ЧТО ОЗНАЧАЕТ В МАТЕМАТИКЕ ЗАПИСЬ $y = f(x)$

7 А-В класс МБУ «Школа №15»

04.05.2016 год

Учитель – Михайленко Л.Л.

- **Цель деятельности учителя:** создать условия для формирования представлений о математической записи y = f(x) , о кусочной функции, её графике, свойствах; умений строить графики кусочных функций, читать их.
- **Планируемые результаты изучения темы:**
- ***Личностные:*** осознают важность и необходимость знаний для человека.
- ***Предметные:*** умеют строить графики кусочных функций, читать их.

- ***Метапредметные результаты изучения темы (универсальные учебные действия):***
- *познавательные:* ориентируются на разнообразие способов решения задач;
- *регулятивные:* учитывают правило в планировании и контроле способа решения; умеют находить и устранять причины возникших трудностей;
- *коммуникативные:* контролируют действия партнера.

I.Повторение:

- №71-72, стр.94(обучающиеся выполняют задание в парах, с послед. коллективным обсуждением решения задач).

II. Постановка проблемы

Изучая какой-либо реальный процесс, обычно обращают внимание на две величины, участвующие в процессе (в более сложных процессах участвуют не две величины, а три, четыре и т. д., но мы пока такие процессы не рассматриваем): одна из них меняется как бы сама собой, независимо ни от чего (такую переменную чаще всего обозначают буквой x), а другая величина принимает значения, которые зависят от выбранных значений переменной x (такую зависимую переменную чаще всего обозначают буквой y). Математической моделью реального процесса как раз и является запись на математическом языке зависимости y от x, т. е. связи между переменными x и y.

II. Постановка проблемы

Ещё раз напомним, что к настоящему моменту мы изучили следующие математические модели: $y = b$, $y = kx$, $y = kx + m$, $y = x^2$, $y = -x^2$. Есть ли у этих математических моделей что-либо общее?

II. Постановка проблемы

Есть! Их структура одинакова:

$$y = f(x).$$

Эту запись («игрек равен эф от икс») следует понимать так: имеется выражение $f(x)$ с переменной x, с помощью которого мы находим значения переменной y.

Математики предпочитают запись $y = f(x)$ не случайно. Пусть, например, $f(x) = x^2$, т. е. речь идёт о функции $y = x^2$. Пусть нам надо выделить несколько значений аргумента и соответствующих значений функции. До сих пор мы писали так:

если $x = 1$, то $y = 1^2 = 1$;

если $x = -3$, то $y = (-3)^2 = 9$ и т. д.

III. Изучение нового материала

Если же использовать обозначение $f(x) = x^2$, то запись становится более экономной:

$$f(1) = 1^2 = 1;$$
$$f(-3) = (-3)^2 = 9.$$

Итак, мы познакомились ещё с одним фрагментом математического языка: фраза «значение функции $y = x^2$ в точке $x = 2$ равно 4» записывается короче: «если $f(x) = x^2$, то $f(2) = 4$».

А вот образец обратного перевода.

Если $f(x) = x^2$, то $f(-3) = 9$. По-другому — значение функции $y = x^2$ в точке $x = -3$ равно 9.

III. Изучение нового материала

Пример 1. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = x^3$. Вычислить:

а) $f(1)$; д) $f(a - 1)$;
б) $f(-4)$; е) $f(3x)$;
в) $f(a)$; ж) $f(-x)$.
г) $f(2a)$;

III. Изучение нового материала

Решение. Во всех случаях план действий один и тот же: нужно в выражении $f(x)$ подставить вместо x то значение аргумента, которое указано в скобках, и выполнить соответствующие вычисления и преобразования.

а) $f(1) = 1^3 = 1$;

б) $f(-4) = (-4)^3 = -64$;

в) $f(a) = a^3$;

г) $f(2a) = (2a)^3 = 8a^3$;

д) $f(a - 1) = (a - 1)^3$;

е) $f(3x) = (3x)^3 = 27x^3$;

ж) $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$.

Замечание. Разумеется, вместо буквы f можно использовать любую другую букву (в основном из латинского алфавита): $g(x)$, $h(x)$, $s(x)$ и т. д.

III. Изучение нового материала

Пример 2. Даны две функции: $y = f(x)$, где $f(x) = x^2$, и $y = g(x)$, где $g(x) = x^3$. Доказать, что:

а) $f(-x) = f(x)$; б) $g(-x) = -g(x)$.

Решение. а) Так как $f(x) = x^2$, то $f(-x) = (-x)^2 = x^2$. Итак, $f(x) = x^2$, $f(-x) = x^2$, значит, $f(-x) = f(x)$.

б) Так как $g(x) = x^3$, то $g(-x) = (-x)^3 = -x^3$. Итак, $g(x) = x^3$, $g(-x) = -x^3$, т. е. $g(-x) = -g(x)$.

Использование математической модели вида $y = f(x)$ оказывается удобным во многих случаях, в частности тогда, когда реальный процесс описывается различными формулами на разных промежутках изменения независимой переменной.

III. Изучение нового материала

Пример 3. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ если } x < 0; \\ x^2, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Вычислить: $f(-5)$, $f(-2)$, $f(1{,}5)$, $f(4)$, $f(0)$.

б) Построить график функции $y = f(x)$.

Решение. а) Что такое $f(-5)$? Это значение заданной функции в точке $x = -5$. Но функция задана не одним выражением, а двумя: $2x$ и x^2. Каким из них воспользоваться? Это зависит от выбранного значения аргумента. Мы выбрали $x = -5$, а число -5 удовлетворяет неравенству $x < 0$; в этом случае функция задаётся выражением, стоящим в первой строке, т. е. $f(x) = 2x$. Тогда $f(-5) = 2 \cdot (-5) = -10$.

Аналогично вычисляем $f(-2)$: если $x = -2$, то $x < 0$ и, значит, $f(x) = 2x$, т. е. $f(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$.

Вычислим $f(1{,}5)$, т. е. значение функции $y = f(x)$ в точке $x = 1{,}5$. Это значение x удовлетворяет условию $x \geqslant 0$, и, следовательно, функция задаётся выражением, стоящим во второй строке, т. е. $f(x) = x^2$. Поэтому $f(1{,}5) = 1{,}5^2 = 2{,}25$.

Аналогично находим $f(4)$: если $x = 4$, то $x \geqslant 0$ и, значит, $f(x) = x^2$, т. е. $f(4) = 4^2 = 16$.

Осталось вычислить $f(0)$. Значение $x = 0$ удовлетворяет условию $x \geqslant 0$, следовательно, $f(x) = x^2$, т. е. $f(0) = 0^2 = 0$.

III. Изучение нового материала

б) Мы умеем строить графики функций $y = 2x$ (рис. 66) и $y = x^2$ (рис. 67). Заданная функция $y = f(x)$ совпадает с функцией $y = 2x$ при $x < 0$ — эта часть графика выделена на рисунке 66. Заданная функция $y = f(x)$ совпадает с функцией $y = x^2$ при $x \geqslant 0$ — эта часть графика выделена на рисунке 67. Если мы теперь изобразим обе выделенные части в одной системе координат, то получим требуемый график функции $y = f(x)$ (рис. 68).

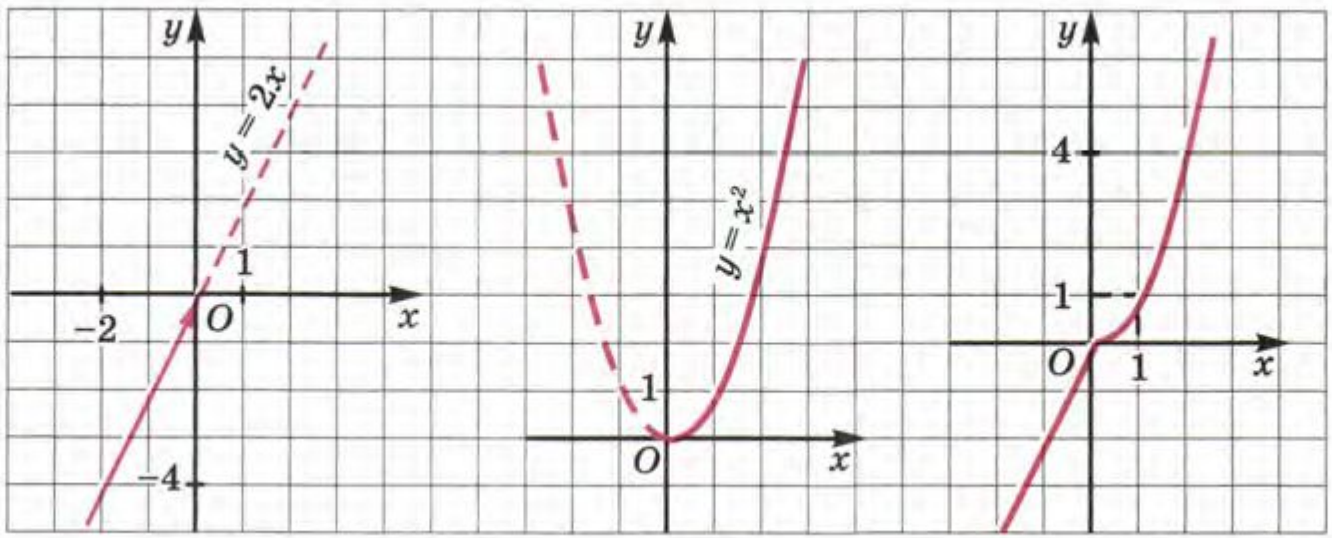


Рис. 66 Рис. 67 Рис. 68

III. Изучение нового материала

Конечно, математики не строят подобные графики так долго. Обычно всё делается сразу в одной системе координат. Только, естественно, прямая $y = 2x$ берётся не целиком, а лишь при условии $x < 0$, т. е. на промежутке $(-\infty; 0)$, и парабола $y = x^2$ берётся не целиком, а лишь при условии $x \geqslant 0$, т. е. на промежутке $[0; +\infty)$. Вот так «по кусочкам» и воспроизводится весь график. Поэтому функции такого типа, как в примере 3, называют *кусочными функциями*.

кусочная функция

III. Изучение нового материала

Пример 4. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{если } -4 \leqslant x \leqslant -1; \\ x^2, & \text{если } -1 < x \leqslant 0; \\ 4, & \text{если } \ 0 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

а) Вычислить: $f(-4)$, $f(-2)$, $f(-0,5)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(5)$;
б) построить график функции $y = f(x)$.

III. Изучение нового материала

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{если } -4 \leqslant x \leqslant -1; \\ x^2, & \text{если } -1 < x \leqslant 0; \\ 4, & \text{если } \ \ 0 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

а) Вычислить: $f(-4)$, $f(-2)$, $f(-0{,}5)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(5)$;

Решение. а) Значение $x = -4$ удовлетворяет условию $-4 \leqslant x \leqslant -1$, а в этом случае $f(x) = x + 2$. Поэтому $f(-4) = -4 + 2 = -2$.

Значение $x = -2$ удовлетворяет условию $-4 \leqslant x \leqslant -1$, а в этом случае $f(x) = x + 2$. Значит, $f(-2) = -2 + 2 = 0$.

Значение $x = -0{,}5$ удовлетворяет условию $-1 < x \leqslant 0$, а в этом случае $f(x) = x^2$. Следовательно, $f(-0{,}5) = (-0{,}5)^2 = 0{,}25$.

Значение $x = 0$ удовлетворяет условию $-1 < x \leqslant 0$, а в этом случае $f(x) = x^2$. Тогда $f(0) = 0^2 = 0$.

Значение $x = 1$ удовлетворяет условию $0 < x \leqslant 4$, а в этом случае $f(x) = 4$; в частности, и $f(1) = 4$.

Значение $x = 5$ не удовлетворяет ни одному из имеющихся условий: ни первому $-4 \leqslant x \leqslant -1$, ни второму $-1 < x \leqslant 0$, ни третьему $0 < x \leqslant 4$. Поэтому вычислить $f(5)$ мы не можем, *это задание некорректно*.

III. Изучение нового материала

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{если } -4 \leqslant x \leqslant -1; \\ x^2, & \text{если } -1 < x \leqslant 0; \\ 4, & \text{если } \ \ 0 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

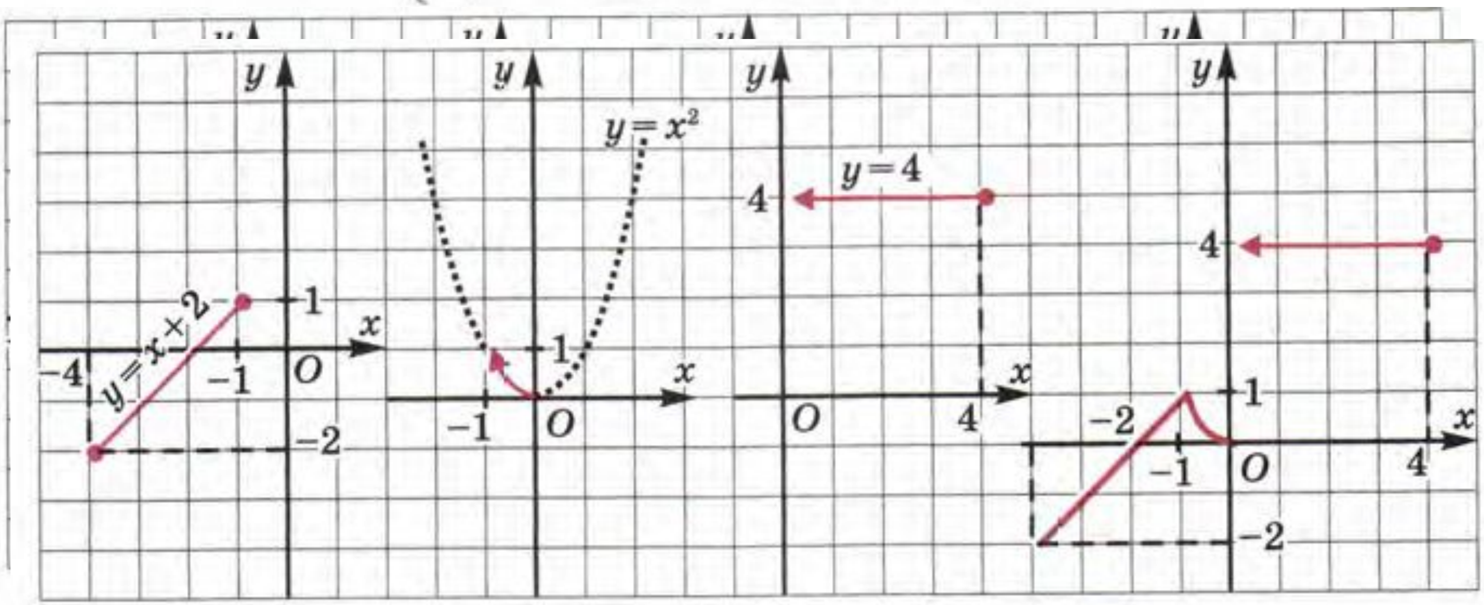


Рис. 69 Рис. 70 Рис. 71 Рис. 72

Вот так с помощью известных графиков «по кусочкам» можно строить графики на координатной плоскости.

III. Изучение нового материала

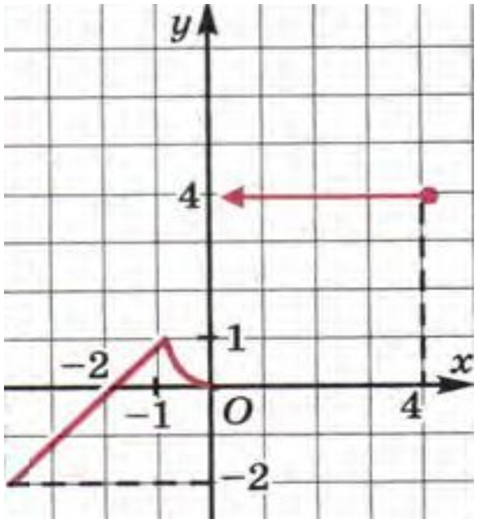
Рабочий словарь

чтение графика

область определения функции

Опишем с помощью построенного на рисунке 72 графика некоторые свойства функции $y = f(x)$ — такое описание свойств обычно называют *чтением графика*. Чтение графика — это своеобразный переход от геометрической модели (от графической модели) к словесной модели (к описанию свойств функции). А построение графика — это переход от аналитической модели (она представлена в условии примера 4) к геометрической модели.

III. Изучение нового материала



1. Независимая переменная x «пробегает» все значения от −4 до 4. Иными словами, для каждого значения x из отрезка $[-4; 4]$ можно вычислить значение функции $f(x)$. Говорят так: $[-4; 4]$ — *область определения функции.*

Почему при решении примера 4 мы сказали, что найти $f(5)$ нельзя? Да потому, что значение $x = 5$ не принадлежит области определения функции.

2. $y_{наим} = -2$ (этого значения функция достигает при $x = -4$); $y_{наиб} = 4$ (этого значения функция достигает в любой точке полуинтервала $(0; 4]$).

3. $y = 0$, если $x = -2$ и если $x = 0$; эти точки графика функции $y = f(x)$ принадлежат оси x.

4. $y > 0$, если $x \in (-2; 0)$ или если $x \in (0; 4]$; на этих промежутках график функции $y = f(x)$ расположен *выше оси* x.

5. $y < 0$, если $x \in [-4; -2)$; на этом промежутке график функции $y = f(x)$ расположен *ниже оси* x.

6. Функция возрастает на отрезке $[-4; -1]$, убывает на отрезке $[-1; 0]$ и постоянна (ни возрастает, ни убывает) на полуинтервале $(0; 4]$.

По мере того как мы с вами будем изучать новые свойства функций, процесс чтения графика будет становиться более насыщенным, содержательным и интересным.

III. Изучение нового материала

обратите внимание

Рабочий словарь

непрерывная функция

точка разрыва

Обсудим одно из таких новых свойств. График функции, рассмотренной в примере 4, состоит из трёх ветвей (из трёх «кусочков»). Первая и вторая ветви (отрезок прямой $y = x + 2$ и часть параболы) «состыкованы» удачно: отрезок заканчивается в точке $(-1; 1)$, а участок параболы начинается в той же точке. А вот вторая и третья ветви менее удачно «состыкованы»: третья ветвь («кусочек» горизонтальной прямой) начинается не в точке $(0; 0)$, а в точке $(0; 4)$. Математики говорят так: «функция $y = f(x)$ *претерпевает разрыв* при $x = 0$ (или в точке $x = 0$)». Если функция не имеет точек разрыва, то её называют *непрерывной*. Так, все функции, с которыми мы познакомились в предыдущих параграфах ($y = b$, $y = kx$, $y = kx + m$, $y = x^2$, $y = -x^2$), — непрерывные.

III. Изучение нового материала

Пример 5. Дана функция $y = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$. Построить и прочитать её график.

Решение. Как видите, здесь функция задана достаточно сложным выражением. Но математика — единая и цельная наука, её разделы тесно связаны друг с другом. Воспользуемся тем, что мы изучали в главе 7, и сократим алгебраическую дробь $\frac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$. Имеем

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2} = \frac{x^2(x - 2)}{x - 2} = x^2.$$

Итак, на самом деле $f(x) = x^2$. Правда, надо учесть, что тождество $\frac{x^3 - 2x^2}{x - 2} = x^2$ справедливо лишь при ограничении $x \neq 2$. Следовательно, мы можем переформулировать задачу так: вместо функции $y = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$ будем рассматривать функцию $y = x^2$, где $x \neq 2$.

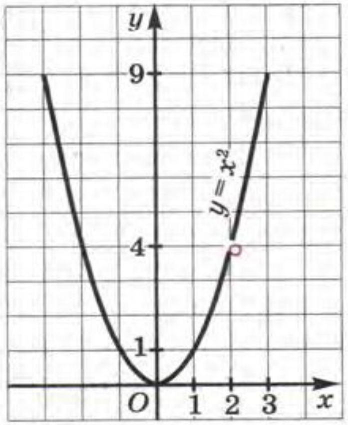
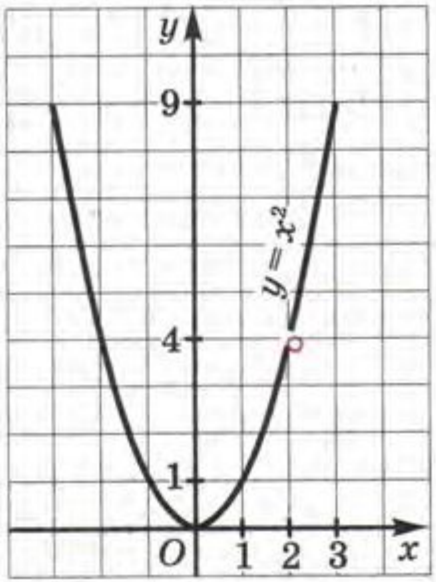


Рис. 73

Построим на координатной плоскости xOy параболу $y = x^2$. Прямая $x = 2$ пересекает её в точке (2; 4). Но по условию $x \neq 2$, значит, точку (2; 4) параболы мы должны исключить из рассмотрения, для чего на чертеже отметим эту точку светлым кружком. Таким образом, график функции построен — это парабола $y = x^2$ с «выколотой» точкой (2; 4) (рис. 73).

III. Изучение нового материала



Перейдём к описанию свойств функции $y = f(x)$, т. е. к чтению её графика.

1. Независимая переменная x принимает любые значения, кроме $x = 2$. Значит, область определения функции состоит из двух открытых лучей $(-\infty; 2)$ и $(2; +\infty)$.

2. $y_{наим} = 0$ (достигается при $x = 0$), $y_{наиб}$ не существует.

3. Функция претерпевает разрыв при $x = 2$ (в точке $x = 2$); на $(-\infty; 2)$ и на $(2; +\infty)$ она непрерывна.

4. $y = 0$, если $x = 0$.

5. $y > 0$, если $x \in (-\infty; 0)$, если $x \in (0; 2)$ и если $x \in (2; +\infty)$.

6. Функция убывает на луче $(-\infty; 0]$, возрастает на полуинтервале $[0; 2)$ и на открытом луче $(2; +\infty)$.

ФИЗКУЛЬТМИНУТКА

IV. Осмысливание:

- Самостоятельная работа с параграфом 39.

V. Итог урока. Рефлексия

1. Известно, что $f(x) = 2x + 3$. Найдите:
а) $f(2x)$; б) $f(2x + 3)$.

2. Известно, что $f(x) = x^2$. Найдите:
а) $f(2x)$; б) $f(2x + 3)$; в) $f(-x)$; г) $f(x^6)$.

3. Известно, что $f(x) = -x^2$. Найдите: а) $f(0{,}5x)$; б) $f(x - 3)$; в) $f(-2x)$; г) $f(-x^3)$.

4. Как вы понимаете, что такое кусочная функция?

5. Приведите пример кусочной функции $y = f(x)$, в котором задание вычислить $f(17)$ является некорректным.

6. Придумайте кусочную функцию, график которой состоит из части параболы и луча графика линейной функции. Задайте её аналитически (с помощью формул).

7. Придумайте кусочную функцию, график которой состоит из части параболы и двух отрезков графиков разных линейных функций. Задайте её аналитически.

8. Приведите пример функции, которая претерпевает разрыв при $x = 1$.

9. Сколько свойств функции мы уже можем записать, когда выполняем чтение графика? Перечислите эти свойства.

VI. Домашнее задание:

- Параграф 39(№5-конспект).
- Повторение: №75; №87 и №117(в.г).