Вычисление наибольших и наименьших значений функции без применения производной

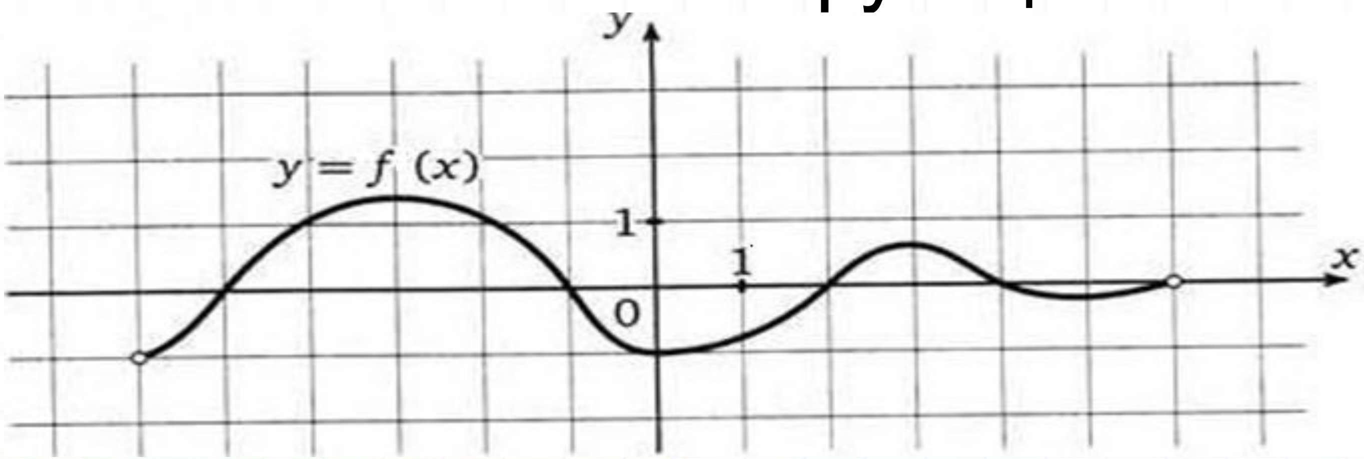
Работу выполнила:
Ученица 10 класса
Макарова Лилия Вадимовна
Научный руководитель:
Учитель МБОУ СОШ №3
Васильева Ольга Геннадьевна

«В мире не происходит ничего, в чем бы не был виден смысл какого-нибудь максимума или минимума»

Л.Эйлер (1707 – 1783), швейцарский, немецкий и российский математик и механик

Цель исследования:

Создание более полного представления о математических моделях – функциях, описывающих реальные процессы, о способах и методах нахождения наибольших и наименьших значений функции.



Задачи исследования:

- Раскрыть некоторые методы решения задач на вычисление наибольших и наименьших значений функции
- Рассмотреть применение методов нахождения наибольших и наименьших значений функций в точных и естественных науках
- Показать применение данных задач в жизни человека
- Обосновать эффективность решения задач данными методами
- Провести эксперимент

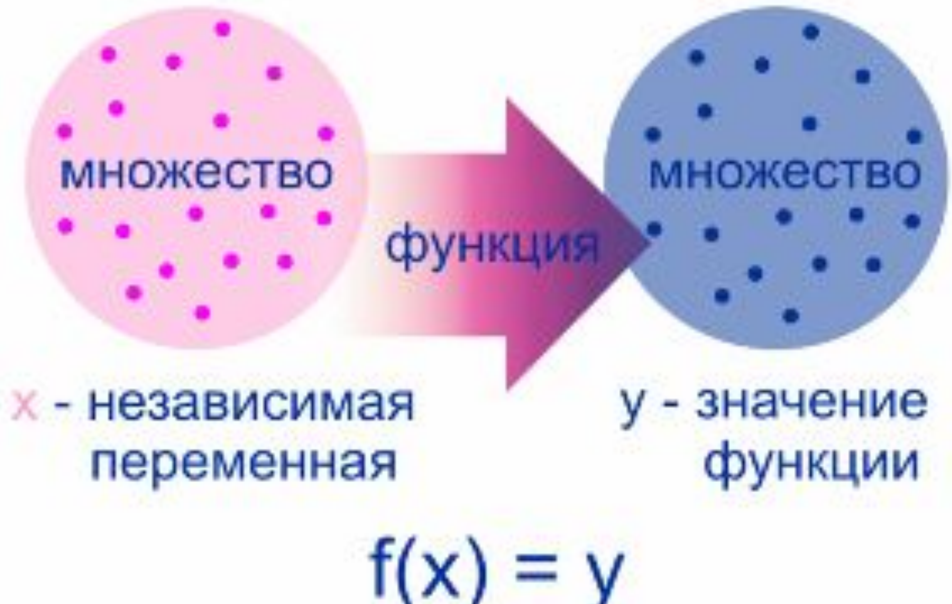
Объект исследования: функция как модель реальной ситуации

Методы исследования:

- сбор фактов (изучение учебной, познавательной литературы, использование Интернета);
- теоретические (качественный анализ, синтез, сравнение, обобщение);
- самостоятельное решение задач данными методами;
- практический (эксперимент).

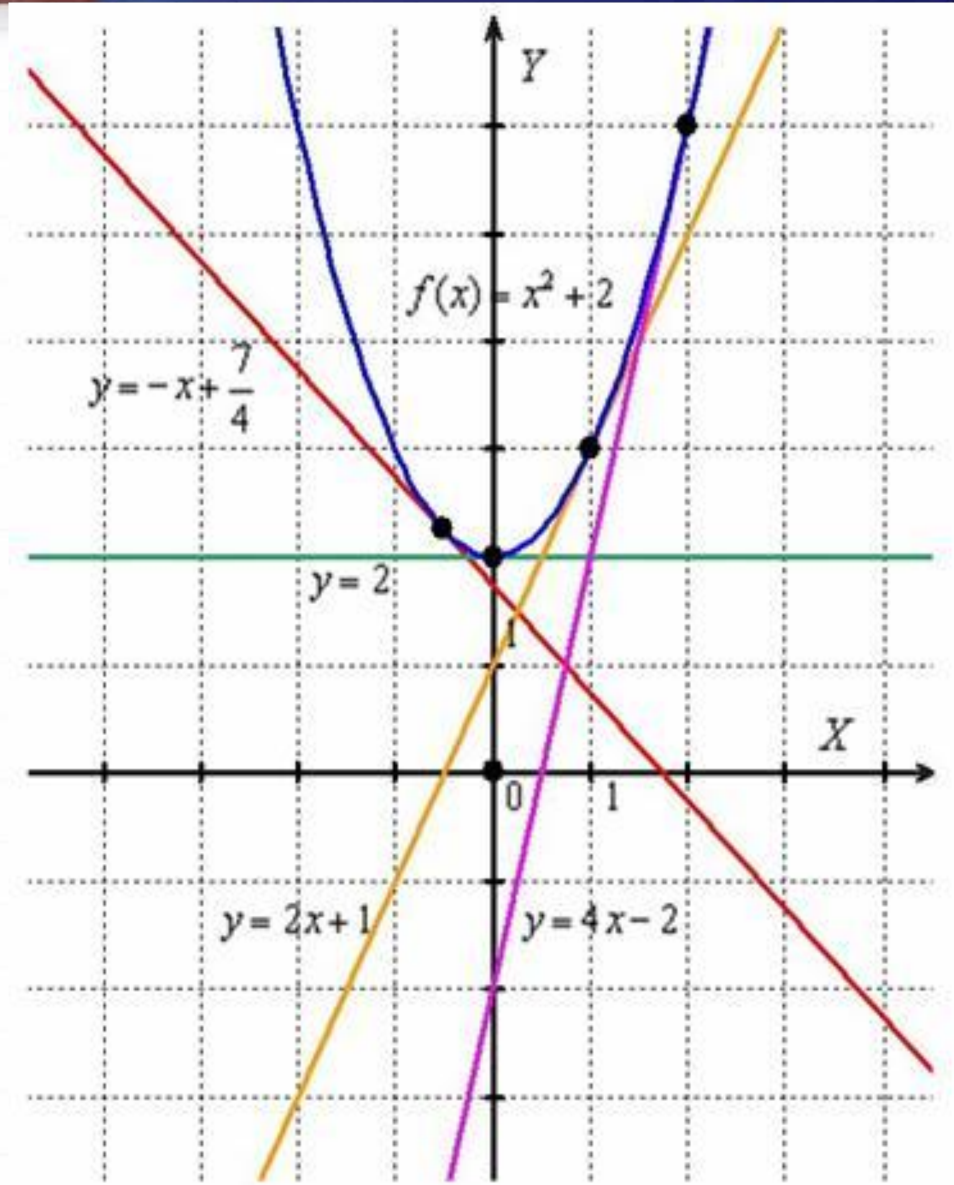
Значимость этой работы: применение представленных в работе методов для решения задач на ЕГЭ, а также на олимпиадах по математике; установление межпредметных связей и раскрытие роли математики в познании реальной действительности.

Идея функциональной зависимости зародилась в античной математике, но лишь в работах ученых XVII века, прежде всего, П. Ферма, Р. Декарта, И. Ньютона и Г. Лейбница стала оформляться как самостоятельная.



Понятие функции является одним из основных понятий современной математики.

Функции есть модели реальных процессов и явлений, происходящих в окружающей действительности.



Способы нахождения наибольших и наименьших значений функции

1. Метод замены переменной
2. Применение стандартных неравенств

а) неравенство Кош $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

б) неравенств $|a| + |b| \geq |a+b|$

в) неравенств $|a \sin t + b \cos t| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$

г) неравенств $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}|$

д) неравенств $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

3. Применение геометрии

Пример. Найти наименьшее значение функции: $y = \sqrt{(x-3)^2+1} + \sqrt{(x-2)^2+4}$

$\vec{a} = \{3 - x; 1\}$ и $\vec{b} = \{x - 2; 2\}$

Реше В

$|\vec{a}| = \sqrt{(x-3)^2+1}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{(x-2)^2+4},$

Тогда $(\vec{a} + \vec{b}) = \{1;3\}, \quad |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$

$|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}|$, то $y(x) \geq \sqrt{10}.$

Так как

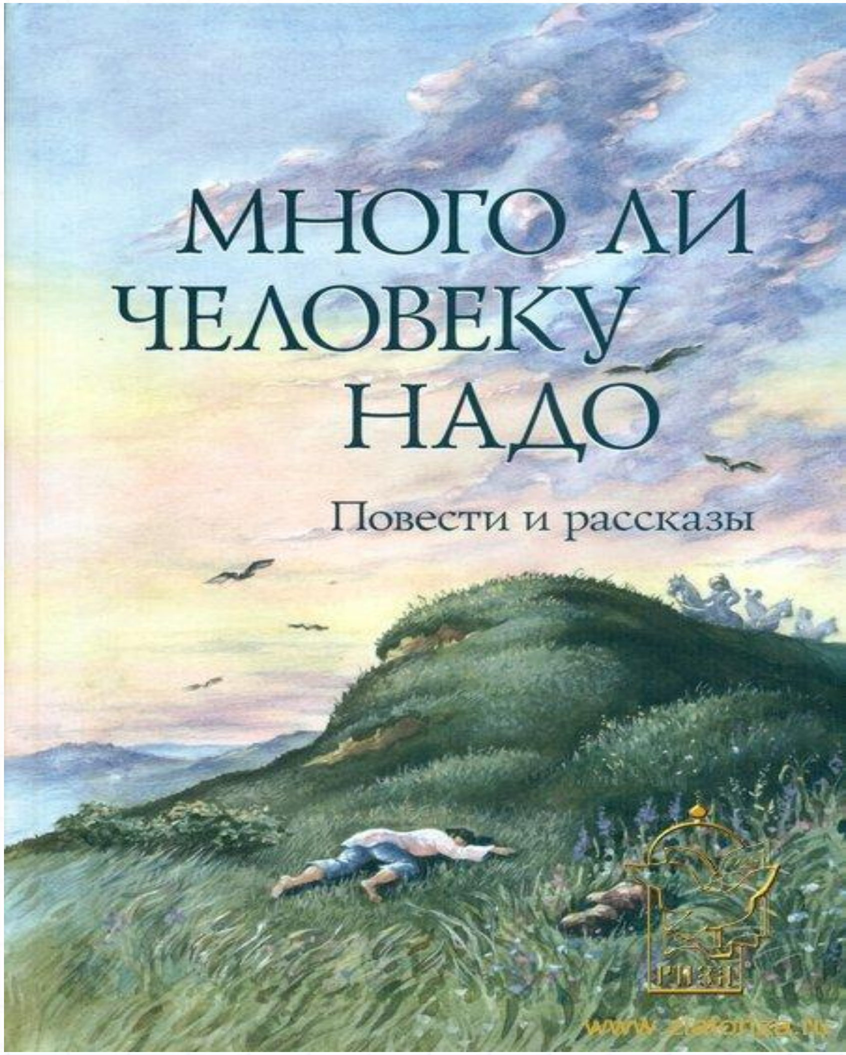
$\sqrt{10}$

То есть наименьшее значение функции равно

Применение задач

Рассказ Л. Н. Толстого «Много ли человеку земли надо».

Крестьянин Пахом мечтал о собственной земле и собрал, наконец, нужную сумму, предстал перед требованиями старшины: «Сколько за день земли обойдешь, вся твоя будет за 1000 рублей. Но если к заходу солнца не возвратишься на место, с которого вышел, пропали твои деньги».



Обошел Пахом четырехугольник периметром 40 км. Наибольшую ли площадь при данном периметре получил Пахом?

Решение. Наибольшую площадь будет иметь прямоугольник. Каковы же должны быть стороны этого прямоугольника?

Обозначим одну сторону через *x*, тогда другая сторона будет равна 20 – x.

$$S = x(20 - x) = -x^2 + 20x$$

Площадь прямоугольника:

Функция для нахождения площади будет иметь вид:

$$y = -x^2 + 20x$$

Надо найти наибольшее значение этой функции. Наибольшее значение этой функции достигается в вершине параболы, и оно равно 100 при $x = 10$.

Ответ: Пахом, чтобы получить больше земли, должен был обойти квадрат со стороной 10 км.

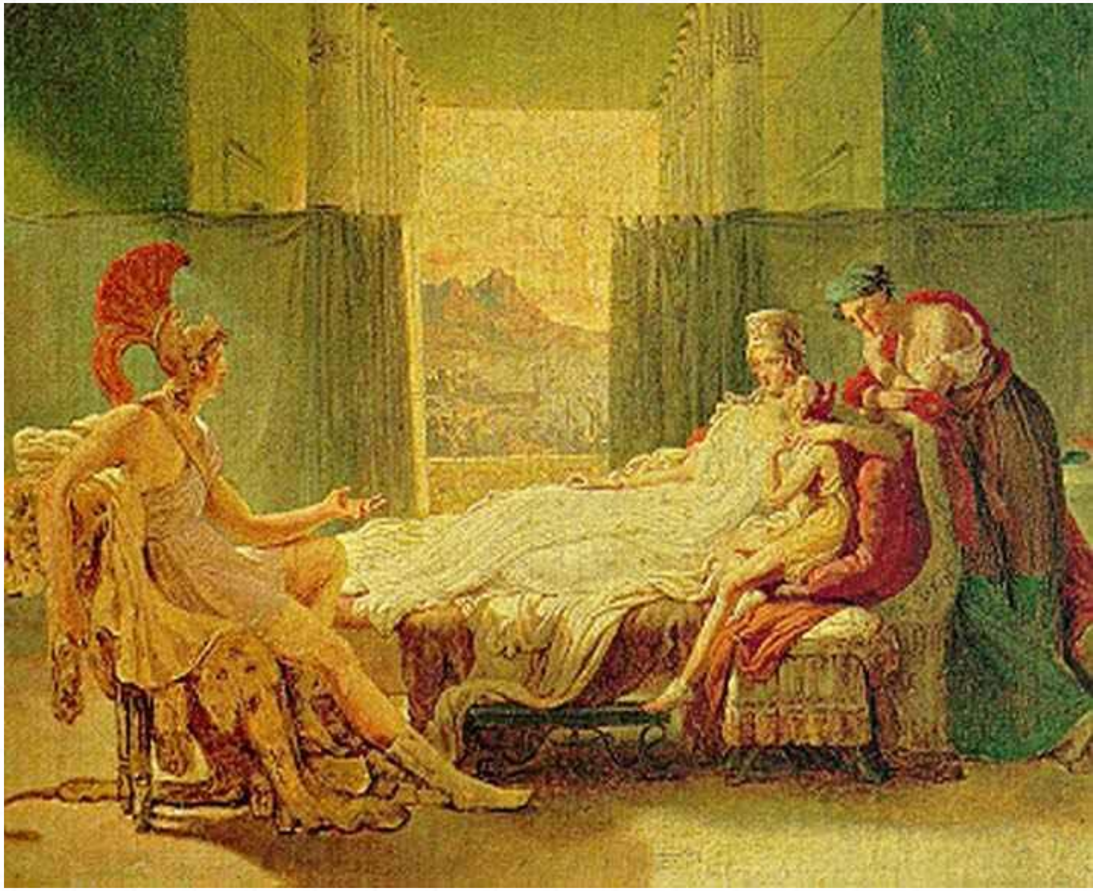
Задачи с практическим содержанием

Покупка нового автомобиля. Новый автомобиль стоит 200 тыс. руб. В первый год после покупки необходимо затратить 6 тыс. руб. В последующие годы эти затраты будут больше (на 4 тыс. руб.). Через сколько лет эксплуатации следует заменить автомобиль?

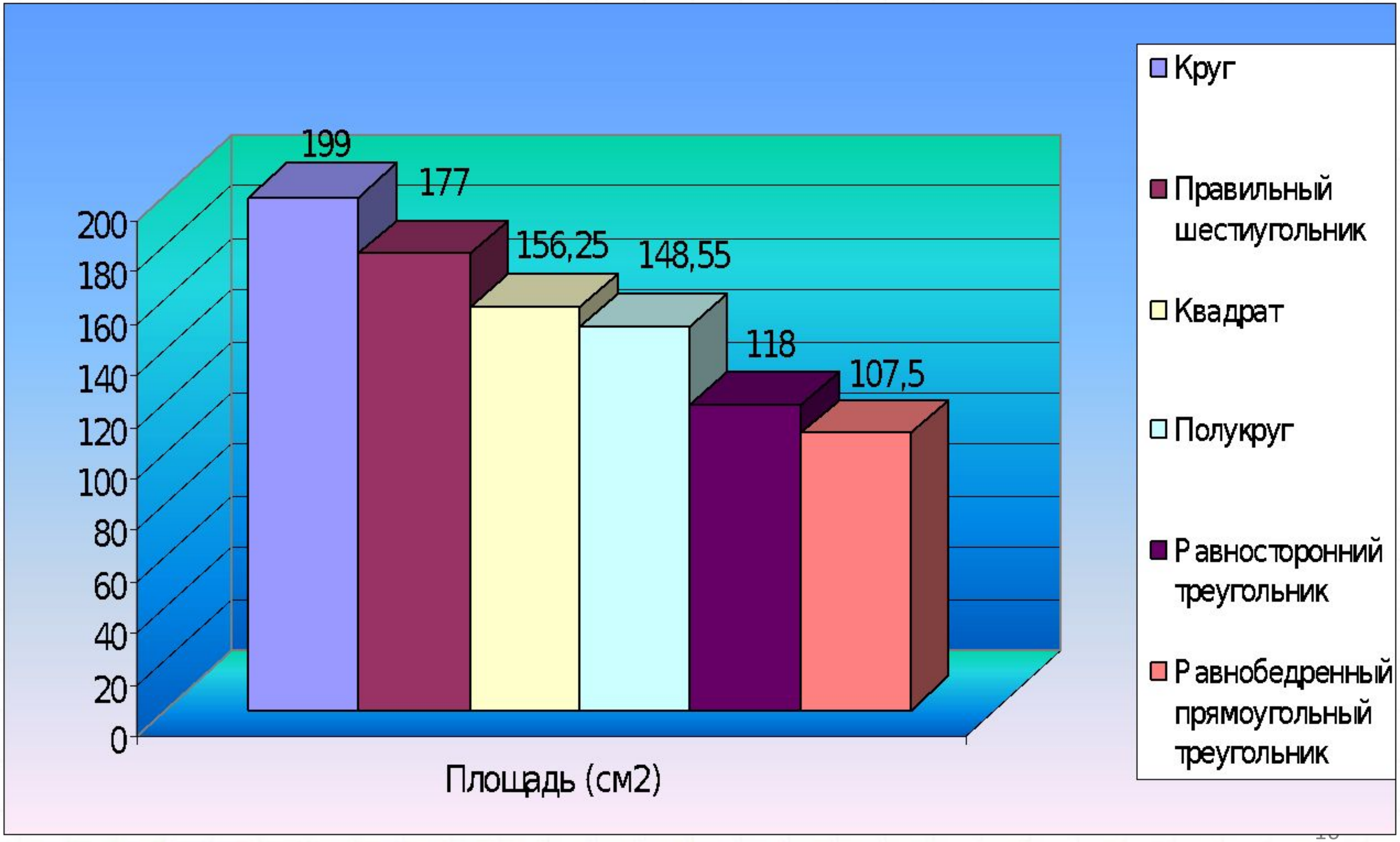
Решение. Ежегодные расходы составляют арифметическую прогрессию, первый член которой равен 6 тыс. руб., а послед $S = 200/n + 2n + 4$) тыс. руб. Средний ежегодный расход

$n = 10$ ем минимальное значение *S*. Оно достигается при . . Таким образом, чтобы автомобиль не обошелся слишком дорого, его следует заменить на новый через 10 лет после покупки

Задача Дидоны

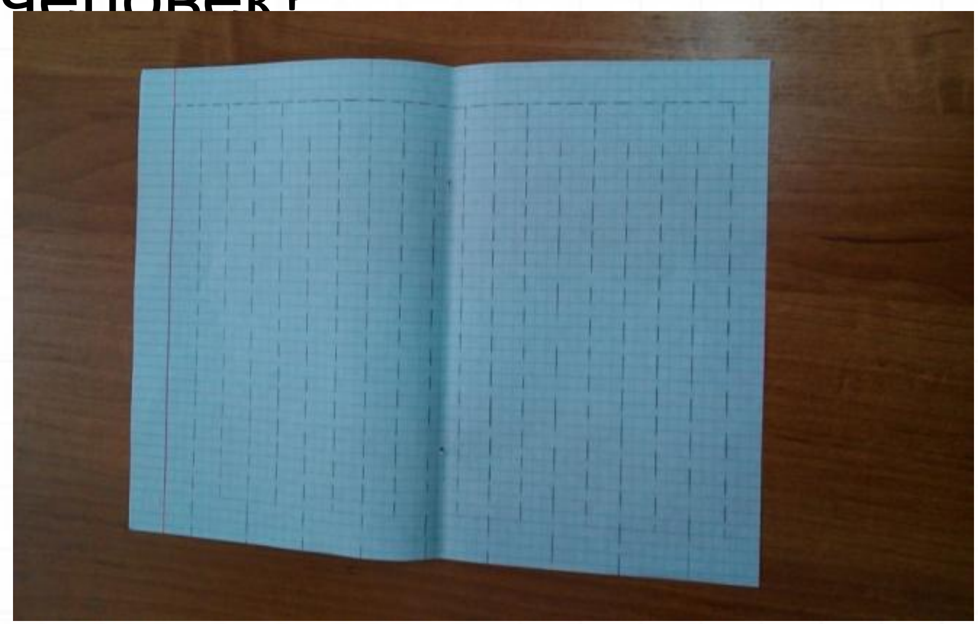


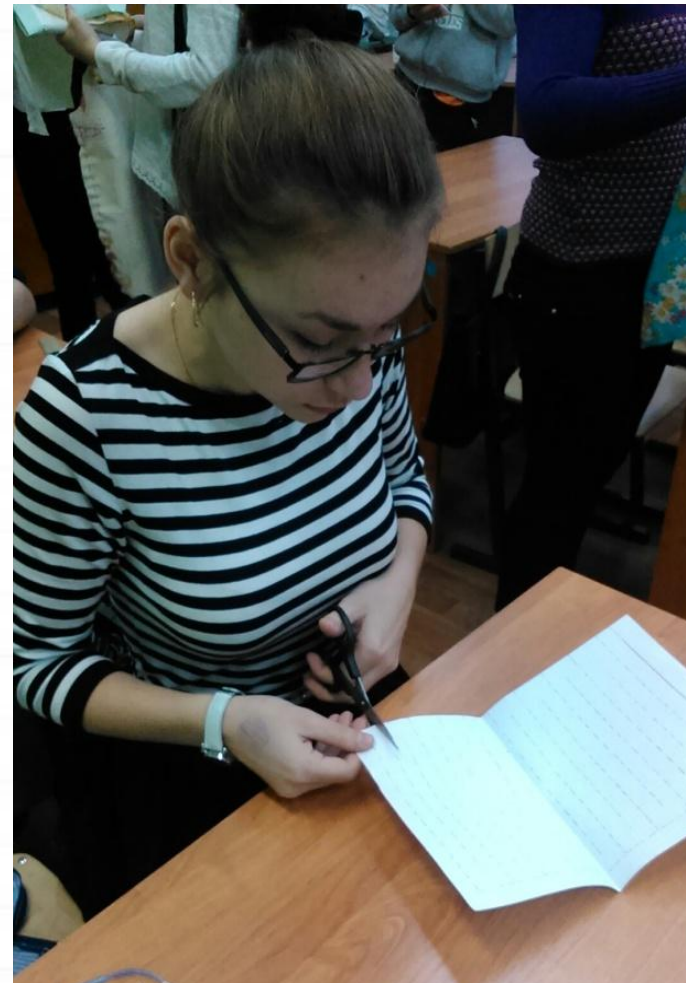
Эксперимент 1



Эксперимент 2

Можно ли разрезать обычный лист бумаги так, чтобы сквозь него мог пройти человек?






Г.Галилей

Заключение

Рассмотренные примеры показывают, что довольно большое число задач на вычисление наибольших и наименьших значений функции можно решить, не прибегая к помощи производной, а в некоторых случаях только такой путь и приводит к успеху.

Такого рода уравнения, неравенства или системы уравнений вполне могут встретиться среди заданий Единого государственного экзамена по математике.

Список использованной литературы

- Т. Н. Епифанова. Отыскание экстремальных значений функции различными способами // Математика в школе. 2004. №4
- С. А. Шестаков. ЕГЭ 2011 Математика. Задача В11. Исследование функций. Рабочая тетрадь/ Под ред. А. Л. Семенова. МЦНМО. 2011
- А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. Неожиданный шаг или сто тридцать красивых задач. Киев. Агрофирма «Александрия». 1993
- И. П. Буслаева. Решение экстремальных задач без использования производной. Математика в школе. 1995. №5
- С. И. Колесникова. Решение сложных задач ЕГЭ по математике. М:ВАКО. 2011

Спасибо за внимание!