

# Разложение многочленов на множители.



Обобщающий урок по теме  
«Разложение на множители»



# Немного теории

Разложить многочлен на множители значит представить его в виде произведения более простых многочленов.

Существует несколько способов разложения:

- Вынесение общего множителя за скобки
- Способ группировки
- С помощью формул сокращенного умножения

Сначала убедимся в том что разложение на множители –вещь полезная.

Вам предлагают решить уравнение  $2x^2+x-6=0$ .

Для таких уравнений имеется специальное правило решения, но вы его пока еще не знаете.

Как быть?



Воспользуемся разложением многочлена на множители:

$$2x^2+x-6=(2x-3)(x+2)$$

Тогда заданное уравнение можно переписать в виде:

$$(2x-3)(x+2)=0$$

Произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю. Значит,

$$\text{либо } 2x-3=0,$$

$$\text{либо } x+2=0.$$

Из первого уравнения  $x=1,5$ , а из второго уравнения  $x=-2$ .

Уравнение решено, оно имеет два корня:  $1,5$  и  $-2$ .

# Рассмотрим другую ситуацию

Пусть нужно найти значение числового выражения

$$\frac{53^2-47^2}{61^2-39^2}$$

Самое эффективное решение – дважды воспользоваться формулой разности квадратов:

$$\frac{53^2-47^2}{61^2-39^2} = \frac{(53-47)(53+47)}{(61-39)(61+39)} = \frac{6 \cdot 100}{22 \cdot 100} = \frac{6}{22} = \frac{3}{11}$$

*Разложение на множители позволило нам сократить дробь. Позднее мы оценим это и при выполнении действий с алгебраическими дробями.*

Таким образом, разложение многочлена на множители используется для решения уравнений, для преобразования числовых и алгебраических выражений. Применяется оно и в других ситуациях, как, скажем, в следующем довольно трудном, но красивом примере, где ключ к успеху **опять-таки в разложении на множители.**

## ПРИМЕР

Доказать, что для любого натурального числа  $n$  выражение  $n^3 + 3n^2 + 2n$  делится без остатка на 6.

**Попробуйте его решить**



# Посмотрите, как легко это можно сделать

Пусть  $p(n) = n^3 + 3n^2 + 2n$ .

Если  $n=1$ , то  $p(1)=1+3+2=6$ . Значит,  $p(1)$  делится на 6 без остатка.

Если  $n=2$ , то  $p(2)=2^3+3\cdot 2^2+2\cdot 2=8+12+4=24$ . Следовательно, и  $p(2)$  делится на 6 без остатка.

Если  $n=3$ , то  $p(3)=3^3+3\cdot 3^2+2\cdot 3=27+27+6=60$ . Поэтому и  $p(3)$  делится на 6 без остатка.

Но вы же понимаете, что перебрать так все натуральные числа нам не удастся. Как быть? На помощь приходят алгебраические методы.

Имеем:  $n^3 + 3n^2 + 2n = n(n+1)(n+2)$ .

В самом деле  $n(n+1) = n^2 + n$ , а  $(n^2 + n)(n+2) = n^3 + 2n^2 + n^2 + 2n = n^3 + 3n^2 + 2n$ .


Итак,  $p(n) = n(n+1)(n+2)$ , т.е.  $p(n)$  есть произведение трех идущих подряд натуральных чисел  $n$ ,  $n+1$ ,  $n+2$ . Но из трех таких чисел одно обязательно делится на 3, значит и их произведение делится на 3. Кроме того, по крайней мере одно из этих чисел – четное, т.е. делится на 2. Итак,  $p(n)$  делится и на 2, и на 3, т.е. делится на 6.

Все прекрасно, скажите вы, но как догадаться, что  $n^3 + 3n^2 + 2n = n(n+1)(n+2)$ ?

**Ответ очевиден:** надо учиться разложению многочленов на множители.

К этому и перейдем.





# Вынесение общего множителя за скобки

## Алгоритм отыскания общего множителя нескольких одночленов

1. *Найти наибольший общий делитель коэффициентов всех одночленов, входящих в многочлен, - он и будет общим числовым множителем (разумеется, это относится только к случаю целочисленных коэффициентов).*
2. *Найти переменные, которые входят в каждый член многочлена, и выбрать для каждой из них наименьший (из имеющихся) показатель степени.*
3. *Произведение коэффициента, найденного на первом шаге, является общим множителем, который целесообразно вынести за скобки.*

# Пример

Разложить на множители:

$$-x^4y^3 - 2x^3y^2 + 5x^2.$$

Воспользуемся сформулированным алгоритмом.

- 1) Наибольший общий делитель коэффициентов  $-1$ ,  $-2$  и  $5$  равен  $1$ .
- 2) Переменная  $x$  входит во все члены многочлена с показателями соответственно  $4$ ,  $3$ ,  $2$ ; следовательно, можно вынести за скобки  $x^2$ .
- 3) Переменная  $y$  входит не во все члены многочлена; значит, ее нельзя вынести за скобки.

Вывод: за скобки можно вынести  $x^2$ . Правда, в данном случае целесообразнее вынести  $-x^2$ . Получим:

$$-x^4y^3 - 2x^3y^2 + 5x^2 = -x^2(x^2y^3 + 2xy^2 - 5).$$

## Способ группировки

Для уяснения сути способа группировки рассмотрим следующий пример:

**разложить на множители многочлен  $xy-6+3y-2y$**

Первый способ группировки:

$$xy-6+3y-2y=(xy-6)+(3x-2y).$$

Группировка неудачна.

Второй способ группировки:

$$xy-6+3y-2y=(xy+3x)+(-6-2y)=x(y+3)-2(y+3)=(y+3)(x-2).$$

Третий способ группировки:

$$xy-6+3y-2y=(xy-2y)+(-6+3x)=y(x-2)+3(x-2)=(x-2)(y+3).$$

**Ответ:**  $xy-6+3y-2y=(x-2)(y+3)$ .

Как видите, не всегда с первого раза группировка оказывается удачной. Если группировка оказалась неудачной, откажитесь от нее, ищите иной способ. По мере приобретения опыта, вы будете быстро находить удачную группировку.



**Разложение многочлена на множители с помощью формул сокращенного умножения**  
***Вспомните эти формулы:***

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2;$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

Первую из этих формул можно применять к выражению, представляющему собой *разность квадратов* (безразлично чего – чисел, одночленов, многочленов), вторую и третью – к выражению, представляющему собой *разность* (или *сумму*) кубов; последние две формулы применяются к трехчлену, представляющему собой *полный квадрат*, т.е. содержащему сумму квадратов двух выражений и удвоенное произведение тех же выражений.

# Примеры

## Разложить на множители:

1)  $x^6 - 4a^4$ . Воспользуемся первой формулой (разность квадратов):

$$x^6 - 4a^4 = (x^3)^2 - (2a^2)^2 = (x^3 - 2a^2)(x^3 + 2a^2).$$

2)  $a^6 + 27b^3$ . Воспользуемся третьей формулой (сумма кубов):


$$\begin{aligned} a^6 + 27b^3 &= (a^2)^3 + (3b)^3 = (a^2 + 3b)((a^2)^2 - a^2 \cdot 3b + (3b)^2) = \\ &= (a^2 + 3b)(a^4 - 3a^2b + 9b^2). \end{aligned}$$

3)  $a^2 - 4ab + 4b^2$ . В этом примере дан трехчлен, для его разложения на множители будем пользоваться пятой формулой, если, конечно, убедимся в том, что трехчлен является полным квадратом:

$$a^2 - 4ab + 4b^2 = a^2 + (2b)^2 - 2 \cdot a \cdot 2b = (a - 2b)^2.$$

Мы убедились, что трехчлен содержит сумму квадратов одночленов  $a$  и  $2b$ , а также удвоенное произведение этих одночленов. Значит, это полный квадрат, причем квадрат разности.





# Разложение многочлена на множители с помощью комбинации различных приемов

- В математике не так часто бывает, чтобы при решении примера применялся только один прием, чаще встречаются комбинированные примеры, где сначала используется один прием, затем другой и т.д. Чтобы успешно решать такие примеры, мало знать сами приемы, надо еще уметь выработать план их последовательного применения. Иными словами, здесь нужны не только знания, но и опыт. Вот такие комбинированные примеры мы и рассмотрим.

# Пример 1

## Разложить на множители многочлен

$$36a^6b^3 - 96a^4b^4 + 64a^2b^5$$

- 1) Сначала займемся вынесением общего множителя за скобки. Рассмотрим коэффициенты 36, 96, 64. Все они делятся на 4, причем это – наибольший общий делитель, вынесем его за скобки. Во все члены многочлена входит переменная  $a$  (соответственно  $a^6$ ,  $a^4$ ,  $a^2$ ), поэтому за скобки можно вынести  $a^2$ . Точно так же во все члены многочлена входит переменная  $b$  (соответственно  $b^3$ ,  $b^4$ ,  $b^5$ ) – за скобки можно вынести  $b^3$ .

Итак, за скобки вынесем  $4a^2b^3$ . Тогда получим:

$$36a^6b^3 - 96a^4b^4 + 64a^2b^5 = 4a^2b^3(9a^4 - 24a^2b + 16b^2).$$

- 2) Рассмотрим трехчлен в скобках:  $9a^4 - 24a^2b + 16b^2$ . Выясним, не является ли он полным квадратом. Имеем:

$$9a^4 - 24a^2b + 16b^2 = (3a^2)^2 + (4b)^2 - 2 \cdot 3a^2 \cdot 4b.$$

Все условия полного квадрата соблюдены, следовательно,

$$9a^4 - 24a^2b + 16b^2 = (3a^2 - 4b)^2.$$

- 3) Комбинируя два приема (вынесение общего множителя за скобки и использование формул сокращенного умножения), получаем окончательный результат:

$$36a^6b^3 - 96a^4b^4 + 64a^2b^5 = 4a^2b^3(3a^2 - 4b)^2.$$



## Пример 2

Разложить на множители

$$x^4 + x^2 a^2 + a^4$$

Применим метод выделения полного квадрата.

Для этого представим  $x^2 a^2$  в виде  $2x^2 a^2 - x^2 a^2$ .

Получим:

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 a^2 + a^4 &= x^4 + 2x^2 a^2 - x^2 a^2 + a^4 = \\ &= (x^4 + 2x^2 a^2 + a^4) - x^2 a^2 = \\ &= (x^2 + a^2)^2 - (xa)^2 = (x^2 + a^2 + xa). \end{aligned}$$

# Пример 3

Разложить на множители

$$n^3 + 3n^2 + 2n$$

Сначала воспользуемся тем, что  $n$  можно вынести за скобки:  $n(n^2 + 3n + 2)$ . Теперь к трехчлену  $n^2 + 3n + 2$  применим способ группировки, предварительно представив  $3n$  в виде  $2n + n$ . Получим:

$$\begin{aligned} n^2 + 3n + 2 &= n^2 + 2n + n + 2 = (n^2 + 2n) + (n + 2) = \\ &= n(n + 2) + (n + 2) = (n + 2)(n + 1). \end{aligned}$$

Окончательно получаем:

$$n^3 + 3n^2 + 2n = n(n + 1)(n + 2).$$

# Пример 4

## Решить уравнение

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

Первый способ. Представим  $-6x$  в виде суммы  $-x-5x$ , а затем применим способ группировки:

$$x^2 - 6x + 5 = x^2 - 5x + 5 = (x^2 - x) + (-5x + 5) = x(x-1) - 5(x-1) = (x-1)(x-5).$$

Тогда заданное уравнение примет вид:

$$(x-1)(x-5) = 0,$$

откуда находим, что либо  $x=1$ , либо  $x=5$ .

Второй способ. Применим метод выделения полного квадрата, для чего представим слагаемое 5 в виде 9-4. Получим:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 5 &= x^2 - 6x + 9 - 4 = (x^2 - 6x + 9) - 4 = \\ &= (x-3)^2 - 2^2 = (x-3-2)(x-3+2) = (x-5)(x-1). \end{aligned}$$

Снова пришли к уравнению  $(x-1)(x-5) = 0$ , имеющему корни 1 и 5.

Ответ: 1, 5.

# Сокращение алгебраических дробей

*Алгебраической дробью* называется отношение двух многочленов  $P$  и  $Q$ . При этом используют запись  $\frac{P}{Q}$

# Тождества

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2;$$

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Написанные равенства верны при любых значениях входящих в их состав переменных. Такие равенства называют *тождествами*. Левую и правую часть тождества называют выражениями, **тождественно равными**. Замену одного выражения другим, тождественным ему, называют **тождественным преобразованием** выражения.

**Определение.** Тождество — это равенство, верное *при любых допустимых* значениях входящих в его состав переменных.



# ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

- Мы ввели новые (для вас) понятия математического языка:  
разложение многочлена на множители;  
алгебраическая дробь, сокращение алгебраической дроби;  
тождество, тождественно равные выражения,  
тождественное преобразование выражения.
- Вы познакомились со следующими приемами разложения  
многочлена на множители:  
вынесение общего множителя за скобки;  
группировка;  
использование формул сокращенного умножения;  
выделение полного квадрата.



На этом мы и закончим

наш  
сегодняшний  
урок

