

Тема: «Из истории
тригонометрии. Материалы к
уроку»

Проблема:

- Ученикам часто кажется, что тригонометрия – это скучный набор формул и графиков. И они не догадываются, что многое из того что нас окружает: восход и заход Солнца, затмения и движения планет, вращение колеса и биение сердца — это периодические процессы и явления, которые можно описать тригонометрическими функциями.

Тригонометрические функции

Сам термин
«тригонометрические
функции»
введён Кюгелем
в 1770.



- **Тригонометрические функции** — элементарные функции — элементарные функции, которые исторически возникли при рассмотрении прямоугольных треугольников — элементарные функции, которые исторически возникли при рассмотрении прямоугольных треугольников и выражали зависимости сторон этих треугольников от острых углов при гипотенузе — элементарные функции, которые исторически возникли при рассмотрении прямоугольных треугольников и выражали зависимости сторон этих треугольников от острых углов при гипотенузе (или, что эквивалентно, зависимость хорд — элементарные функции, которые исторически возникли при рассмотрении прямоугольных треугольников и выражали зависимости сторон этих треугольников от острых углов при гипотенузе (или, что эквивалентно,

- К тригонометрическим функциям относятся:
- **прямые тригонометрические функции**
- синус ($\sin x$)
- косинус ($\cos x$)
- **производные тригонометрические функции**
- тангенс ($\operatorname{tg} x$)
- котангенс ($\operatorname{ctg} x$)
- **другие тригонометрические функции**
- секанс ($\operatorname{sec} x$)
- косеканс ($\operatorname{cosec} x$)
- В западной литературе тангенс, котангенс и косеканс обозначаются $\tan x$, $\cot x$, $\operatorname{csc} x$.

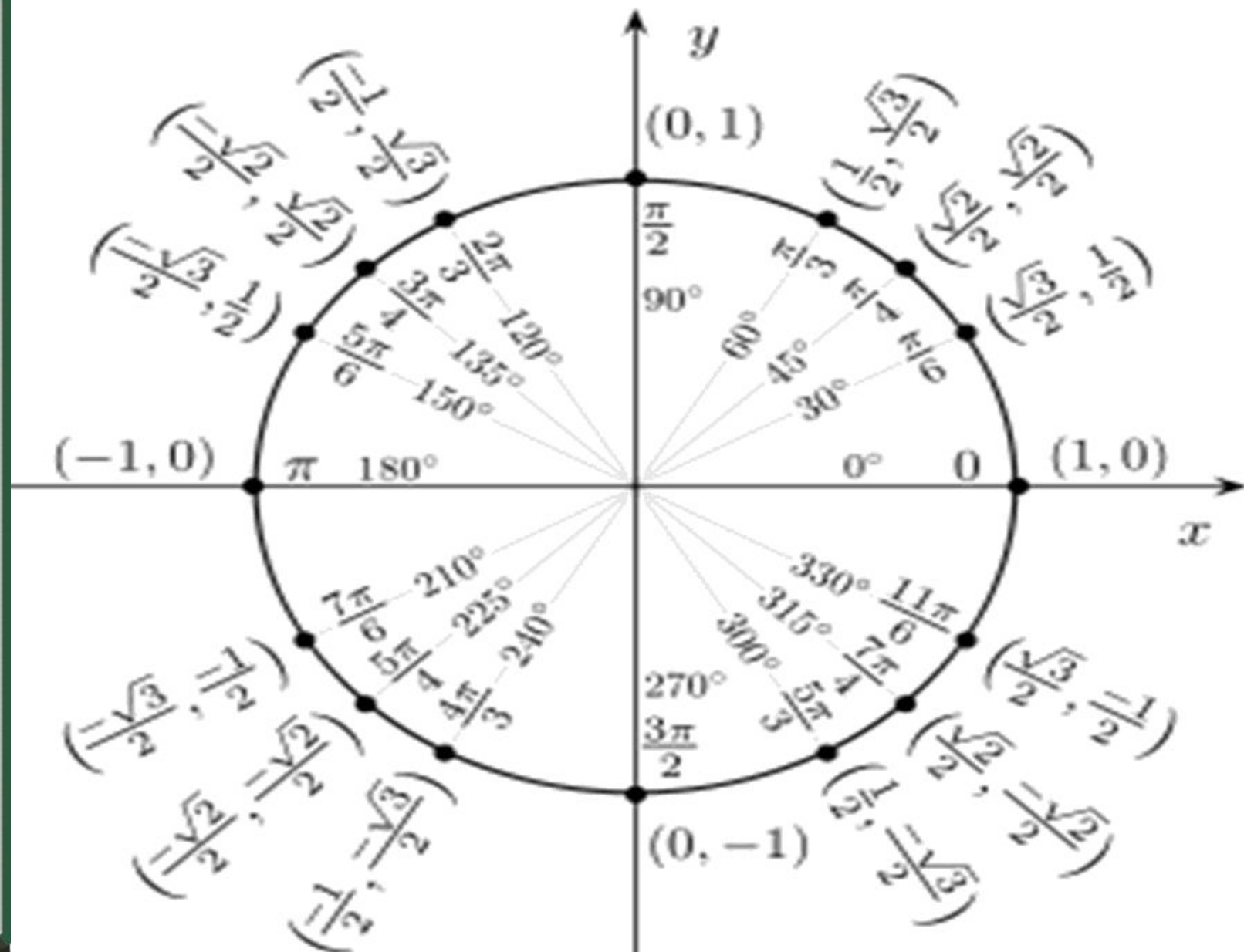
- Кроме упомянутых существуют также редко используемые тригонометрические функции Кроме упомянутых существуют также редко используемые тригонометрические функции (версинус и т.д.), а также обратные тригонометрические функции (арксинус, арккосинус и т. д.), рассматриваемые в отдельных статьях.
- Синус и косинус вещественного аргумента являются периодическими непрерывными Синус и косинус вещественного аргумента являются периодическими непрерывными и

- Остальные четыре функции на вещественной оси также вещественнозначные, периодические и неограниченно дифференцируемые на области определения, но не непрерывные. Тангенс и секанс имеют разрывы второго рода в точках $\pm\pi n + \pi/2$, а котангенс и косеканс — в точках $\pm\pi n$.

Древняя Греция



- Потребность в решении треугольников раньше всего возникла в астрономии: и в течении долгого времени тригонометрия развивалась изучалась как один из отделов астрономии. Насколько известно: способы решения треугольников (сферических) первые были письменно изложены греческим астрономом **Гиппархом** в середине 2 века до н.э. Наивысшими достижениями греческая тригонометрия обязана астроному **Птолемею** (2 век н.э.), создателю геоцентрической системы мира,



- Значительный вклад в развитие тригонометрии внесли арабские ученые Аль-Батани (850-929) и Абу-ль-Вафа, Мухамед-бен Мухамед (940-998), который составил таблицы синусов и тангенсов через $10'$ с точностью до $1/604$. Теорему синусов уже знали индийский ученый Бхаскара (р. 1114, год смерти неизвестен) и азербайджанский астроном и математик Насиреддин Туси Мухамед (1201-1274). Кроме того, Насиреддин Туси в своей работе «Трактат о полном четырехстороннике» изложил плоскую и сферическую тригонометрию как самостоятельную дисциплину.

- Длительную историю имеет понятие синус. Фактически различные отношения отрезков треугольника и окружности (а по существу, и тригонометрические функции) встречаются уже в III веке до н.э. в работах великих математиков Древней Греции – Евклида, Архимеда, Апполония Пергского.

- В римский период эти отношения достаточно систематично исследовались Менелаем (I век н.э.), хотя и не приобрели специального названия. Современный синус a , например, изучался как полухорда, на которую опирается центральный угол величиной a , или как хорда удвоенной дуги.

История понятия синуса

- Слово синус появилось в математике далеко не сразу. Этот термин имеет свою длительную (начиная с I-II вв.) и интересную историю. Зарождение тригонометрии связано с именами александрийских астрономов и в первую очередь с именем Клавдия Птолемея.

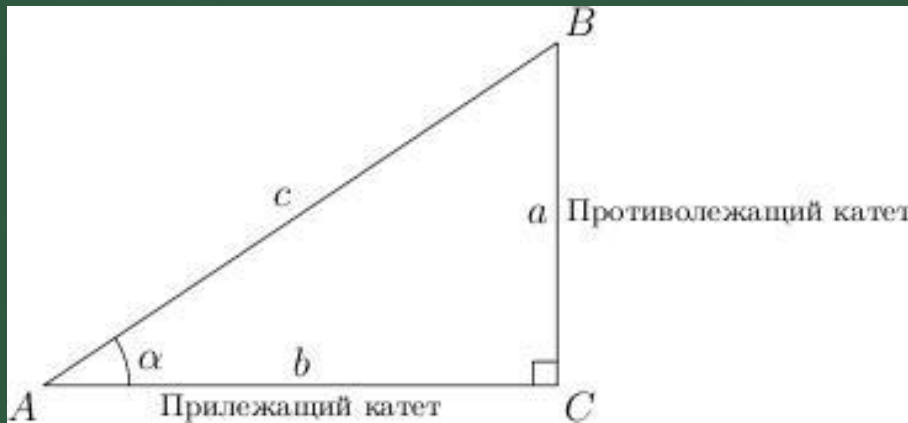


История понятия косинуса

- Слово косинус намного моложе. Косинус – это сокращение латинского выражения *completely sinus*, т. е. “дополнительный синус” (или иначе “синус дополнительной дуги”; $\cos a = \sin(90^\circ - a)$). Современное обозначение синуса *sin* и косинуса *cos* введено Леонардом Эйлером в XVIII веке.



прямые тригонометрические функции синус ($\sin x$), косинус ($\cos x$)



$$\sin A = \frac{a}{c}$$
$$\cos A = \frac{b}{c}$$

Синус острого угла в прямоугольном треугольнике — это отношение противолежащего катета к гипотенузе:

Косинус острого угла в прямоугольном треугольнике — отношение прилежащего катета к гипотенузе:

Тригонометрический круг

Y (sin)

90°

$\frac{\pi}{2}$

1

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{3}$

60°

$\frac{\pi}{4}$

45°

$\frac{\pi}{6}$

30°

180° π

-1

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$-\frac{1}{2}$

0

$\frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

1

0

0°

2π

360° X (cos)

$\frac{7\pi}{6}$

210°

-1/2

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

-1

$\frac{11\pi}{6}$

330°

$\frac{5\pi}{4}$

225°

$\frac{4\pi}{3}$

240°

$\frac{5\pi}{3}$

300°

$\frac{7\pi}{4}$

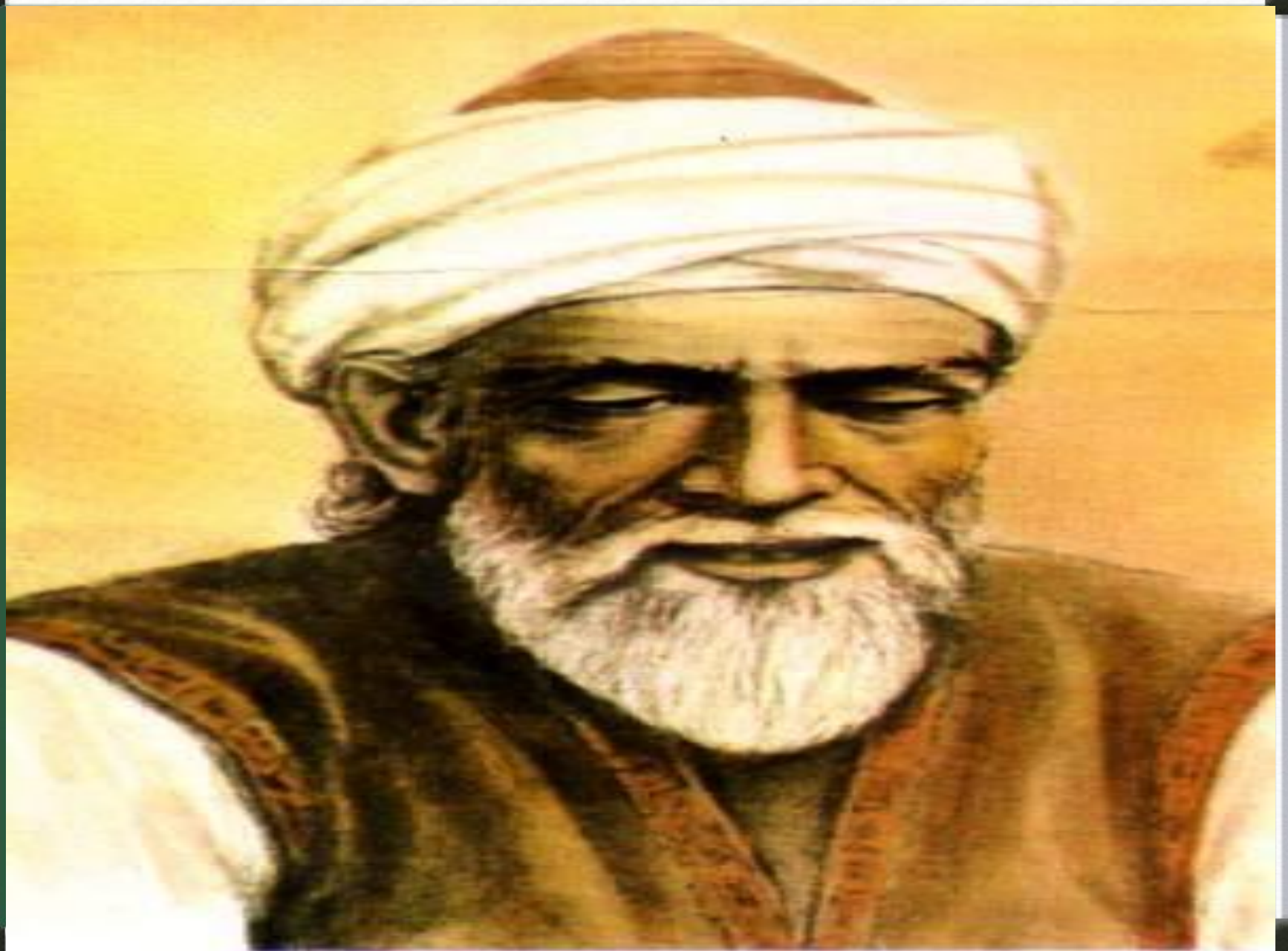
315°

$\frac{3\pi}{2}$

270°

История развития тангенса

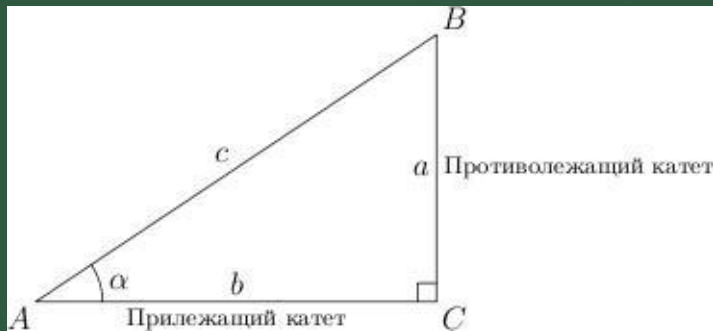
- Тангенсы возникли в связи с решением задачи об определении длины тени. Тангенс (а также котангенс) введен в X веке арабским математиком Абу-ль-Вафой, который составил и первые таблицы для нахождения тангенсов и котангенсов. Однако эти открытия долгое время оставались неизвестными европейским ученым, и тангенсы были заново открыты лишь в XIV веке немецким математиком, астрономом Регимонтаном (1467 г.). Он доказал теорему тангенсов. Региомонтан составил также подробные тригонометрические таблицы; благодаря его трудам плоская и сферическая тригонометрия стала самостоятельной дисциплиной и в Европе.
- Название «тангенс», происходящее от латинского *tanger* (касаться), появилось в 1583 г. *Tangens* переводится как «касающийся» (линия тангенсов – касательная к единичной окружности).



История возникновения котангенса

- Не сохранилась. По видимому, его "родил" тангенс, когда как-то перевернулся (шутка).

производные тригонометрические функции тангенс ($\operatorname{tg} x$), котангенс ($\operatorname{ctg} x$)



Тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике — отношение противолежащего катета к прилежащему

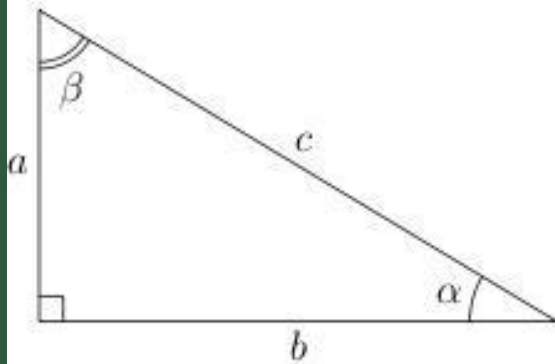
$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$$

Котангенс острого угла в прямоугольном треугольнике — отношение прилежащего катета к противолежащему (или, что то же самое, отношение косинуса к синусу):

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a} = \frac{\cos A}{\sin A}$$

Формулы

Тригонометрические функции в прямоугольном треугольнике



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\cos \alpha = \sin \beta$$

$$\sin \alpha = \cos \beta$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta$$

Спасибо за внимание!