tg } \alpha.$

$$k_{\text{сек}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Если $\Delta x \rightarrow 0$, то $\beta \rightarrow \alpha, \text{tg } \beta \rightarrow \text{tg } \alpha$:

$$k_{\text{кас}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_{\text{сек}},$$

$$k_{\text{кас}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

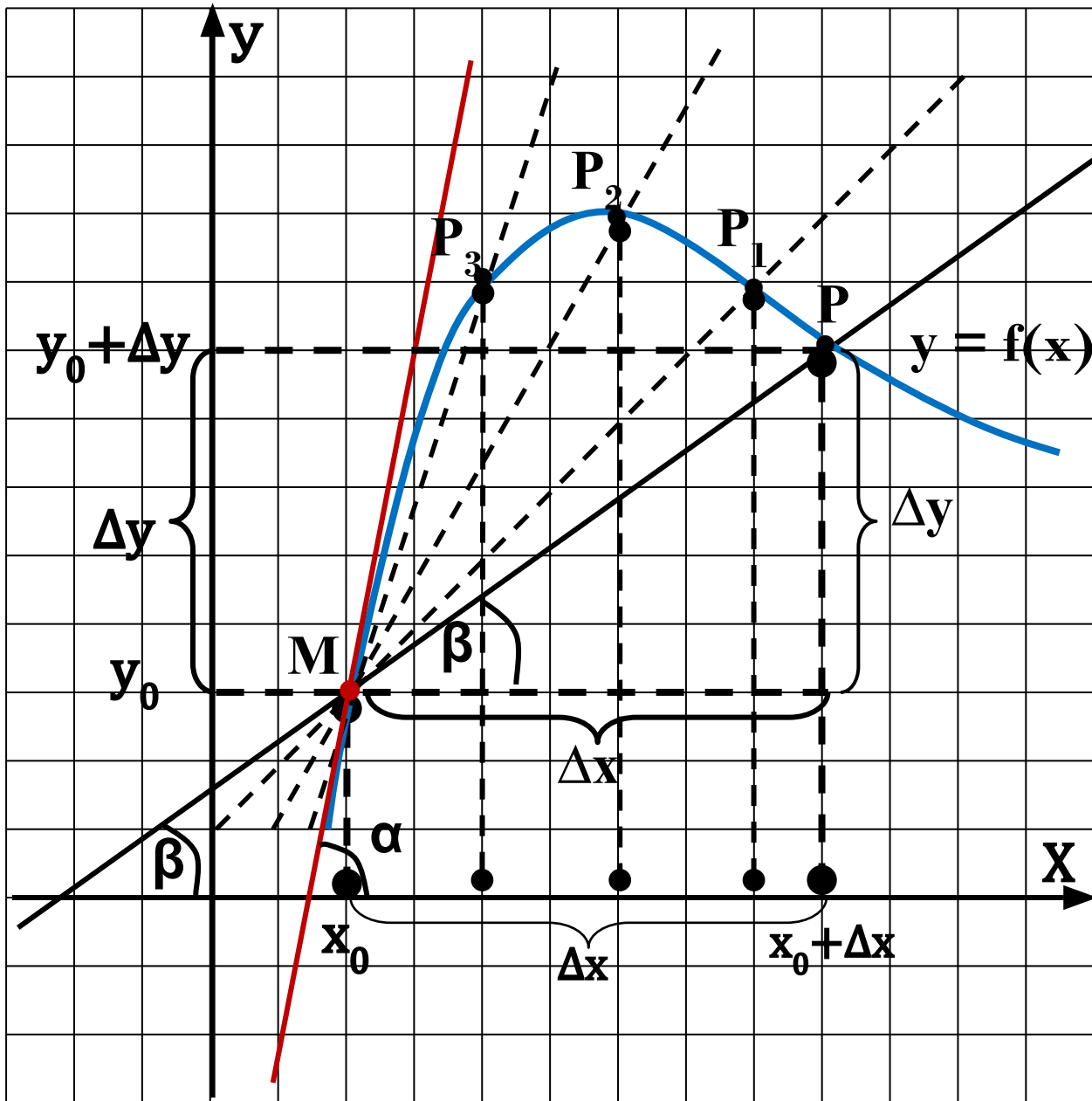


Таблица 5. Определение производной

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ – средняя скорость изменения функции $y = f(x)$ на промежутке Δx .

При $\Delta x \rightarrow 0$ получим *скорость изменения функции* в точке x_0 : $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Определение. $f'(x_0)$ – *производная функции* $y = f(x)$ в точке x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Физический смысл производной. $s(t)$ – закон движения тела.

Мгновенная скорость тела в момент времени t_0 : $v_{\text{МГН}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$,

$$v_{\text{МГН}} = s'(t_0)$$

Геометрический смысл производной.

$y = kx + b$ – касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 ($k_{\text{кас}} = \text{tg } \alpha$):

$$k_{\text{кас}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

$$k_{\text{кас}} = f'(x_0)$$

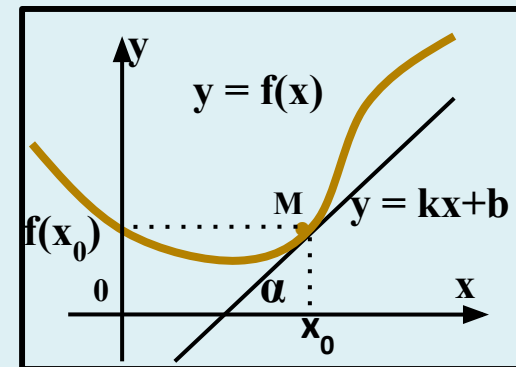


Таблица 6. Правила вычисления производных

f(x)	f'(x)
1. C - число	0
2. x	1
3. kx	k - число
9. tg x	
10. ctg x	

Правила вычисления производных

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Производная сложной функции

$$(f(kx + b))' = kf'(kx + b)$$

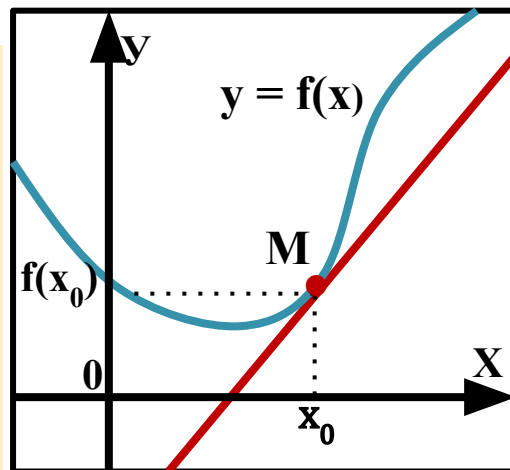
$$(f(g(x)))' = f'(x) g'(x)$$

Таблица 7. Уравнение касательной к графику функции

К графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 проведена касательная.

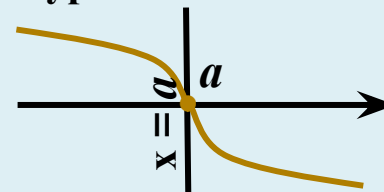
Уравнение касательной задается формулой:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (1)$$

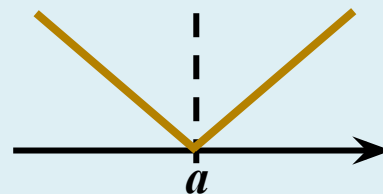


Особые случаи

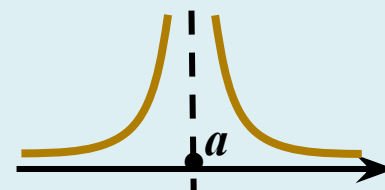
Касательная задается уравнением $x = a$



В точке $x = a$ нельзя провести касательную



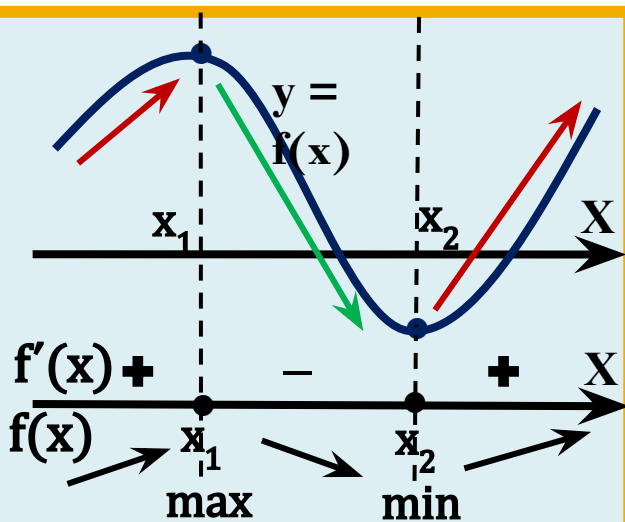
В точке $x = a$ функция не определена



Алгоритм составления уравнения касательной к графику функции.

1. Вычислить $f(x_0)$.
2. Найти производную $f'(x)$.
3. Вычислить $f'(x_0)$.
4. Подставить полученные значения $f(x_0)$, $f'(x_0)$, x_0 в формулу (1).

Таблица 8. Исследование функции с помощью производной



Монотонность функции

$f(x)$	$f'(x)$
$f(x) \nearrow$	$f'(x) > 0$
$f(x) \searrow$	$f'(x) < 0$
$f(x) - \text{const}$	$f'(x) = 0$

Экстремумы функции	Точки перегиба

Точки, в которых производная не существует

<p>в т. x_0 положение касательной не определено</p>	<p>в т. x_0 тангенс угла наклона касательной не определен</p>	<p>в т. x_0 функция не определена</p>
--	--	--

Таблица 9. Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы.

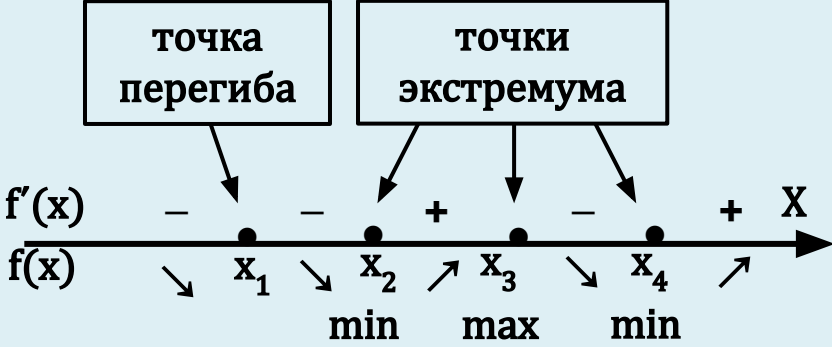
Алгоритм исследования функции	Аналитическая и геометрическая интерпретации
1. Найти производную функции	$f'(x)$.
2. Найти точки в которых производная равна нулю или не существует	$f'(x) = 0$, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ - нули производной.
3. Отметить точки на числовой прямой и определить знак производной на получившихся промежутках	
4. По знаку производной определить характер монотонности функции и точки экстремума	
5. Записать ответ	

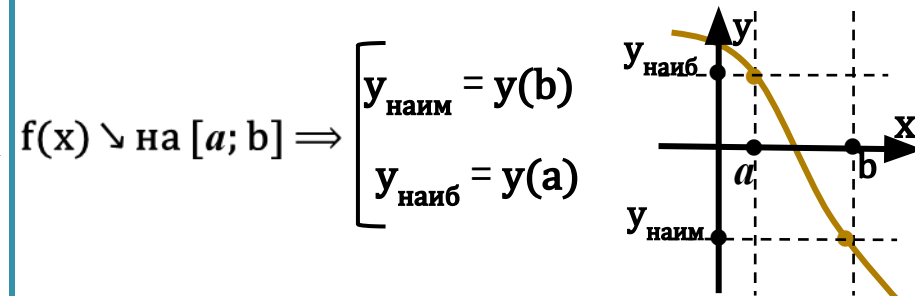
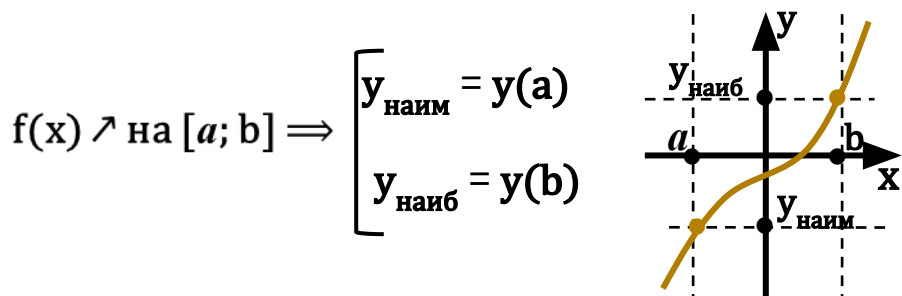
Таблица 10. Алгоритм построения графика функции

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \text{ где } p(x) \text{ и } q(x) \text{ – многочлены}$$

Алгоритм построения графика	Аналитическая и геометрическая интерпретации
1. Найти область определения	
2. Исследовать функцию на четность	$f(-x) = f(x)$ – функция четная, $f(-x) = -f(x)$ – функция нечетная
3. Найти асимптоты графика	
4. Исследовать функцию на монотонность и экстремумы	$ \begin{array}{ccccccc} f'(x) & + & \max & - & - & \min & + \\ f(x) & \nearrow & x_1 & \searrow & a & \searrow & x_2 & \nearrow \end{array} $
5. Вычислить значения функции в точках экстремума	$y_{\max} = f(x_1), y_{\min} = f(x_2)$
6. Построить график функции: <ul style="list-style-type: none"> • построить систему координат; • наметить асимптоты графика; • отметить точки экстремума; • построить эскиз графика функции 	 <p>The diagram shows a Cartesian coordinate system with x and y axes. A vertical dashed line represents an asymptote at $x = a$. A horizontal line represents $y = b$. The function curve is shown in blue. It has a local maximum at x_1 with value y_{\max} and a local minimum at x_2 with value y_{\min}. Dashed lines connect these points to their respective values on the axes.</p>

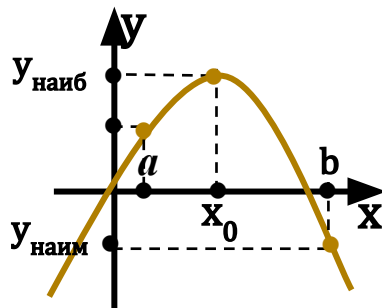
Таблица 11. Наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции на промежутке $[a; b]$.

Если функция монотонна на отрезке $[a; b]$, то наибольшее и наименьшее значения она достигает на концах отрезка $[a; b]$.



Если функция в точке $x_0 \in [a; b]$ достигает максимума (минимума), то в этой точке функция принимает наибольшее (наименьшее) значение на отрезке $[a; b]$.

$x_0 \in [a; b]$
 x_0 - максимум
 \Downarrow
 $y_{\text{наиб}} = y(x_0)$



$x_0 \in [a; b]$
 x_0 - минимум
 \Downarrow
 $y_{\text{наим}} = y(x_0)$

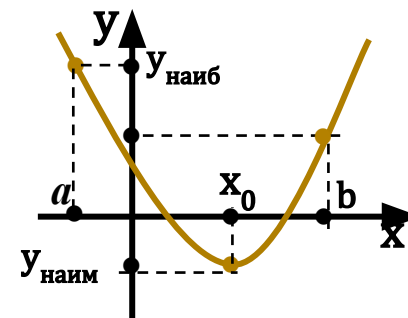


Таблица 12. Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке $[a; b]$.

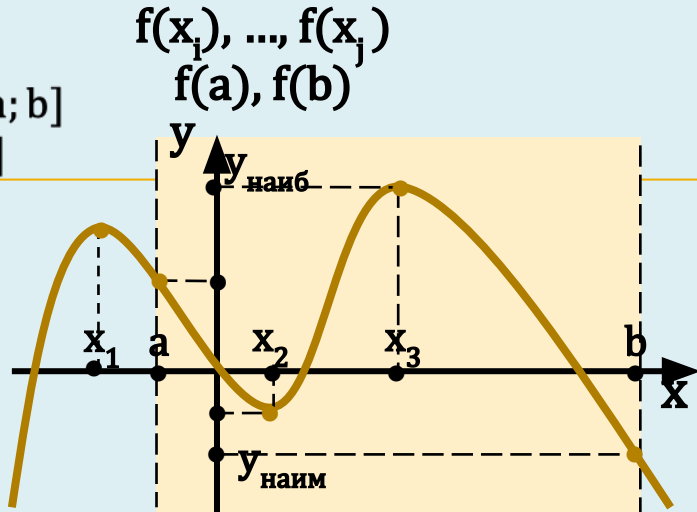
<p>Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$</p>	<p>Аналитическая и геометрическая интерпретации</p>
<p>1. Найти производную функции $f(x)$</p>	<p>$f'(x)$</p>
<p>2. Найти точки экстремума функции на отрезке $[a; b]$</p>	
<p>3. Вычислить значения функции в точках экстремума и на концах отрезка</p>	<p>$f(x_1), \dots, f(x_j)$ $f(a), f(b)$ $x_2, x_3 \in [a; b]$ $x_1 \notin [a; b]$</p>
<p>4. Сравнить полученные значения и выбрать среди них наименьшее и наибольшее</p>	

Таблица 13. Решение задач на оптимизацию

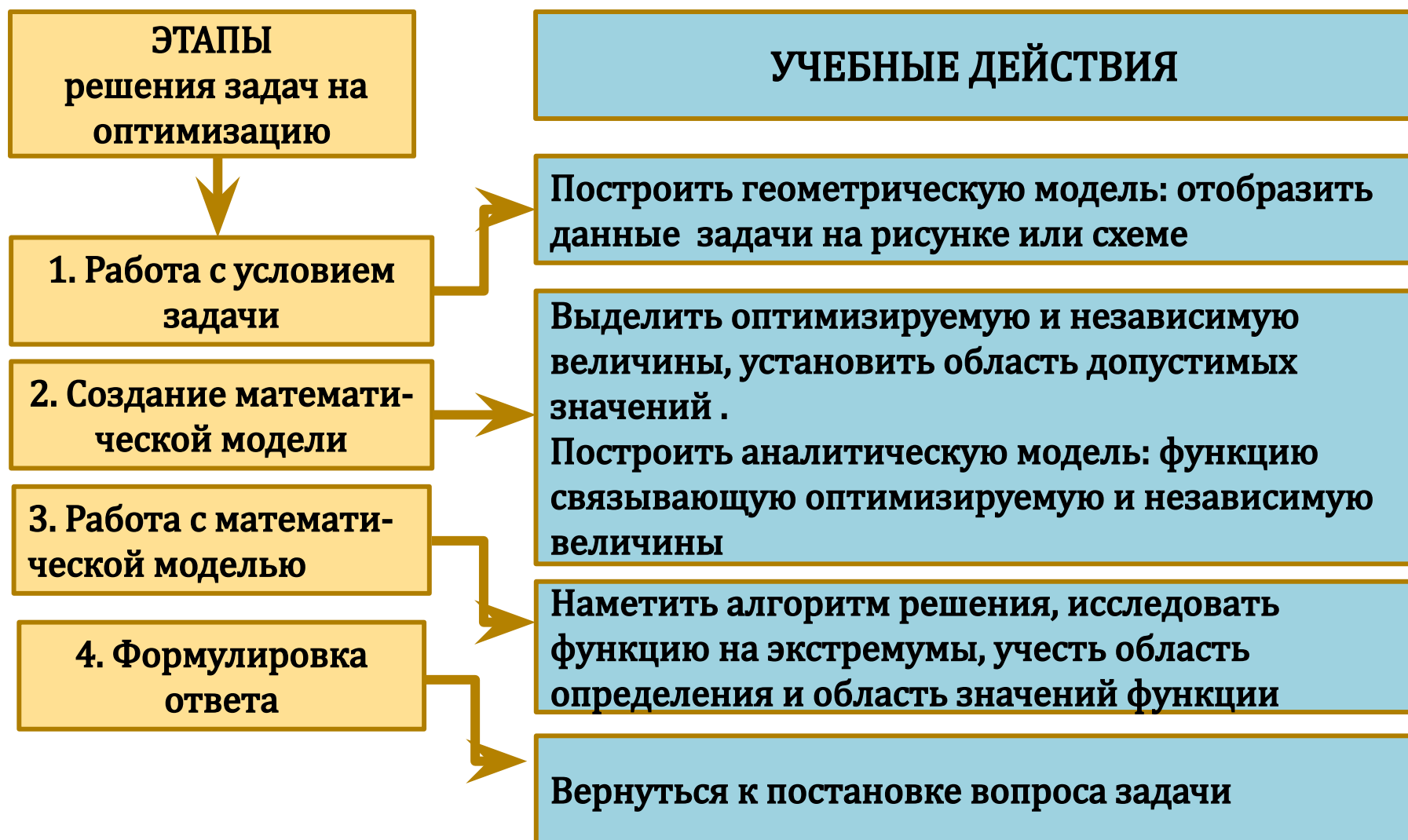


ТАБЛИЦА 14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ ФУНКЦИИ

Функция $y = F(x)$ – первообразная для функции $y = f(x)$:

$$F'(x) = f(x)$$

ПРАВИЛА НАХОЖДЕНИЯ ПЕРВООБРАЗНЫХ

$F(x)$ и $G(x)$ – первообразные функций $f(x)$ и $g(x)$



$F(x) + G(x)$ – первообразная функции $y = f(x) + g(x)$

$F(x)$ – первообразная функции $f(x)$



$kF(x)$ – первообразная функции $kf(x)$

$F(x)$ – первообразная функции $f(x)$



$\frac{1}{k}F(kx + b)$ – первообразная функции $f(kx + b)$

$F(x)$ – первообразная функции $f(x)$



$F(x) + C$ – первообразная функции $f(x)$

$f(x)$	$F(x)$
0	C
1	x
x	
	ln x
sin x	- cos x
cos x	sin x

Таблица 15. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Площадь криволинейной трапеции.

Криволинейная трапеция – фигура, ограниченная линиями $y = 0$, $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$

Геометрический смысл определенного интеграла
Задача 1. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 0$, $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$.

Решение. S – площадь криволинейной трапеции
 S_n – площадь ступенчатой фигуры (рис. 1):

$$S_n = f(x_0)\Delta x_0 + \dots + f(x_k)\Delta x_k + \dots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$$

Δx_k – длина отрезка $[x_k; x_{k+1}]$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$$

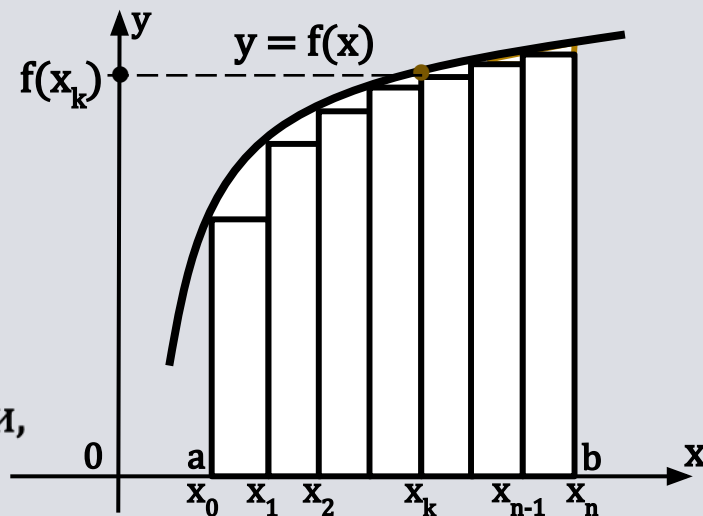


Рис. 1

Таблица 16. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Перемещение тела.

Физический смысл определенного интеграла.

Задача 2. Найти перемещение тела за промежуток времени $[a; b]$, если скорость тела задается формулой: $v = v(t)$

Решение. 1. Тело движется равномерно $v = \text{const}$.
 S – перемещение тела за время $[a; b]$ (рис. 1):

$$S = vt = v(a - b).$$

2. Тело движется неравномерно.

S – перемещение тела за время $[a; b]$

S_n – площадь ступенчатой фигуры (рис. 2):

$$S_n = v(t_0)\Delta t_0 + \dots + v(t_k)\Delta t_k + \dots + v(t_{n-1})\Delta t_{n-1},$$

Δt_k – длина отрезка $[t_k; t_{k+1}]$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b v(t) dt$$

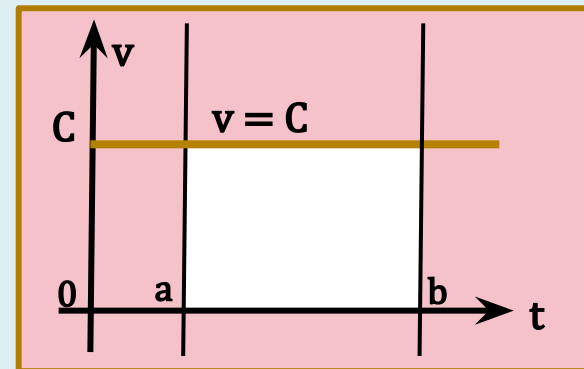


Рис. 1

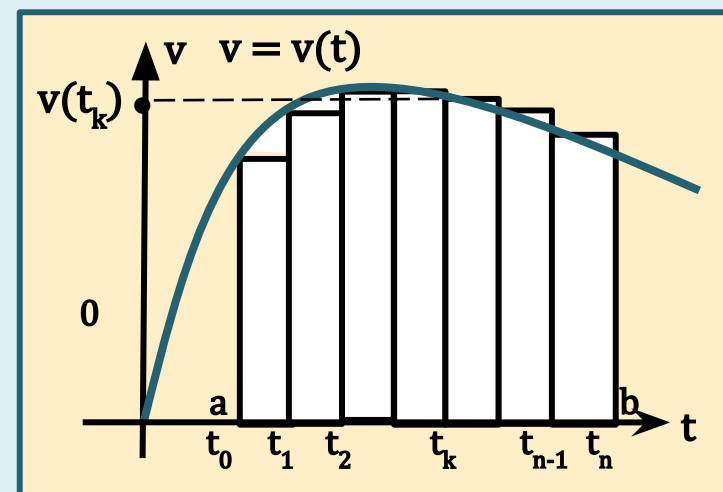


Рис. 2

Таблица 17. Формула Ньютона-Лейбница.

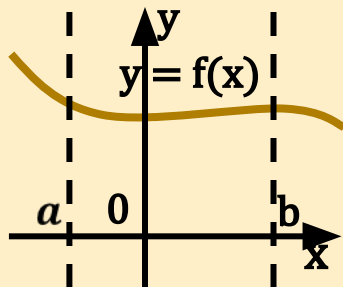
$y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$
 $F(x)$ – первообразная для $f(x)$

Формула Ньютона-Лейбница:

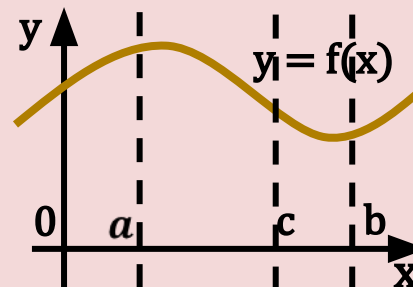
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$f(x) \geq 0$ на $[a; b]$

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$



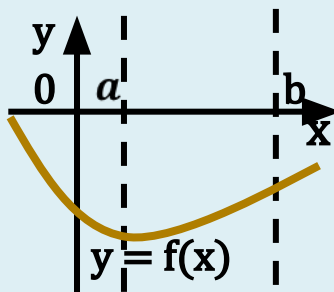
$c \in [a; b]$



$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$f(x) < 0$ на $[a; b]$

$$\int_a^b f(x) dx < 0$$



Свойства определенного интеграла

Таблица 18. Вычисление площадей плоских фигур

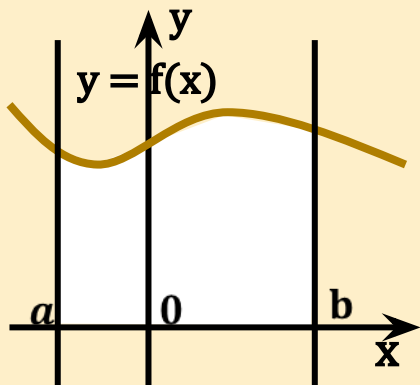
Задача 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$.

Решение. Возможны случаи:

1)

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

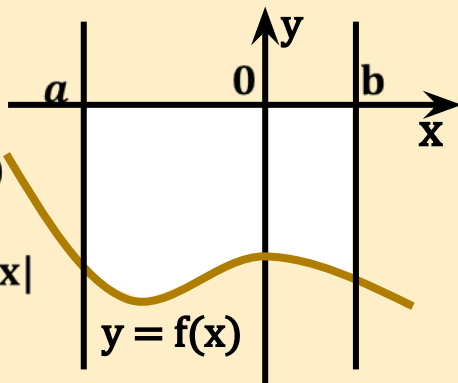
$$S = \int_a^b f(x) dx$$



2)

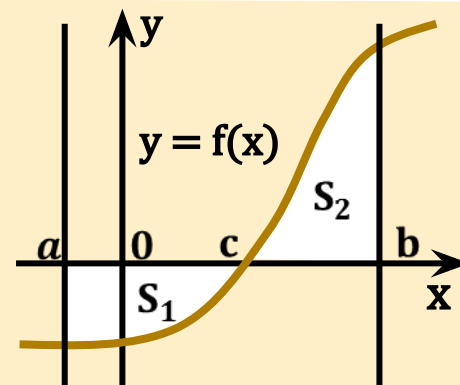
$$\int_a^b f(x) dx < 0$$

$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$



$$3) \quad S = S_1 + S_2$$

$$S = \left| \int_a^c f(x) dx \right| + \int_c^b f(x) dx$$



Задача 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$.

Решение.

$$f(x) \geq g(x) \text{ на } [a; b]$$

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

